



MODELOS MATEMÁTICOS PARA O PROBLEMA DE CORTE DE PEÇAS IRREGULARES

Marcos O. Rodrigues Aline A. S. Leão Franklina M. B. Toledo

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Universidade de São Paulo (USP)

{okamura, aasleao, fran}@icmc.usp.br

RESUMO

O problema estudado consiste em cortar um conjunto de peças bidimensionais irregulares a partir de objetos maiores. O objetivo é reduzir o desperdício de material durante o processo de corte. A partir de um modelo recentemente apresentado na literatura para este problema, são propostos dois modelos reduzidos para resolvê-lo. Experimentos computacionais indicam que os modelos propostos são eficientes para instâncias com poucas repetições de peças. Além disso, os resultados mostram que a escolha do conjunto de restrições de não sobreposição é fundamental para a melhoria da qualidade da solução e para a redução do tempo computacional de resolução das instâncias avaliadas.

PALAVRAS CHAVE: Corte e empacotamento, Corte de peças irregulares, Programação inteira mista.

Área principal: Programação matemática.

ABSTRACT

The nesting problem consists of cutting a set of two-dimensional irregular pieces from larger objects. The objective is to reduce the waste of material during the cutting process. We propose two reduced models to solve the problem based on a model recently introduced in the literature. Computational results show that the proposed models are efficient for instances with few piece types. In addition, the results highlight that the definition of the nofit polygon constraints is important to determine better solutions and to reduce the computational time needed to solve the evaluated instances.

KEYWORDS: Cutting and packing, Nesting, Mixed integer programming.

Main area: Mathematical Programming.

1. Introdução

O problema de corte de peças irregulares consiste em cortar um conjunto de peças bidimensionais irregulares a partir de objetos maiores, evitando o desperdício de material. Neste trabalho, consideramos um objeto (placa) de altura fixa e comprimento infinito. O objetivo é minimizar o comprimento da placa utilizado para cortar todas as peças (*strip packing problem*). Segundo Wäscher et al. (2007), este problema pode ser classificado como um problema de corte bidimensional, de dimensão aberta com peças irregulares.

Apesar de sua importância econômica para diversos setores industriais, por exemplo, os setores calçadista, vestuário, moveleiro e metalúrgico, há poucos trabalhos que abordam o problema de forma exata devido a sua dificuldade de resolução. Carravilla et al. (2003) apresentaram um método baseado em programação por restrições para a resolução do problema. Em 2009, Fischetti e Luzzi (2009) propuseram um modelo de programação inteira mista que utiliza variáveis contínuas para definir o posicionamento das peças e variáveis binárias para evitar a sobreposição entre elas. Alvarez-Valdes et al. (2013) estenderam o modelo linear de compactação de Gomes e Oliveira (2006) para o problema de corte de peças convexas. Além disso, os autores reformularam o modelo de Fischetti e Luzzi (2009) e desenvolveram um método *branch-and-bound* para sua resolução. Toledo et al. (2013) apresentaram um modelo inteiro-misto em que as variáveis de decisão estão associadas aos tipos de peça e aos pontos de uma malha em que as peças podem ser alocadas na placa.

Devido à complexidade do problema, diversos autores desenvolveram heurísticas e meta-heurísticas para sua resolução. Na linha de heurísticas construtivas, há vários trabalhos na literatura, dentre os quais destacamos os mais recentes: Oliveira et al. (2000); Dowsland et al. (2002); Burke et al. (2006); Burke et al. (2010). Na linha de heurísticas de melhoria, podemos destacar: Babu e Babu (2001); Bennell e Dowsland (2001); Gomes e Oliveira (2002); Takahara et al. (2003); Gomes e Oliveira (2006); Egeblad et al. (2007); Imamichi et al. (2009); Umetani et al. (2009); Bennell e Song (2010); Leung et al. (2012); Sato et al. (2012); Elkeran (2013).

O objetivo deste trabalho é estudar o modelo dos pontos proposto em Toledo et al. (2013), buscando tornar sua resolução mais eficiente. Como o modelo possui um conjunto com grande número de restrições de não sobreposição, substituiremos este conjunto por outros com um menor número de restrições, resultando em formulações mais compactas do problema.

Este trabalho está organizado conforme descrito a seguir. Na Seção 2 resumimos o modelo dos pontos a fim de tornar o trabalho autocontido. Na Seção 3, são propostas duas reformulações para o modelo dos pontos. Na Seção 4, são discutidos os resultados computacionais. Por fim, na Seção 5, são apresentadas as considerações finais e sugestões de trabalhos futuros.

2. Modelo dos pontos

Seja $\mathcal{T} = 1, \dots, T$ um conjunto de tipos de peças bidimensionais e uma placa retangular de largura fixa W e de comprimento ilimitado. Além disso, considere que cada tipo de peça $t \in \mathcal{T}$ seja representado por um polígono e possua uma demanda q_t e um único ponto de referência v_t . Assim, o problema consiste em encontrar um plano de corte em que o ponto de referência de cada uma das peças seja posicionado no interior da placa sem provocar sobreposições, de tal forma que o comprimento utilizado z da placa seja mínimo.

Toledo et al. (2013) propuseram um modelo inteiro misto para o problema em que os pontos de referência das peças só podem ser posicionados na placa de acordo com uma malha preestabelecida de pontos. Esta malha possui largura W e comprimento inicial L

(limitante superior) suficientemente grande para posicionar todas as peças. Para obter a malha, é feita uma discretização horizontal e vertical da placa utilizando, respectivamente, as granularidades g_x e g_y . Os autores ressaltam que estes valores influenciam diretamente na qualidade da solução e no número de variáveis binárias e restrições do problema.

Inicialmente, para garantir que cada peça esteja inteiramente contida na placa, é utilizado o conceito de *inner-fit polygon*. Dado um tipo de peça t e a placa, o *inner-fit polygon* $I\tilde{F}P_t$ é representado pelo conjunto de pontos pertencentes a placa no qual o ponto de referência de uma peça do tipo t pode ser alocado sem que a peça exceda os limites da placa (Figura 1).

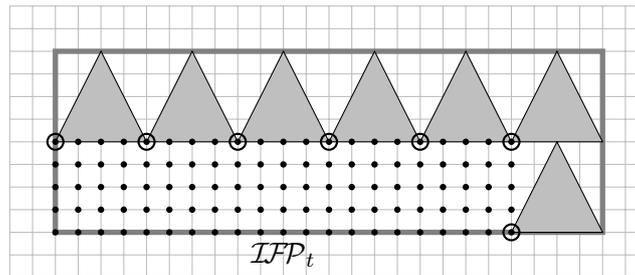


Figura 1: Exemplo de *inner-fit polygon*.

Para evitar a sobreposição entre dois tipos de peças t e u , a abordagem utilizada é o conceito de *nofit polygon* ($NFP_{t,u}$), que é o polígono cujo interior representa a região na qual o ponto de referência da peça do tipo u não pode ser posicionado, uma vez que causaria sobreposição com a peça do tipo t . A construção do $NFP_{t,u}$ pode ser interpretada como a trajetória descrita pelo ponto de referência de uma peça do tipo u quando ela desliza em volta de outra peça do tipo t e vice-versa (Figura 2 (a)).

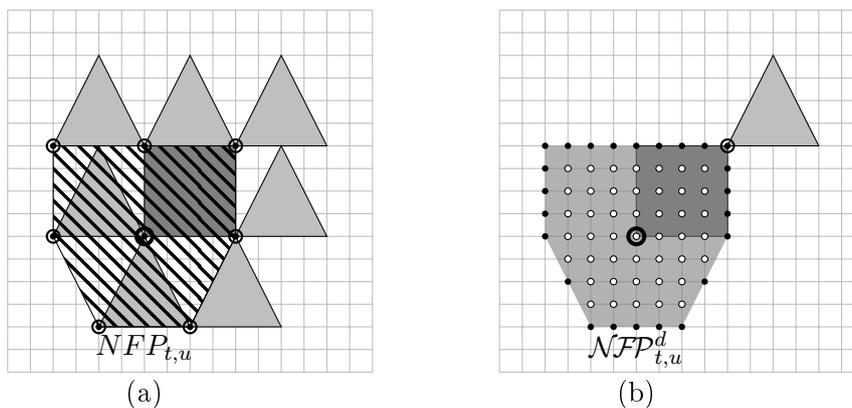


Figura 2: Construção do *nofit polygon* na malha de pontos.

No modelo dos pontos, o *nofit polygon* $NFP_{t,u}^d$ é representado pelo conjunto de pontos que estão no interior do $NFP_{t,u}$ se uma peça do tipo t for posicionada no ponto d (Figura 2 (b)). Observe que as peças se tocam nos pontos pretos e se sobrepõem nos pontos brancos.

O modelo dos pontos é dado por:

$$\min \quad z \quad (1)$$

$$\text{s.a:} \quad (c_d g_x + x_t^M) \delta_t^d \leq z, \quad \forall t \in \mathcal{T}, \forall d \in \mathcal{IFP}_t, \quad (2)$$

$$\sum_{d \in \mathcal{IFP}_t} \delta_t^d = q_t, \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3)$$

$$\delta_t^d + \delta_u^e \leq 1, \quad \forall t, u \in \mathcal{T}, t \leq u, \forall d \in \mathcal{IFP}_t, \forall e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d, \quad (4)$$

$$\delta_t^d \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in \mathcal{T}, \forall d \in \mathcal{IFP}_t, \quad (5)$$

$$z \geq 0, \quad (6)$$

em que :

c_d é a coluna associada ao ponto d ;

x_t^M é a coordenada de maior valor no eixo x dos vértices da peça do tipo t ;

$$\delta_t^d = \begin{cases} 1, & \text{se uma peça do tipo } t \text{ está alocada ao ponto } d \text{ da placa;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A função objetivo (1) em conjunto com as restrições (2) minimizam o comprimento utilizado da placa para cortar todas as peças. As restrições (3) garantem que todas as peças são alocadas inteiramente na placa, enquanto que as restrições (4) impedem a sobreposição das peças. As restrições (5) e (6) definem o domínio das variáveis do problema.

3. Modelos propostos

No modelo dos pontos, a matriz de restrições do problema possui uma grande quantidade de linhas devido às restrições de não sobreposição das peças (4), que é no pior caso $\mathcal{O}(T^2 D^2)$, em que T é o número de tipo de peças distintas e D é número de pontos da malha. Assim, caso seja realizada a substituição das restrições (4) por um conjunto equivalente, é possível reduzir a ordem da matriz do problema, gerando um problema significativamente menor. Com este objetivo são propostos a seguir dois modelos reduzidos para o problema.

3.1. Modelo reduzido I

O modelo reduzido I evita a sobreposição das peças considerando simultaneamente todos os pontos de $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ para um determinado ponto d e um par de tipos de peças t e u . Assim, as restrições (4) são substituídas pelo seu somatório em $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$, obtendo as restrições compactas de não sobreposição dadas por:

$$\sum_{e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d} \delta_u^e \leq M(1 - \delta_t^d), \quad \forall t, u \in \mathcal{T}, t \leq u, \forall d \in \mathcal{IFP}_t. \quad (7)$$

Nas restrições (7) quando a peça t não é alocada ao ponto d tem-se que $\delta_t^d = 0$, logo, o valor de M deve ser suficientemente grande para permitir que seja alocado aos pontos pertencentes ao conjunto $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ o número máximo possível de peças do tipo u .

3.2. Modelo reduzido II

O modelo dos pontos reduzido II é baseado no modelo reduzido I, mas evita a sobreposição das peças considerando simultaneamente todos os pontos do $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ de todas

as peças do tipo u tal que $u \geq t$ para um determinado ponto d e um tipo de peça t . Neste caso, as restrições (4) são substituídas pelo seu respectivo somatório em $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ para todos os tipos de peças u tal que $u \geq t$, ou seja:

$$\sum_{\substack{u \in \mathcal{T} \\ u \geq t}} \sum_{e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d} \delta_u^e \leq M(1 - \delta_t^d), \quad \forall t \in \mathcal{T}, \forall d \in \mathcal{IFP}_t. \quad (8)$$

Assim como no modelo reduzido I, o número de restrições é significativamente menor no pior caso $\mathcal{O}(TD)$, porém, mais uma vez, é necessário estimar um valor adequado para M .

3.3. Estimativa para o valor de M

Para estimar o valor de M do modelo reduzido I (restrições (7)), podemos utilizar um limitante trivial, que é o valor da demanda das peças do tipo u , isto é:

$$M_{tu}^d = q_u, \quad \forall t \in \mathcal{T}, \forall d \in \mathcal{IFP}_t. \quad (9)$$

Alternativamente, para determinar o valor de M_{tu}^d podemos resolver um problema de empacotamento bidimensional com apenas peças do tipo u . O objetivo deste problema é maximizar o número de peças do tipo u que podem ser posicionadas sobre os pontos de $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ sem sobreposição. Por exemplo, dados um quadrado (peça do tipo t) e um triângulo (peça do tipo u), a Figura 3 (a) ilustra o número máximo de peças do tipo u que podem ser dispostas nos pontos de $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ sem sobreposição. Analogamente, a Figura 3 (b) representa o número máximo de peças do tipo t que podem ser dispostas em $\mathcal{NFP}_{u,t}^e$.

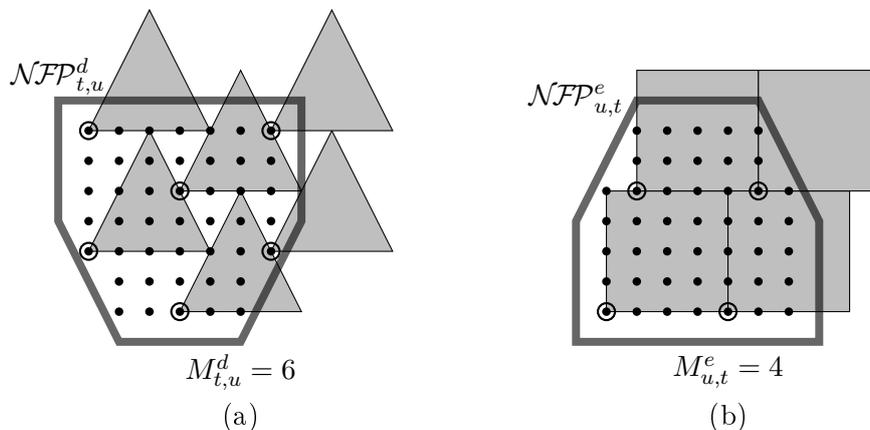


Figura 3: Problemas de empacotamento bidimensionais para um tipo de peça.

Suponha que para todo par de pontos $d \in \mathcal{IFP}_t$ e $e \in \mathcal{IFP}_u$ a seguinte desigualdade seja satisfeita: $M_{u,t}^e \leq M_{t,u}^d$. Como ambos os conjuntos de *nofit polygons* garantem que as peças t e u não se sobreponham, é melhor escolher o conjunto de restrições associado ao $\mathcal{NFP}_{u,t}^e$ (Figura 3), que fornece um limite mais apertado para as restrições (7).

Para determinar o valor de $M_{t,u}^d$, é necessário resolver o seguinte problema:

$$M_{t,u}^d = \max \sum_{e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d} \delta_u^e \quad (10)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d} \delta_u^e \leq q_u, \quad (11)$$

$$\delta_u^e + \delta_u^f \leq 1, \quad \forall e, f \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d, \forall f \in \mathcal{NFP}_{u,u}^e, e < f, \quad (12)$$

$$\delta_u^e \in \{0, 1\}, \quad \forall e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d. \quad (13)$$

A função objetivo (10) maximiza o número de peças empacotadas em $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$. A restrição (11) define um limitante superior baseado na demanda das peças do tipo u . As restrições (12) impedem a sobreposição das peças conforme descrito a seguir. Para cada par de pontos $e, f \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d$ tal que $e < f$, é adicionada uma restrição de não-sobreposição se o ponto f pertencer ao $\mathcal{NFP}_{u,u}^e$. As restrições (13) definem o domínio das variáveis de decisão.

Analogamente, para o modelo reduzido II um valor trivial para M é o somatório do valor das demandas das peças do tipo u tal que $u \geq t$, que é dado por:

$$M_t^d = \sum_{\substack{u \in \mathcal{T} \\ u \geq t}} q_u, \quad \forall d \in IFP_t. \quad (14)$$

No caso do modelo reduzido II, é possível usar um método análogo para estimar o valor de M das restrições (8), conforme é descrito na equação (15).

$$M_t^d = \sum_{\substack{u \in \mathcal{T} \\ u \geq t}} M_{t,u}^d \quad (15)$$

No entanto, o valor obtido pela equação (15) não considera a influência da sobreposição de peças de tipos distintos u e v nos pontos de interseção dos seus conjuntos $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ e $\mathcal{NFP}_{t,v}^d$. Por exemplo, dados um triângulo (tipos de peça t, u) e um quadrado (tipo de peça v), a Figura 4 ilustra a região de sobreposição entre os $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ e $\mathcal{NFP}_{t,v}^d$. Logo, é possível resolver outro problema de empacotamento bidimensional considerando mais de um tipo de peça simultaneamente. Este problema é dado por:

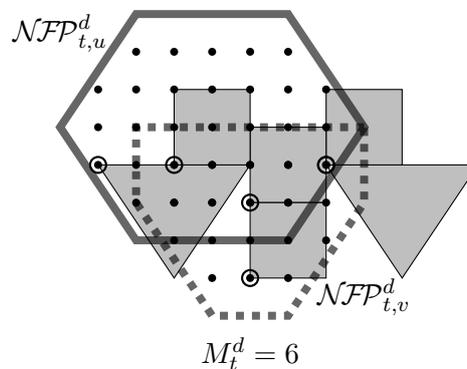


Figura 4: Problema de empacotamento para dois tipos de peça.

$$M_t^d = \max \sum_{\substack{u \in \mathcal{T} \\ u \geq t}} \sum_{e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d} \delta_u^e \quad (16)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d} \delta_u^e \leq q_u, \quad \forall u \in \mathcal{T}, u \geq t, \quad (17)$$

$$\delta_u^e + \delta_v^f \leq 1, \quad \forall u, v \in \mathcal{T}, t \leq u \leq v, \forall e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d, \forall f \in \mathcal{NFP}_{t,v}^d, \quad (18)$$

$$\forall f \in \mathcal{NFP}_{u,v}^e, (u, e) < (v, f),$$

$$\delta_u^e \in \{0, 1\}, \quad \forall u \in \mathcal{T}, u \geq t, \forall e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d, \quad (19)$$

em que $(u, e) < (v, f)$ se $u < v$ ou $(u = v \text{ e } e < f)$.

A função objetivo (16) maximiza o número de peças empacotadas em $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ para qualquer tipo de peça u tal que $u \geq t$. As restrições (17) limitam a quantidade de peças empacotadas de acordo com as demandas de cada tipo de peça. As restrições (18) impedem a sobreposição das peças conforme descrito a seguir. Para cada par de pontos $e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d$ e $f \in \mathcal{NFP}_{t,v}^d$ tal que $(u, e) < (v, f)$, é adicionada uma restrição de não-sobreposição se o ponto $f \in \mathcal{NFP}_{u,v}^e$. As restrições (19) definem o domínio das variáveis de decisão.

Neste trabalho, a estimativa para o valor de M foi feita apenas para um ponto d de uma placa artificial onde todos os pontos dos *nofit polygons* estão inteiramente contidos. É importante destacar que estes valores devem ser determinados em uma etapa de pré-processamento.

4. Experimentos Computacionais

Os experimentos computacionais foram realizados em um computador com processador Intel Core i7-2600 de 3.4 GHz e 16 GB de memória RAM, utilizando o sistema operacional Ubuntu 13.10 64 bits. Os modelos foram escritos na linguagem C++ (Concert) e resolvidos utilizando o *software* de otimização CPLEX versão 12.6. Para avaliar os modelos propostos, foram utilizadas as mesmas instâncias avaliadas em Toledo et al. (2013), ou seja, os grupos de instâncias RCO (Ribeiro et al., 1999), BLAZEWICZ (Błażewicz et al., 1993) e SHAPES (Oliveira e Ferreira, 1993). O tempo limite de execução foi de 1800 segundos e a discretização da malha utilizada foi $g_x = g_y = 1$. A Tabela 1 apresenta a demanda total de cada tipo de peça e a largura e o comprimento inicial da placa de cada instância.

O limitante inferior \underline{z} é dado pelo máximo entre o maior comprimento das peças e o somatório da área de todas as peças dividido pela largura da placa, isto é:

$$\underline{z} = \max \left(\max_{t \in \mathcal{T}} (\ell_t), \frac{1}{W} \sum_{t \in \mathcal{T}} q_t A_t \right), \quad (20)$$

em que ℓ_t e A_t são, respectivamente, a largura e área de uma peça do tipo t .

Inicialmente, na etapa de pré-processamento dos modelos reduzidos I e II, foram resolvidos os problemas de empacotamento bidimensionais com uma única peça e com pares de peças, respectivamente. O tempo total para resolver os problemas foi inferior a 20 segundos para qualquer uma das instâncias.

A Tabela 2 apresenta os resultados computacionais obtidos para os modelos propostos considerando duas estimativas para o valor de M (limitante trivial e problema de empacotamento bidimensional). A primeira coluna da tabela apresenta o nome da instância

Tabela 1: Características das instâncias.

Instância	Número de peças por tipo							Total de peças	Largura da placa	Comprimento da placa
	1	2	3	4	5	6	7			
RCO1	1	1	1	1	1	1	1	7	15	8
RCO2	2	2	2	2	2	2	2	14	15	16
RCO3	3	3	3	3	3	3	3	21	15	24
RCO4	4	4	4	4	4	4	4	28	15	32
RCO5	5	5	5	5	5	5	5	35	15	40
BLAZEWICZ1	1	1	1	1	1	1	1	7	15	8
BLAZEWICZ2	2	2	2	2	2	2	2	14	15	16
BLAZEWICZ3	3	3	3	3	3	3	3	21	15	24
BLAZEWICZ4	4	4	4	4	4	4	4	28	15	32
BLAZEWICZ5	5	5	5	5	5	5	5	35	15	40
SHAPES2	2	2	2	2				8	40	14
SHAPES4	4	4	4	4				16	40	28
SHAPES5	5	5	5	5				20	40	35
SHAPES7	7	7	7	7				28	40	49
SHAPES9	9	7	9	9				34	40	63
SHAPES15	15	7	9	12				43	40	74

avaliada. Da segunda à quarta coluna são reportados para o modelo reduzido I (limitante trivial), respectivamente, o valor da melhor solução obtida (z), o desvio máximo para a solução ótima ($GAP = 100(z - \underline{z})/z$) e o tempo para obter esta solução. As colunas seguintes (quinta à décima terceira) seguem o mesmo padrão. As duas últimas colunas descrevem, respectivamente, média e o desvio padrão dos valores da função objetivo para cada instância.

Os modelos reduzidos apresentaram resultados semelhantes para a maioria das instâncias, tanto em tempo computacional quanto em qualidade da solução, conforme é destacado pelos valores da média e do desvio padrão da função objetivo. Para cada grupo de instâncias, os melhores valores das funções objetivo foram obtidos a partir de modelos distintos: SHAPES, reduzido I (limitante trivial); RCO, reduzido I (problema de empacotamento); e BLAZEWICZ, reduzido II (problema de empacotamento). Observe que a estimativa para o valor de M pode tanto melhorar quanto piorar o desempenho dos modelos propostos, devido às diversas características do *software* CPLEX, dentre os quais destacam-se: tempo de resolução e qualidade da relaxação linear, tempo e qualidade do preprocessamento, geração de planos de cortes, eficiência das heurísticas e quantidade de nós explorados. Neste sentido, a estimativa obtida pelo limitante trivial apresentou melhores resultados que o problema de empacotamento bidimensional para três instâncias para o modelo reduzido I (SHAPES5-9) e II (SHAPES7-9 e RCO4). Por outro lado, a mesma estimativa apresentou piores resultados para três instâncias para o modelo reduzido I (RCO4 e BLAZEWICZ4-5) e II (BLAZEWICZ2 e SHAPES7-9).

Para a instância SHAPES9, os modelos reduzidos (limitante trivial) encontraram soluções melhores que as apresentadas pelo modelo dos pontos em Toledo et al. (2013). Estas soluções utilizam uma placa de comprimento 53 (Figura 5), enquanto que em Toledo et al. (2013) foi obtida uma solução cujo valor da função objetivo é 54, com limite de tempo de execução de cinco horas.

Tabela 2: Avaliação dos modelos propostos.

	Modelo reduzido I						Modelo reduzido II						μ_z	σ_z
	Limitante trivial			Problema de empacotamento			Limitante trivial			Problema de empacotamento				
	z	$GAP(\%)$	Tempo(s)	z	$GAP(\%)$	Tempo(s)	z	$GAP(\%)$	Tempo(s)	z	$GAP(\%)$	Tempo(s)		
RCO1	8	0.00	0.35	8	0.00	0.35	8	0.00	0.89	8	0.00	0.89	8.00	0.00
RCO2	15	16.00	TL	15	16.00	TL	15	16.00	TL	15	16.00	TL	15.00	0.00
RCO3	23	17.83	TL	23	17.83	TL	23	17.83	TL	23	17.83	TL	23.00	0.00
RCO4	32	21.25	ML	30	16.00	TL	30	16.00	TL	31	18.71	TL	30.75	0.96
RCO5	38	17.11	TL	38	17.11	TL	39	19.23	TL	39	19.23	TL	38.50	0.58
BLAZEWCZ1	8	0.00	0.36	8	0.00	0.36	8	0.00	0.88	8	0.00	0.88	8.00	0.00
BLAZEWCZ2	15	28.00	TL	15	28.00	TL	15	28.00	TL	14	22.86	TL	14.75	0.50
BLAZEWCZ3	22	26.36	TL	22	26.36	TL	22	26.36	TL	22	26.36	TL	22.00	0.00
BLAZEWCZ4	30	28.00	TL	29	25.52	TL	29	25.52	TL	29	25.52	TL	28.75	0.50
BLAZEWCZ5	37	27.03	TL	36	25.00	TL	36	25.00	TL	36	25.00	TL	36.25	0.50
SHAPES2	14	0.00	0.42	14	0.00	0.42	14	0.00	0.17	14	0.00	0.17	14.00	0.00
SHAPES4	26	38.46	TL	26	38.46	TL	27	40.74	TL	27	40.74	TL	26.50	0.58
SHAPES5	33	39.39	TL	35	42.86	TL	34	41.18	TL	34	41.18	TL	34.00	0.82
SHAPES7	45	37.78	TL	48	41.67	TL	45	37.78	TL	47	40.43	TL	46.25	1.50
SHAPES9	53	38.87	TL	59	45.08	TL	53	38.87	TL	59	45.08	TL	56.00	3.46
SHAPES15	-	-	TL	-	-	TL	-	-	TL	-	-	TL	-	-

ML - limite de memória excedido.

TL - limite de tempo excedido.

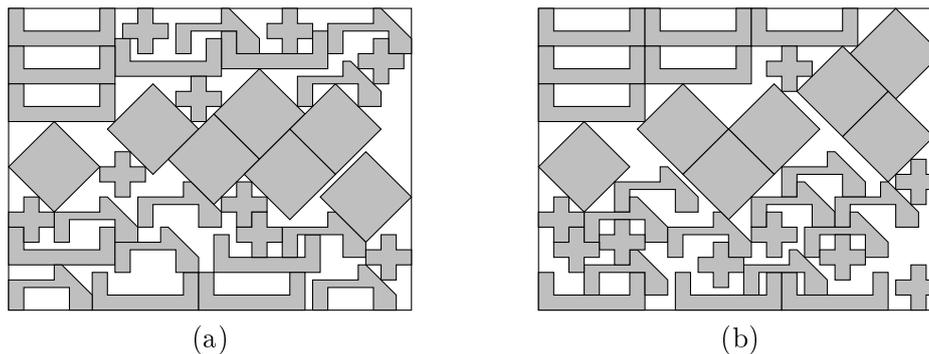


Figura 5: Soluções obtidas pelos modelos propostos para a instância SHAPES9. (a) Modelo reduzido I. (b) Modelo reduzido II.

A seguir são comparados o modelo dos pontos e o modelo reduzido I utilizando o limitante trivial para o valor de M (Tabela 3), uma vez que este apresentou, de forma geral, os melhores resultados entre os modelos reduzidos. O modelo dos pontos obteve melhor desempenho para oito instâncias (RCO2-4 e BLAZEWICZ2-4) e o modelo reduzido I para sete (RCO1, BLAZEWICZ1 e SHAPES2-9). No entanto, o modelo reduzido I provou otimalidade apenas para três instâncias em que o número de repetições de cada peça é pequeno (RCO1, BLAZEWICZ1 e SHAPES2) enquanto que o modelo dos pontos conseguiu provar para sete (RCO1-3, BLAZEWICZ1-3 e SHAPES2).

Tabela 3: Comparação entre o modelo dos pontos e o modelo reduzido I.

Instância	Modelo dos pontos			Modelo reduzido I		
	z	$GAP(\%)$	Tempo(s)	z	$GAP(\%)$	Tempo(s)
RCO1	8	0.00	0.83	8	0.00	0.35
RCO2	15	0.00	2.80	15	16.00	TL
RCO3	22	0.00	154.39	23	17.83	TL
RCO4	29	3.45	TL	32	21.25	ML
RCO5	36	11.79	TL	38	17.11	TL
BLAZEWICZ1	8	0.00	0.80	8	0.00	0.36
BLAZEWICZ2	14	0.00	15.65	15	28.00	TL
BLAZEWICZ3	20	0.00	1321.01	22	26.36	TL
BLAZEWICZ4	28	22.61	TL	30	28.00	TL
BLAZEWICZ5	35	20.00	TL	37	27.03	TL
SHAPES2	14	0.00	1.00	14	0.00	0.42
SHAPES4	27	37.04	TL	26	38.46	TL
SHAPES5	35	42.86	TL	33	39.39	TL
SHAPES7	49	42.86	TL	45	37.78	TL
SHAPES9	63	48.57	TL	53	38.87	TL
SHAPES15	-	-	TL	-	-	TL

ML - limite de memória excedido.

TL - limite de tempo excedido.

5. Considerações finais e trabalhos futuros

Neste trabalho foram propostos dois modelos reduzidos para o problema de corte de peças irregulares. Estes modelos apresentaram um desempenho melhor que o modelo dos pontos para instâncias com poucas repetições de peças, uma vez que provaram a otimalidade em menor tempo computacional. Além disso, os modelos propostos conseguiram encontrar

soluções cujo comprimento utilizado da placa é menor que o do modelo dos pontos para algumas instâncias, o que demonstra a sua relevância para a literatura. Como proposta de trabalho futuro, é sugerido o desenvolvimento de um método do tipo *branch-and-cut* no qual os cortes serão baseados nas restrições de não-sobreposição das peças. Nesta abordagem, a ideia central é resolver o problema com as restrições compactas (7) e (8) e adicionar sistematicamente desigualdades válidas baseadas nas restrições de não-sobreposição (4), de acordo com os valores das variáveis binárias.

Agradecimentos

Este trabalho teve o apoio financeiro da FAPESP (2013/14147-3, 2012/21176-7 e 2010/10133-0) e do CNPq. (131992/2013-9 e 300713/2010-0).

Referências

- Alvarez-Valdes, R., Martinez, A. e Tamarit, J.** (2013). A branch & bound algorithm for cutting and packing irregularly shaped pieces. *International Journal of Production Economics*, 145(2), 463 – 477.
- Babu, A. R. e Babu, N. R.** (2001). A generic approach for nesting of 2-d parts in 2-d sheets using genetic and heuristic algorithms. *Computer-Aided Design*, 33(12), 879 – 891.
- Bennell, J. A. e Dowsland, K. A.** (2001). Hybridising tabu search with optimisation techniques for irregular stock cutting. *Management Science*, 47(8), 1160–1172.
- Bennell, J. A. e Song, X.** (2010). A beam search implementation for the irregular shape packing problem. *Journal of Heuristics*, 16(2), 167–188.
- Błażewicz, J., Hawryluk, P. e Walkowiak, R.** (1993). Using a tabu search approach for solving the two-dimensional irregular cutting problem. *Annals of Operations Research*, 41(4), 313–325.
- Burke, E., Hellier, R., Kendall, G. e Whitwell, G.** (2006). A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem. *Operations Research*, 54(3), 587–601.
- Burke, E. K., Hellier, R. S. R., Kendall, G. e Whitwell, G.** (2010). Irregular packing using the line and arc no-fit polygon. *Operations Research*, 58(4-part-1), 948–970.
- Carravilla, M. A., Ribeiro, C. e Oliveira, J. F.** (2003). Solving nesting problems with non-convex polygons by constraint logic programming. *International Transactions in Operational Research*, 10(6), 651–663.
- Dowsland, K. A., Vaid, S. e Dowsland, W. B.** (2002). An algorithm for polygon placement using a bottom-left strategy. *European Journal of Operational Research*, 141(2), 371 – 381.
- Egeblad, J., Nielsen, B. K. e Odgaard, A.** (2007). Fast neighborhood search for two- and three-dimensional nesting problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3), 1249 – 1266.
- Elkeran, A.** (2013). A new approach for sheet nesting problem using guided cuckoo search and pairwise clustering. *European Journal of Operational Research*, 231(3), 757 – 769.
- Fischetti, M. e Luzzi, I.** (2009). Mixed-integer programming models for nesting problems. *Journal of Heuristics*, 15(3), 201–226.
- Gomes, A. M. e Oliveira, J. F.** (2002). A 2-exchange heuristic for nesting problems. *European Journal of Operational Research*, 141(2), 359 – 370.
- Gomes, A. M. e Oliveira, J. F.** (2006). Solving irregular strip packing problems by

hybridising simulated annealing and linear programming. *European Journal of Operational Research*, 171(3), 811 – 829.

Imamichi, T., Yagiura, M. e Nagamochi, H. (2009). An iterated local search algorithm based on nonlinear programming for the irregular strip packing problem. *Discrete Optimization*, 6(4), 345 – 361.

Leung, S. C., Lin, Y. e Zhang, D. (2012). Extended local search algorithm based on nonlinear programming for two-dimensional irregular strip packing problem. *Computers & Operations Research*, 39(3), 678 – 686.

Oliveira, J. F., Gomes, A. M. e Ferreira, J. S. (2000). Topos - a new constructive algorithm for nesting problems. *OR-Spektrum*, 22(2), 263–284.

Oliveira, J. e Ferreira, J. (1993). Algorithms for nesting problems. In Vidal, R., editor, *Applied Simulated Annealing*, volume 396 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, pages 255–273. Springer Berlin Heidelberg.

Ribeiro, C., Carravilla, M. A. e Oliveira, J. F. (1999). Applying constraint logic programming to the resolution of nesting problems. *Pesquisa Operacional*, 19(2), 239–247.

Sato, A. K., Martins, T. C. e Tsuzuki, M. S. G. (2012). An algorithm for the strip packing problem using collision free region and exact fitting placement. *Computer-Aided Design*, 44(8), 766 – 777.

Takahara, S., Kusumoto, Y. e Miyamoto, S. (2003). Solution for textile nesting problems using adaptive meta-heuristics and grouping. *Soft Computing*, 7(3), 154–159.

Toledo, F. M., Carravilla, M. A., Ribeiro, C., Oliveira, J. F. e Gomes, A. M. (2013). The dotted-board model: A new MIP model for nesting irregular shapes. *International Journal of Production Economics*, 145(2), 478 – 487.

Umetani, S., Yagiura, M., Imahori, S., Imamichi, T., Nonobe, K. e Ibaraki, T. (2009). Solving the irregular strip packing problem via guided local search for overlap minimization. *International Transactions in Operational Research*, 16(6), 661–683.

Wäscher, G., Haufner, H. e Schumann, H. (2007). An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3), 1109 – 1130.