

## $M_{3 \times 3}$ -OBSTRUÇÃO MINIMAL DE COGRAFOS

**Raquel Bravo**

Universidade Federal Fluminense - UFF  
Niterói - RJ  
rsfbravo@ig.com.br

**Loana Nogueira**

Universidade Federal Fluminense - UFF  
Niterói - RJ  
loana@ic.uff.br

**Fábio Protti**

Universidade Federal Fluminense - UFF  
Niterói - RJ  
fabio@ic.uff.br

**Clautenis Viana**

Instituto Federal do Piauí - IFPI  
Teresina - PI  
clau.nivica@gmail.com

### RESUMO

Caracterizamos os cografos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em  $k$  conjuntos independentes e  $\ell$  cliques, e consideramos todas as possíveis restrições externas entre as partes para quaisquer duas partes distintas  $i$  e  $j$ . Consideramos se  $i$  e  $j$  são completamente adjacentes, completamente não adjacentes ou sem restrições. Para tais restrições, utilizamos uma matriz quadrada  $M$  de ordem  $k + \ell$  onde um elemento  $m_{i,i}$  na diagonal principal representa a restrição interna na parte  $i$ , ou seja, representa se  $i$  é um conjunto independente ou uma clique, enquanto que um elemento  $m_{i,j}$  fora da diagonal principal representa a restrição externa entre as partes  $i$  e  $j$ . Um grafo  $G$  é  $M$ -particionável quando admite uma partição dos vértices de forma a respeitar as restrições impostas entre as partes (representadas na matriz). Uma  $M$ -obstrução minimal de um grafo  $G$  é um subgrafo induzido de  $G$  que não é  $M$ -particionável e, para qualquer vértice  $v$  de  $G$ ,  $G - v$  é  $M$ -particionável. Determinamos as  $M$ -obstruções minimais dos cografos quando  $M$  é uma matriz de ordem no máximo 3.

**PALAVRAS CHAVE:** Cografos,  $M$ -partição,  $M$ -obstrução minimal.

**Área principal:** Teoria dos Grafos

### ABSTRACT

We characterize cographs whose set of vertices can be partitioned into  $k$  independent sets and  $\ell$  cliques, and consider all possible restrictions between the parts (external restrictions), that is, for any two distinct parts  $i$  and  $j$ ,  $i$  and  $j$  can be completely adjacent, completely non-adjacent, or with no restrictions. For such restrictions, we use a symmetric matrix  $M$  of order  $k + \ell$  where an element  $m_{i,i}$  in the main diagonal represents an internal restriction, while an element  $m_{i,j}$ , for  $i \neq j$ , represents an external restriction between parts  $i$  and  $j$ . We say that a graph  $G$  is  $M$ -partitionable if its set of vertices can be partitioned according to the restrictions imposed by matrix  $M$ . An minimal  $M$ -obstruction of a graph  $G$  is an induced subgraph of  $G$  which does not admit an  $M$ -partition and, for every vertex  $v$  of  $G$ ,  $G - v$  is  $M$ -partitionable. We determine all minimal  $M$ -obstruction cographs when restricted to matrices  $M$  of size at most 3.

**KEYWORDS:** Cographs,  $M$ -partition, minimal  $M$ -obstruction.

**Main area:** Graph Theory

## 1. Introdução

A teoria dos grafos tem aplicabilidades em diversas áreas (Matemática, Informática, Engenharia, Biologia, Indústria, dentre outras), pois um grafo constitui o modelo matemático ideal para o estudo das relações entre objetos discretos de qualquer tipo. Em particular, grafos têm sido úteis na definição e/ou resolução de problemas da vida real que vão desde problemas de localização, traçados de rotas, projetos de informática, até o seu uso em ciências sociais. Sua importância cresceu muito no século XX, com o surgimento das redes de energia elétrica e de telecomunicação, dos circuitos digitais e, por fim, dos computadores.

Em Ciência da Computação, grafos podem ser usados como tipos abstratos de dados, em planejamento eficiente para determinar as rotas de transmissão de pacotes na internet, organização de dados, inteligência artificial e produção de algoritmos para solução de problemas levando em consideração a execução em tempo razoável. É possível obter resultados importantes, pois existem vários problemas computacionais que empregam grafos com sucesso. No entanto, para muitos problemas em grafos não são conhecidos algoritmos eficientes para sua solução.

Uma das principais motivações do estudo de classes de grafos é o fato de que diversos problemas, que são difíceis para grafos em geral, tornam-se tratáveis quando restritos a classes especiais de grafos. Assim, busca-se delimitar a partir de que ponto um determinado problema pode ser resolvido de forma eficiente. Particularmente, o problema de particionamento em grafos tem sido objeto de estudo, despertando muito interesse devido às pesquisas de grafos perfeitos [Golubic (1980)] e também pela procura de algoritmos eficientes para o reconhecimento de determinadas classes de grafos. São exemplos de algumas aplicações que podem ser resolvidas através de problemas de particionamento: segmentação de imagens, encontrar subconjuntos de páginas da Web que estão relacionadas entre si, o problema da  $k$ -coloração (de grande importância na teoria dos grafos) com aplicações em questões práticas como escalonamento de tarefas e alocação de frequências. Outro problema também conhecido de particionamento de grafos é verificar se um dado grafo  $G$  é split, ou equivalentemente, verificar se o conjunto dos vértices de  $G$  pode ser particionado em dois subconjuntos, dos quais um é independente e o outro é uma clique. Provou-se que o reconhecimento de grafos split pode ser realizado em tempo linear [Golubic (1980)].

Formalmente, muitos desses problemas (de partição de grafos) podem ser descritos como tendo por objetivo particionar o conjunto dos vértices de um grafo em subconjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_k$  onde  $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V$  e  $V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j, 1 \leq i \leq k$  e  $1 \leq j \leq k$ , exigindo-se, porém, algumas propriedades sobre estes subconjuntos de vértices. Estas propriedades podem ser *internas*, como por exemplo exigir que os vértices de cada subconjunto  $V_i$  sejam completamente adjacentes (isto é,  $V_i$  é uma clique) ou completamente não-adjacentes (isto é,  $V_i$  é um conjunto independente), ou *externas*, onde as exigências são feitas sobre os pares  $(V_i, V_j)$ , isto é,  $V_i$  e  $V_j$  podem ser completamente adjacentes ou completamente não-adjacentes entre si. Como exemplo, citamos um dos problemas mais famosos que se insere neste contexto, o problema da  $k$ -coloração, onde deseja-se verificar se os vértices de um grafo podem ser particionados em  $k$  conjuntos independentes  $V_1, \dots, V_k$  (sem restrições externas). Sabe-se que esse problema é polinomial para  $k \leq 2$  e  $NP$ -Completo para  $k \geq 3$  [Brandstädt (1996)].

Brandstädt propôs uma generalização dos grafos split, que definiu uma nova classe de grafos, a classe dos *grafos*-( $k, \ell$ ), a qual também chamamos de grafos split generalizados, como sendo aquela formada pelos grafos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em  $k$  conjuntos independentes e  $\ell$  cliques. Brandstädt (1996, 1998) considerou em particular as classes de grafos-(2, 1), grafos-(1, 2) e grafos-(2, 2), apresentando algoritmos polinomiais para reconhecê-las. Feder *et al.* (1999) também apresentaram algoritmos polinomiais para o reconhecimento destas classes que surgiram como sub-produto de algoritmos de partição em subgrafos densos e esparsos. Por outro lado, sabe-se que reconhecer grafos-( $k, \ell$ ) para  $k \geq 3$

ou  $\ell \geq 3$  é *NP*-Completo [Brandsstädt (1996)]. Como por exemplo, podemos considerar a classe dos grafos- $(k, 0)$ , que corresponde ao problema de reconhecer se um dado grafo é  $k$ -colorível (seu reconhecimento é *NP*-Completo para  $k \geq 3$ ).

Como o reconhecimento desta classe é *NP*-completo, para  $k \geq 3$  ou  $\ell \geq 3$ , alguns autores estudaram o problema quando restrito à subclasses de grafos. Hell, Klein, Nogueira e Protti (2004) apresentaram uma caracterização e um algoritmo de reconhecimento com complexidade  $O(n(n + m))$  para os grafos cordais- $(k, \ell)$ .

Outra forma conveniente de representar o particionamento em grafos é através da *M-partição*. O problema da *M-partição* foi definido por Feder *et. al* (1999), que generaliza o problema de grafos- $(k, \ell)$ , consistindo em particionar o conjunto de vértices de um dado grafo em  $m$  partes  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , com certas restrições para cada  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Os vértices em  $A_i$  devem ser completamente adjacentes ou completamente não-adjacentes (restrições internas) ou para cada par  $A_i, A_j$ , os vértices em  $A_i$  e  $A_j$  são completamente adjacentes ou não-adjacentes entre si (restrições externas). Feder, Hell e Hochstättler (2006) mostraram que todos os problemas de *M-partição* quando restritos à classe dos cografos admitem algoritmos polinomiais e caracterizações por subgrafos induzidos proibidos, mesmo para a versão com listas. Em particular, eles limitam o tamanho da maior estrutura proibida minimal para os cografos- $(k, \ell)$ . Mais especificamente, Bravo, Klein, Nogueira e Protti (2011) mostraram as estruturas proibidas minimais para tal classe. Feder, Hell e Hochstättler (2006) apresentaram um estudo ainda mais geral sobre problemas de partição (*M-partição*) quando restritos à classe dos grafos perfeitos.

Com a finalidade de expressar essas restrições de forma mais detalhada, Feder *et. al.* (1999) definiram uma matriz simétrica  $M$  de ordem  $m \times m$  em que cada elemento  $M_{i,i}$  representa a restrição interna no conjunto  $A_i$ , e cada elemento fora da diagonal principal  $M_{i,j}$ ,  $i \neq j$ , representa uma restrição externa entre os subconjuntos  $A_i$  e  $A_j$ . Mais especificamente, seja uma matriz simétrica, onde as entradas  $M_{i,j}$  podem ser igual a 0, 1 ou \*. Assim, temos que  $A_i$  é um conjunto independente, se  $M_{i,i} = 0$ , uma clique, se  $M_{i,i} = 1$ , ou sem nenhuma restrição interna, se  $M_{i,i} = *$ . Por outro lado, as entradas fora da diagonal principal,  $A_i$  e  $A_j$  são completamente não-adjacentes, se  $M_{i,j} = 0$ , completamente adjacentes, se  $M_{i,j} = 1$ , ou sem restrição externa, se  $M_{i,j} = *$ . Dizemos que um grafo  $G$  é *M-particionável* (ou que  $G$  admite uma *M-partição*) quando admite uma partição dos vértices de forma a respeitar as restrições impostas entre as partes (representadas na matriz). Uma *M-obstrução* de um grafo  $G$  é um subgrafo induzido de  $G$  que não é *M-particionável*. Em particular, uma *M-obstrução*  $H$  é minimal quando para qualquer vértice  $v$  de  $H$ ,  $H - v$  é *M-particionável*.

Neste trabalho, consideramos a classe dos cografos, classe esta conhecida por não conter  $P_4$  como subgrafo induzido. Essa classe está contida na classe dos grafos perfeitos, o que a torna uma classe interessante para estudo. Mais especificamente, caracterizamos os cografos *M-particionáveis* em termos de obstruções e determinamos todas as *M-obstruções* minimais dos cografos quando  $M$  é uma matriz de ordem igual a três.

## 2. Preliminares

Dado um grafo simples  $G = (V, E)$ , denotamos por  $\bar{G}$  o complemento de  $G$ . Para  $V' \subseteq V$ , denotamos por  $G[V']$  o subgrafo de  $G$  induzido por  $V'$ . Uma *clique* (*conjunto independente*) é um subconjunto de vértices que induz um subgrafo completo (sem arestas), não necessariamente maximal e denotada por  $K_p$  ( $I_p$ ) uma clique (*conjunto independente*) de  $p$  vértices.  $G$  é um *grafo- $(k, \ell)$*  se  $V$  pode ser particionado em  $k$  conjuntos independentes e  $\ell$  cliques.

Dados dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$ , o grafo  $G_1 \cup G_2$  (chamado de *união* de  $G_1$  e  $G_2$ ) é um grafo com o conjunto de vértices  $V_1 \cup V_2$  e conjunto de arestas  $E_1 \cup E_2$ , e o grafo  $G_1 + G_2$  (chamado de *junção* de  $G_1$  e  $G_2$ ) é o grafo com o conjunto de vértices  $V_1 \cup V_2$  e o conjunto de arestas  $E_1 \cup E_2 \cup \{(x, y) \mid x \in V_1, y \in V_2\}$ .

**Definição 1:** [Corneil *et al* (1981), Lerchs (1971), Spinrad *et al* (1999)] Um *cografo* é definido recursivamente, da seguinte forma:

- (i)  $K_1$  é um cografo;
- (ii) Se  $G$  é um cografo então  $\overline{G}$  também é um cografo;
- (iii) Se  $G$  e  $H$  são cografos, então  $G \cup H$  também é um cografo.

Um *caminho* num grafo  $G$  é um passeio  $P = v_1, v_2, \dots, v_k$ , onde os  $v_i$ 's são vértices (dois a dois distintos), e  $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ . Uma *corda* em  $P$  é uma aresta que liga dois vértices não-consecutivos de  $P$ . Um *caminho induzido* é um caminho sem cordas, e denotado por  $P_k$  o caminho induzido com  $k$  vértices. Dizemos que um grafo é *livre de  $P_k$*  quando não contém  $P_k$  como subgrafo induzido. Um *cografo*  $G$  é um grafo livre de  $P_4$ , isto é,  $G$  não contém  $P_4$  como subgrafo induzido. A classe dos cografos possui muitas propriedades estruturais interessantes, e uma delas é a auto-complementariedade, isto é,  $G$  é um cografo se e somente se  $\overline{G}$  é um cografo (condição (ii) da definição acima). Desta forma, podemos afirmar que  $G$  é um cografo- $(k, \ell)$  se e somente se  $\overline{G}$  é um cografo- $(\ell, k)$ .

O teorema que enunciaremos a seguir nos fornece uma informação importante sobre a estrutura dos cografos:

**Teorema 2:** [Jamison e Olariu (1995)] Para um cografo  $G$ , exatamente uma das seguintes condições é satisfeita:

- (i)  $G$  é desconexo;
- (ii)  $\overline{G}$  é desconexo.

### 3. Resultado Principal

Nesta seção consideramos o problema da  $M$ -partição para matrizes quadradas  $M$  de ordem  $m \leq 3$  e apresentamos uma caracterização dos cografos  $M$ -particionáveis em termos de  $M$ -obstruções, i.e., dado um cografo  $G$  e uma matriz simétrica  $M$  de ordem no máximo três, nosso resultado exprime quando um cografo  $G$  admite uma  $M$ -partição.

É fácil ver que para  $m = 1$  o problema é trivial, já que corresponde a verificar se  $G$  é uma clique ou um conjunto independente. Sendo assim, no que segue, consideramos os casos  $m = 2$  e  $m = 3$ .

Usaremos a notação  $(k, \ell)\{a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^{k+\ell}, \dots, a_i^{i+1}, \dots, a_i^{k+\ell}\}$ ,  $i = 1, \dots, k + \ell - 1$  para representar uma partição em  $k$  conjuntos independentes  $X_1, X_2, \dots, X_k$  e  $\ell$  cliques  $X_{k+1}, \dots, X_{k+\ell}$ , onde cada  $a_i^j$  representa a restrição externa entre os conjuntos  $X_i$  e  $X_j$ . Observe que um grafo- $(k, \ell)\{a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^{k+\ell}, \dots, a_i^{i+1}, \dots, a_i^{k+\ell}\}$  representa um grafo que admite uma  $M$ -partição onde  $M$  é uma matriz com  $k$  elementos nulos na diagonal principal,  $\ell$  1's na diagonal principal, com qualquer elemento fora da diagonal principal podendo pertencer ao conjunto  $\{0, 1, *\}$ . Na Figura 1 apresentamos um exemplo de partição em três subconjuntos  $A_1, A_2, A_3$ , seguido de sua matriz  $M$ . A Figura 1 ilustra uma representação simbólica de uma  $M$ -partição geral. O círculo vazio representa um conjunto estável (0 na diagonal principal de  $M$ ), um círculo cruzado representa uma clique (1 na diagonal principal de  $M$ ). Similarmente, considerando as restrições externas, os dois subconjuntos  $A_1, A_2$  estão ligados por uma linha e são sem restrição externa (\* fora da diagonal principal de  $M$ ); os subconjuntos  $A_1, A_3$  estão unidos por uma linha dupla, isto é, representa que os subconjuntos são completamente adjacentes (1 fora da diagonal principal de  $M$ ); os subconjuntos  $A_2, A_3$  estão unidos por uma linha pontilhada, representando que são completamente não-adjacentes (0 fora da diagonal principal de  $M$ ).

#### 3.1. $M_{2X_2}$ -obstruções

Nesta seção, uma caracterização de cografos  $(k, \ell)$  por subgrafos proibidos é apresentada. Tal caracterização é obtida a partir da verificação se um dado cografo  $G$  pode ser particionado em  $k$  conjuntos independentes e  $\ell$  cliques com base nas matrizes de ordem  $2 \times 2$ .

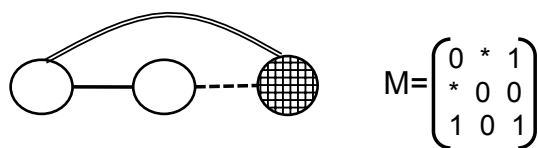


Figura 1: Grafo  $(2, 1)^{*,1,0}$

Na Figura 2 são listadas todas as matrizes de ordem  $2 \times 2$  que serão aqui consideradas.

<p>Caso <math>(2,0)^0</math></p> <p><math>M = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math></p>	<p>Caso <math>(1,1)^0</math></p> <p><math>M = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p>	<p>Caso <math>(0,2)^0</math></p> <p><math>M = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p>
<p>Caso <math>(2,0)^*</math></p> <p><math>M = \begin{pmatrix} 0 &amp; * \\ * &amp; 0 \end{pmatrix}</math></p>	<p>Caso <math>(1,1)^*</math></p> <p><math>M = \begin{pmatrix} 0 &amp; * \\ * &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p>	<p>Caso <math>(0,2)^*</math></p> <p><math>M = \begin{pmatrix} 1 &amp; * \\ * &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p>
<p>Caso <math>(2,0)^1</math></p> <p><math>M = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 \\ 1 &amp; 0 \end{pmatrix}</math></p>	<p>Caso <math>(1,1)^1</math></p> <p><math>M = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p>	<p>Caso <math>(0,2)^1</math></p> <p><math>M = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p>

Figura 2: Matrizes de ordem  $2 \times 2$

Observe que o caso  $(0, 2)^1$  e caso  $(2, 0)^0$  correspondem respectivamente aos casos triviais de se verificar se um dado grafo é completo ou um conjunto independente (i. e, um grafo sem arestas). Note também que o caso de se verificar se um grafo  $G$  é  $(2, 0)^*$  é equivalente a verificar se o grafo  $\bar{G}$  é  $(0, 2)^*$ , e isso deve-se pela propriedade de complementariedade. Da mesma forma, verificar se um grafo é  $(1, 1)^1$ , equivale a verificar se o grafo  $\bar{G}$  é  $(1, 1)^0$ . Portanto, apenas os casos  $(2, 0)^*$ ,  $(2, 0)^1$ ,  $(1, 1)^*$  e  $(1, 1)^1$  são interessantes para análise, uma vez que os demais casos são facilmente resolvidos através dos seus complementos. Analisaremos apenas o caso  $(2, 0)^1$ , e os demais casos são analisados utilizando a mesma ideia da prova. Na Figura 4 encontramos as respectivas obstruções minimais para cada caso.

**Teorema 3:** Seja  $G$  um cografo.  $G$  é um grafo  $(2, 0)^1$  se e somente se  $G$  não contém nenhum dos grafos da Figura 3 como subgrafo induzido.

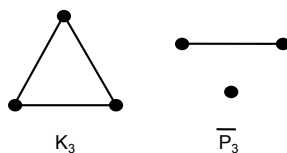


Figura 3: Obstruções minimais do caso  $(2, 0)^1$

**Demonstração ( $\Rightarrow$ )** Podemos verificar facilmente que se  $G$  contém qualquer um dos subgrafos acima, então  $G$  não é um cografo  $(2, 0)^1$ . Pode-se também verificar que cada grafo da Figura 3 é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o  $(2, 0)^1$ .

**( $\Leftarrow$ )** Seja  $G$  um cografo minimal que não é  $(2, 0)^1$ , ou seja, para todo vértice  $v \in V(G)$ ,  $G - v$  é um grafo  $(2, 0)^1$ . Suponha, por contradição que  $G$  não contém nenhum dos subgrafos da Figura 3 como subgrafo induzido. Como  $G$  é cografo, temos que  $G$  ou  $\bar{G}$  é desconexo. No que segue, analisemos os dois casos:

<p>Caso <math>(2,0)^*</math></p> <p><math>K_3</math></p>	<p>Caso <math>(2,0)^1</math></p> <p><math>K_3</math>   <math>\overline{P_3}</math></p>	<p>Caso <math>(1,1)^*</math></p> <p><math>C_4</math>   <math>2K_2</math></p>	<p>Caso <math>(1,1)^1</math></p> <p><math>C_4</math>   <math>\overline{P_3}</math></p>
<p>Caso <math>(0,2)^*</math></p> <p><math>I_3</math></p>	<p>Caso <math>(0,2)^0</math></p> <p><math>I_3</math>   <math>P_3</math></p>	<p>Caso <math>(1,1)^0</math></p> <p><math>P_3</math>   <math>2K_2</math></p>	

Figura 4: Obstruções minimais de todos os casos da matriz de ordem 2

(i)  $G$  é desconexo. Seja  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é conexo. Se todos  $G_i$  forem triviais, então  $G$  é  $(2,0)^1$ , o que seria um absurdo. Logo, deve existir algum  $G_i$  tal que  $|G_i| > 1$ . Neste caso,  $G$  contém  $\overline{P_3}$ . Absurdo.

(ii)  $\overline{G}$  é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular,  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é trivial ou desconexo. Assim, analisaremos dois casos:

(ii.1)  $k \geq 3$ : temos que cada  $G_i$  possui pelo menos um vértice, e desta forma,  $G$  contém um  $K_3$ .

(ii.2)  $k = 2$ : se todos os  $G_i$ 's forem tais que  $V(G_i)$  são conjuntos independentes, então  $G$  é  $(2,0)^1$ , o que seria uma contradição. Portanto, existe algum  $G_i$  que contém um par de vértices adjacentes, e como cada  $G_i$  é desconexo temos que  $G_i$  contém  $\overline{P_3}$ , e desta forma,  $G$  contém  $\overline{P_3}$ . Absurdo.

Concluimos que o cografo  $G$  é  $(2,0)^1$ , se e somente se, não contém nenhum dos grafos  $K_3$  e  $\overline{P_3}$  como subgrafo induzido.  $\square$

Para simplificar e não se tornar muito repetitiva, nas provas das recíprocas dos teoremas que seguem, consideraremos que  $G$  é um grafo minimalmente não  $(k, \ell)^{a,b,c}$ ,  $k + \ell \leq 3$  e  $a, b, c \in \{0, *, 1\}$ , i.e, a retirada de qualquer vértice de  $G$  torna-o  $(k, \ell)^{a,b,c}$ .

### 3.2. $M_{3 \times 3}$ -obstruções

Nesta seção, caracterizaremos os cografos  $(k, \ell)$  em termos de M-obstruções minimais com base nas matrizes de ordem  $3 \times 3$ .

#### 3.2.1. Casos $(3,0)$

Na Figura 5 são listadas todas as matrizes de ordem  $3 \times 3$  referentes aos Casos  $(3,0)$ .

Observe que o caso de verificar se um grafo  $G$  é  $(3,0)^{0,0,0}$  corresponde ao caso trivial de verificar se  $G$  é tal que  $V(G_i)$  é um conjunto independente ( i.e, um grafo sem arestas). Note também que os casos de verificar se um grafo é  $(3,0)^{*,0,0}$  ou  $(3,0)^{*,*,0}$  ou  $(3,0)^{*,0,1}$  equivalem a verificar se o grafo é  $(2,0)^*$ . Da mesma forma, verificar se um grafo é  $(3,0)^{0,1,1}$  equivale a verificar se o grafo é  $(2,0)^1$ .

Apenas os casos  $(3,0)^{1,1,1}$ ,  $(3,0)^{*,*,*}$ ,  $(3,0)^{*,1,1}$ ,  $(3,0)^{1,*,*}$  e  $(3,0)^{1,0,0}$  são interessantes para análise, já que os demais casos podem ser reduzidos a alguns dos casos da matriz de ordem 2, como mostra a Figura 5 e que já foram estudados na seção 3.1. Por motivo de limite de páginas, não será possível provar todos os 5 casos existentes, e assim provaremos apenas o caso  $(3,0)^{*,1,1}$ . Vale mencionar que os demais casos são analisados utilizando a mesma

<p>Caso <math>(3,0)^{*,*,*}</math></p> $M = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso <math>(3,0)^{1,1,1}</math></p> $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso <math>(3,0)^{1,*,*}</math></p> $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso <math>(3,0)^{*,1,1}</math></p> $M = \begin{pmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso <math>(3,0)^{1,0,0}</math></p> $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
<p>Caso <math>(3,0)^{0,1,1}</math></p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>Caso <math>(2,0)^1</math></p>	<p>Caso <math>(3,0)^{*,*,0}</math></p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>Caso <math>(2,0)^*</math></p>	<p>Caso <math>(3,0)^{*,0,1}</math></p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>Caso <math>(2,0)^*</math></p>	<p>Caso <math>(3,0)^{*,0,0}</math></p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>Caso <math>(2,0)^*</math></p>	<p>Caso <math>(3,0)^{0,0,0}</math></p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>Caso <math>(2,0)^0</math></p>

Figura 5: Matrizes de ordem  $3 \times 3$

estrutura de prova, e suas respectivas obstruções se encontram na Figura 6.

<p>Caso <math>(3,0)^{*,*,*}</math></p> <p><math>K_4</math></p>	<p>Caso <math>(3,0)^{1,1,1}</math></p> <p><math>K_4</math> <math>\bar{P}_3</math></p>	<p>Caso <math>(3,0)^{1,*,*}</math></p> <p><math>K_4</math> <math>K_3 \cup K_2</math></p>	<p>Caso <math>(3,0)^{*,1,1}</math></p> <p><math>K_4</math> <math>K_3 \cup K_1</math></p>	<p>Caso <math>(3,0)^{1,0,0}</math></p> <p><math>K_3</math> <math>2K</math></p>
--	---	--	--	--

Figura 6: Obstruções minimais de todos os casos  $(3,0)$

**Teorema 4:** Seja  $G$  um cografo.  $G$  é um grafo  $(3,0)^{*,1,1}$  se e somente se  $G$  não contém nenhum dos grafos da Figura 7 como subgrafo induzido.

*Demonstração* ( $\Rightarrow$ ) É fácil ver que se  $G$  contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então  $G$  não é um cografo  $(3,0)^{*,1,1}$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $G$  não contém nenhum dos subgrafos da Figura 7 como subgrafo induzido. Assim, vamos analisar dois casos:

(i)  $G$  é desconexo.  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é conexo. Se algum  $G_i$  contiver  $K_3$ , então  $G$  contém  $K_3 \cup K_1$ . Absurdo. Desta forma, todos os  $G_i$ 's não contém  $K_3$ . Pela Figura 4 podemos verificar que  $G$  é  $(2,0)^*$ , e desta forma,  $G$  é  $(3,0)^{*,1,1}$ . Contradição.

(ii)  $\bar{G}$  é desconexo. Pela propriedades da decomposição modular,  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ ,  $k \geq 2$  e cada  $G_i$  é trivial ou desconexo. Se algum  $G_i$  é tal que  $V(G_i)$  é um conjunto independente, então  $G - G_i$  não pode ser  $(2,0)^*$ , caso contrário  $G$  seria  $(3,0)^{*,1,1}$ . Contradição. Logo, pela Figura 4, podemos ver que  $G - G_i$  contém  $K_3$ , e portanto  $G$  contém  $K_4$ . Absurdo. Temos então que cada  $G_i$  contém um  $K_2$ , logo  $G$  contém um  $K_4$  como subgrafo induzido.

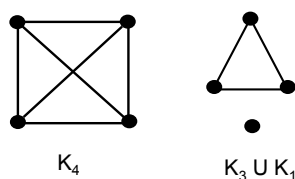


Figura 7: Obstruções minimais do caso  $(3, 0)^{*,1,1}$

Concluimos que o cografo  $G$  é  $(3, 0)^{*,1,1}$ , se e somente se, não contém nenhum dos grafos  $K_4$  e  $K_3 \cup K_1$  como subgrafo induzido.  $\square$

### 3.2.2. Casos $(0,3)$

Na Figura 8 são listadas todas as matrizes de ordem  $3 \times 3$  referentes aos Casos  $(0,3)$  que serão aqui considerados nesta subseção.

<p>Caso <math>(0,3)^{0,0,0}</math></p> $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso <math>(0,3)^{*,*,*}</math></p> $M = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso <math>(0,3)^{0,*,*}</math></p> $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso <math>(0,3)^{*,0,0}</math></p> $M = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso <math>(0,3)^{0,1,1}</math></p> $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
<p>Caso <math>(0,3)^{1,*,*}</math></p>   <p>Caso <math>(0,2)^*</math></p>	<p>Caso <math>(0,3)^{0,1,*}</math></p>   <p>Caso <math>(0,2)^*</math></p>	<p>Caso <math>(0,3)^{*,1,1}</math></p>   <p>Caso <math>(0,2)^*</math></p>	<p>Caso <math>(0,3)^{1,0,0}</math></p>   <p>Caso <math>(0,2)^0</math></p>	<p>Caso <math>(0,3)^{1,1,1}</math></p>   <p>Caso <math>(0,2)^1</math></p>

Figura 8: Matrizes de ordem  $3 \times 3$

Observe que o caso de verificar se um grafo  $G$  é  $(0,3)^{1,1,1}$  corresponde ao caso trivial de verificar se  $G$  é uma clique. Note também que os casos de verificar se um grafo é  $(0,3)^{*,1,1}$  ou  $(0,3)^{1,*,*}$  ou  $(0,3)^{0,1,*}$  equivale a verificar se o grafo é  $(0,2)^*$ . Da mesma forma, verificar se um grafo é  $(0,3)^{1,0,0}$ , equivale a verificar se o grafo é  $(0,2)^0$ .

No entanto, os casos  $(0,3)^{0,0,0}$ ,  $(0,3)^{*,*,*}$ ,  $(0,3)^{0,*,*}$ ,  $(0,3)^{*,0,0}$  e  $(0,3)^{0,1,1}$ , são complementares aos casos  $(3,0)^{1,1,1}$ ,  $(3,0)^{*,*,*}$ ,  $(3,0)^{1,*,*}$ ,  $(3,0)^{*,1,1}$  e  $(3,0)^{1,0,0}$ , respectivamente, e já analisados na subseção 3.2.1.

### 3.2.3. Casos $(2,1)$

Na Figura 9 são listadas todas as matrizes de ordem  $3 \times 3$  referentes aos Casos  $(2,1)$  que serão considerados nesta subseção.



Caso $(2,1)^{*,*,*}$ $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$	Caso $(2,1)^{*,1,1}$ $\begin{pmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	Caso $(2,1)^{0,0,0}$ →                     Caso $(1,1)^0$	Caso $(2,1)^{0,1,0}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Caso $(2,1)^{1,1,1}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	Caso $(2,1)^{*,1,0}$ $\begin{pmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Caso $(2,1)^{0,1,1}$ →                     Caso $(1,1)^1$	Caso $(2,1)^{1,*,0}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Caso $(2,1)^{1,*,*}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$	Caso $(2,1)^{1,0,0}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Caso $(2,1)^{0,*,*}$ →                     Caso $(1,1)^*$	Caso $(2,1)^{1,*,0}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Caso $(2,1)^{*,0,0}$ $\begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Caso $(2,1)^{1,1,0}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Caso $(2,1)^{0,1,*}$ →                     Caso $(1,1)^*$	Caso $(2,1)^{*,*,0}$ $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Caso $(2,1)^{1,1,*}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & * \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix}$	Caso $(2,1)^{*,1,*}$ $\begin{pmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & * \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix}$	Caso $(2,1)^{0,0,*}$ →                     Caso $(1,1)^*$	Caso $(2,1)^{*,*,0}$ $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Figura 9: Matrizes de ordem  $3 \times 3$

Observe que o caso de se verificar se um grafo  $G$  é  $(2,1)^{0,0,0}$  equivale a verificar se o grafo é  $(1,1)^0$ . Da mesma forma, o caso de se verificar se um grafo é  $(2,1)^{0,1,1}$  equivale a se verificar se o grafo é  $(1,1)^1$ . Note também, que os casos de se verificar se um grafo é  $(2,1)^{0,*,*}$  ou  $(2,1)^{0,1,*}$  ou  $(2,1)^{0,0,*}$  são equivalentes a verificar se o grafo é  $(1,1)^*$ .

Mostraremos as obstruções minimais de todos os demais casos da Figura 9, uma vez que os casos relacionados acima podem ser reduzidos a alguns dos casos da matriz  $M_{2 \times 2}$ , já demonstrados na seção 3.1. Além disso, por falta de espaço, provaremos apenas o caso  $(2,1)^{*,1,0}$ , sabendo que as provas dos demais casos seguem a mesma linha de raciocínio. As obstruções minimais de cada caso  $(2,1)$  se encontra explícito na Figura 10.

**Teorema 5:** Seja  $G$  um cografo.  $G$  é um grafo  $(2,1)^{*,1,0}$  se e somente se  $G$  não contém nenhum dos grafos da Figura 11 como subgrafo induzido.

*Demonstração* ( $\Rightarrow$ ) É fácil ver que se  $G$  contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então  $G$  não é um cografo  $(2,1)^{*,1,0}$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $G$  não contém nenhum dos subgrafos da Figura 11 como subgrafo induzido. Assim, consideraremos dois casos:

(i)  $G$  é desconexo.  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é conexo. Se  $G_i$  for trivial, para algum  $i = 1, 2, \dots, k$ , então  $G$  é  $(2,1)^{*,1,0}$ , pois por minimalidade,  $G - G_i$  é  $(2,1)^{*,1,0}$ . Contradição. Dessa forma,  $|G_i| \geq 2$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ . Temos que  $G$  não é  $(2,0)^*$ , caso contrário  $G$  seria  $(2,1)^{*,1,0}$ , uma contradição. Logo,  $G$  contém  $K_3$ , como mostra a Figura 4, e desta forma,  $G_i$  contém  $K_3$ . Como cada  $G_i$ ,  $|G_i| \geq 2$  e  $k \geq 2$ , então  $G$  contém  $K_3 \cup K_2$ . Absurdo.

(ii)  $\overline{G}$  é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular,  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ , com  $k \geq 2$  e cada  $G_i$  é trivial ou desconexo. Se  $G_i$  for trivial, para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ ,

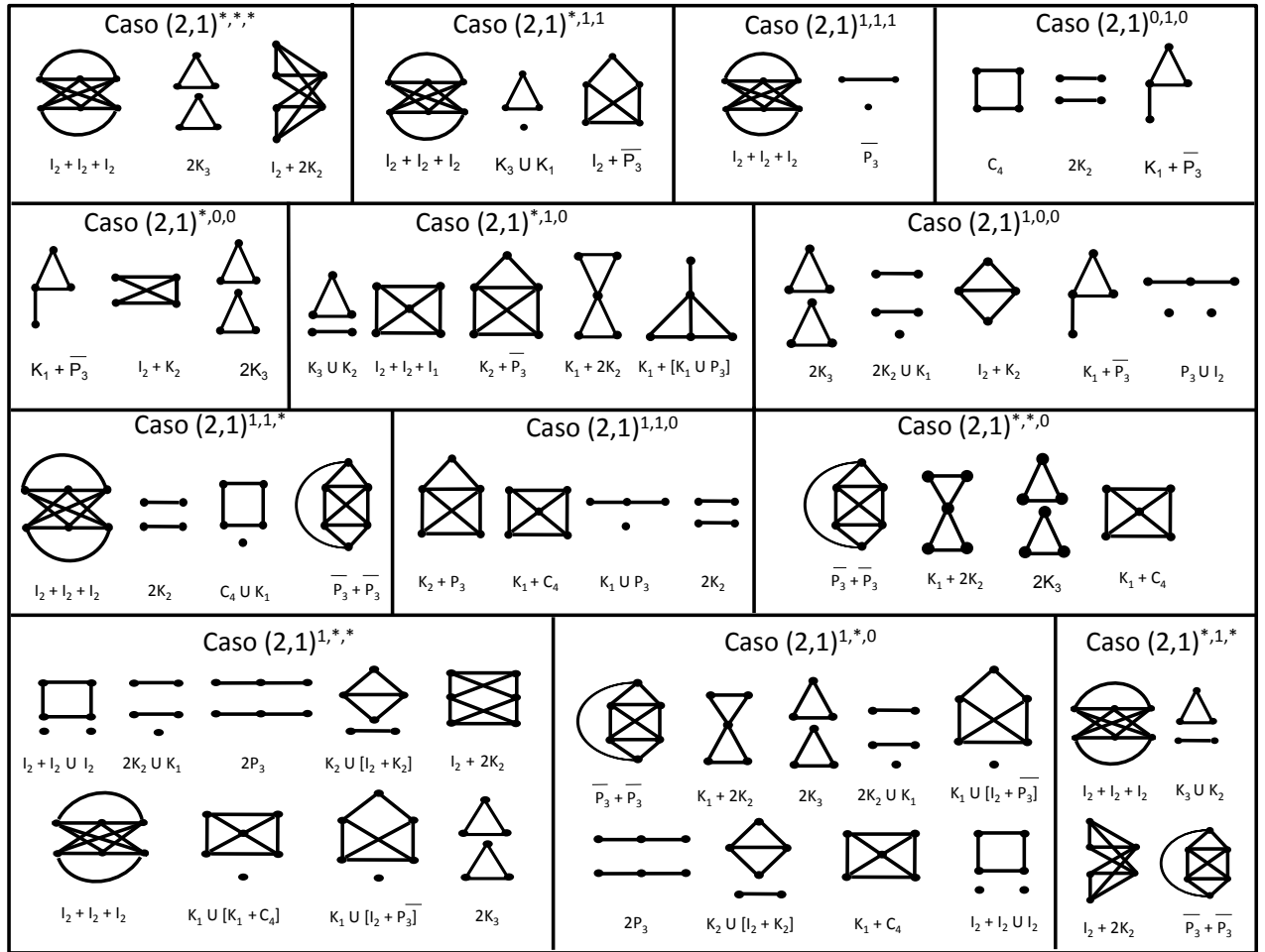


Figura 10: Obstruções minimais de todos os Casos  $(2, 1)$  que não são redutíveis

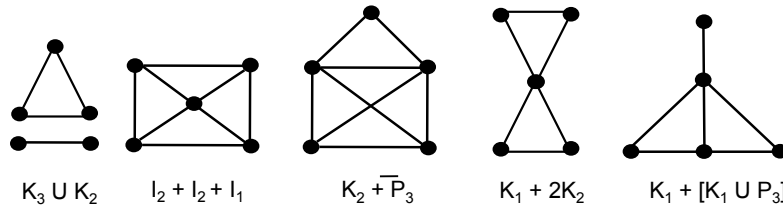


Figura 11: Obstruções minimais do caso  $(2, 1)^{*,1,0}$

então  $G$  é  $(2, 1)^{*,1,0}$ , uma contradição. Desta forma, existe pelo menos um  $G_i$  que possui pelo menos um par de vértices não adjacentes,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Assim, analisaremos os dois subcasos ( $k \geq 3, k = 2$ ):

(ii.1)  $k \geq 3$ : se existem  $G_i$  e  $G_j$ , ambos contendo  $I_2$ , então  $G$  contém  $I_2 + I_2 + I_1$ . Absurdo. Se apenas  $G_i$  contém  $I_2$ , isto quer dizer que  $G - G_i$  não contém  $I_2$  e por sua vez é uma clique. Logo, se  $G_i$  for  $(1, 1)^1$ , então  $G$  é  $(2, 1)^{*,1,0}$ , uma contradição. Pela Figura 4,  $G_i$  contém  $C_4$  ou  $\overline{P_3}$ , e desta forma, se  $G_i$  contém  $C_4$ , então  $G$  contém  $C_4 + K_1$ , absurdo. E se  $G_i$  contém  $\overline{P_3}$ , então  $G$  contém  $\overline{P_3} + K_2$ , absurdo.

(ii.2)  $k = 2$ : consideraremos mais dois subcasos:

(ii.2.1)  $G_1$  contém  $I_2$  e  $G_2$  é trivial. Se  $G_1$  for  $(1, 1)^1$ , então  $G$  é  $(2, 1)^{*,1,0}$ . Absurdo!

Logo, pela Figura 4,  $G_1$  contém  $C_4$  ou  $\bar{P}_3$ . Considerando que  $G_1$  contenha  $C_4$ , então  $G$  contém  $I_2 + I_2 + I_1$ . E, se  $G_1$  contém  $\bar{P}_3$ , então, analisaremos as seguintes situações:

-  $G_1$  é  $(1, 1)^0$ , então  $G$  é  $(2, 1)^{*,1,0}$ . Contradição. Logo,  $G_1$  contém  $P_3$  ou  $2K_2$ , como mostra a Figura 4. Se  $G_1$  contém  $P_3$ , então como  $G_1$  é desconexo temos que  $G_1$  contém  $P_3 \cup K_1$ , logo  $G$  contém  $K_1 + (K_1 \cup P_3)$ .

(ii.2.2) Ambos  $G_1$  e  $G_2$  contém  $I_2$ . Se  $G$  é  $(2, 0)^*$  então  $G$  é  $(2, 1)^{*,1,0}$ . Contradição. Logo, pela Figura 4,  $G$  contém  $K_3$ . Já que  $G$  contém  $K_3$ , então pelo menos um  $G_i$ , digamos  $G_1$ , contém uma aresta. Se  $G_2$  também contiver  $K_2$ , então  $G$  contém  $\bar{P}_3 + K_2$ , já que  $G_1$  contém  $\bar{P}_3$ , pois é desconexo, absurdo. No entanto, se apenas  $G_1$  contém  $K_2$  e  $G_2$  é tal que  $V(G_2)$  é um conjunto independente, então:

\* Se  $G_1$  for  $(1, 1)^0$  então  $G$  é  $(2, 1)^{*,1,0}$ . Contradição.

\* Se  $G_1$  não for  $(1, 1)^0$  então  $G_1$  contém  $2K_2$  ou  $P_3$ , como mostra a Figura 4. Dessa forma, considerando que  $G_1$  contenha  $2K_2$ , então  $G$  contém  $K_1 + 2K_2$ , absurdo! E, se  $G_1$  contém  $P_3$ , então  $G$  contém  $K_1 + (P_3 \cup K_1)$ , já que  $G_1$  é desconexo, absurdo.

Concluimos que o cografo  $G$  é  $(2, 1)^{*,1,0}$ , se e somente se, não contém nenhum dos grafos  $K_3 \cup K_2$ ,  $I_2 + I_2 + I_1$ ,  $K_2 + \bar{P}_3$ ,  $K_1 + 2K_2$  e  $K_1 + [K_1 \cup P_3]$  como subgrafo induzido.  $\square$

### 3.2.4. Casos (1,2)

Na figura 12 são listadas todas as matrizes de ordem  $3 \times 3$  referentes aos Casos (1,2) que serão aqui considerados nesta subseção.

<p>Caso <math>(1,2)^{*,*}</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{*,0,0}</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{1,1,1}</math></p> <p><math>\rightarrow</math></p>	<p>Caso <math>(1,1)^1</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{1,0,1}</math></p>
<p>Caso <math>(1,2)^{0,0,0}</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{*,0,1}</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{1,0,0}</math></p> <p><math>\rightarrow</math></p>	<p>Caso <math>(1,1)^1</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{0,*,1}</math></p>
<p>Caso <math>(1,2)^{0,*,*}</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{0,1,1}</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{1,*,*}</math></p> <p><math>\rightarrow</math></p>	<p>Caso <math>(1,1)^*</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{0,*,1}</math></p>
<p>Caso <math>(1,2)^{*,1,1}</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{0,0,1}</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{1,0,*}</math></p> <p><math>\rightarrow</math></p>	<p>Caso <math>(1,1)^*</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{*,*,1}</math></p>
<p>Caso <math>(1,2)^{0,0,*}</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{*,0,*}</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{1,1,*}</math></p> <p><math>\rightarrow</math></p>	<p>Caso <math>(1,1)^*</math></p>	<p>Caso <math>(1,2)^{*,*,1}</math></p>

Figura 12: Matrizes de ordem  $3 \times 3$

Observe que o caso de verificar se o grafo é  $(1,2)^{1,1,1}$  equivale a verificar se o grafo é  $(1,1)^1$ .

Da mesma forma, o caso de verificar se um grafo é  $(1, 2)^{1,0,0}$  equivale a verificar se o grafo é  $(1, 1)^0$ . Note também que os casos de verificar se o grafo é  $(1, 2)^{1,*,*}$  ou  $(1, 2)^{1,0,*}$  ou  $(1, 2)^{1,1,*}$  equivalem verificar se o grafo é  $(1, 1)^*$ .

Portanto os demais casos  $(1, 2)^{*,*,*}$ ,  $(1, 2)^{*,0,0}$ ,  $(1, 2)^{0,0,0}$ ,  $(1, 2)^{*,0,1}$ ,  $(1, 2)^{0,*,*}$ ,  $(1, 2)^{0,1,1}$ ,  $(1, 2)^{*,1,1}$ ,  $(1, 2)^{0,0,1}$ ,  $(1, 2)^{0,0,*}$ ,  $(1, 2)^{*,0,*}$ ,  $(1, 2)^{0,1,1}$ ,  $(1, 2)^{0,*,1}$  e  $(1, 2)^{*,*,1}$ , podem ser provados através do complemento, e estes casos da matriz  $M_{3 \times 3}$ , já foram mostrados na seção 3.2.3, e as respectivas obstruções minimais se encontram na Figura 10, bastando apenas fazer seus respectivos complementos para encontrá-las. Por exemplo, o Caso  $(1, 2)^{0,0,*}$  possui como obstruções minimais os complementos das obstruções minimais do Caso  $(2, 1)^{*,1,1}$ , isto é,  $3K_2$ ,  $I_1 + I_3$  e  $K_2 \cup P_3$ .

#### 4. Conclusão

Neste trabalho, usamos fortemente a estrutura dos cografos para caracterizarmos por obstruções minimais todos os cografos  $-(k, \ell)$  com e sem restrição externa, com  $k + \ell \leq 3$ .

#### Referências

- [1] **Brandsstädt, A.** Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics* 152 (1996) 47 – 54.
- [2] **Brandsstädt, A.** The complexity of some problems related to graph 3-colorability. *Discrete Applied Mathematics* 89 (1998) 59 – 73.
- [3] **Bravo, R. S. F., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, Fábio** Characterization and recognition of  $P_4$ -sparse graphs partitionable into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics* 159 (2011) 165 – 173.
- [4] **Corneil, D. G., Lerchs, H., and Burlingham, L. S.** Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics* 3 (1981) 163 – 174.
- [5] **Feder, T., Hell, P., Klein, S., and Motwani, R.** List partitions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 16 (2003) 449 – 478.
- [6] **Feder, T., and Hell, P.** Matrix partitions of perfect graphs. Special Issue of *Discrete Mathematics*, 306 (2006) 2450 – 2460
- [7] **Feder, T., Hell, P., and Hochstättler, W.** Generalized Colouring (Matrix Partitions) of Cographs. *Trends in Mathematics* 2006 149 – 167
- [8] **Golumbic, M. C.** *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, New York, 1980.
- [9] **Hell, P., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, F.** Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics* 141 (2004) 185 – 194.
- [10] **Jamison, B., Olariu, S.**  $p$ -components and the homogeneous decomposition of graphs *SIAM Journal Discrete Mathematics* 8 (1995) 448 – 463.
- [11] **Lerchs, H.** On cliques and kernels. Technical Report, Department of Computer Science, University of Toronto, March 1971.
- [12] **McConnell, R. M., and Spinrad, J. P.** Modular decomposition and transitive orientation. *Discrete Mathematics* 201 (1999) 189 – 241.