



ÁRVORES DE DIÂMETRO 3 COM MENOR AUTOVALOR NÃO PRINCIPAL

Francisca A. M. França

Universidade Federal Fluminense - ICEX - UFF
Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783, Bairro Atterrado - Volta Redonda - RJ
francisca@puvr.uff.br

Cybele T. M. Vinagre

Universidade Federal Fluminense - IM - UFF
Rua Mário Santos Braga S/N, Valonguinho - Niterói - RJ
cybl@vm.uff.br

Nair M. M. de Abreu

Universidade Federal do Rio de Janeiro- COPPE- UFRJ
Centro de Tecnologia, Bloco F, Sala 103 - Ilha do Fundão - Rio de Janeiro - RJ
nairabreunovoa@gmail.com

RESUMO

Um autovalor λ de um grafo G é dito ser um *autovalor principal* de G se o autoespaço associado a λ não é ortogonal ao vetor que tem todas as coordenadas iguais a 1. Caso contrário, λ é dito ser um *autovalor não principal* de G . Nesse trabalho apresentamos uma condição necessária e suficiente para que o simétrico de um autovalor simples de um grafo conexo bipartido seja não principal. Como aplicação, caracterizamos as árvores de diâmetro 3 em que o menor autovalor é não principal.

PALAVRAS CHAVE. Matriz de adjacência do grafo. Autovalor principal. Grafo bipartido.

Área Principal (Teoria e Algoritmos em Grafos)

ABSTRACT

An eigenvalue λ of a graph G is said to be a *main eigenvalue* of G if the eigenspace associated to λ is not orthogonal to the all-1 vector, and a *non-main eigenvalue* in the other case. In this paper we present a necessary and sufficient condition for the symmetric of a simple eigenvalue of a bipartite connected graph to be non-main. As an application, we characterize the trees with diameter equal to 3 where the smallest eigenvalue is non-main.

KEYWORDS. Adjacency matrix of the graph. Main eigenvalue. Bipartite Graph.

Principal Area (Theory and Algorithms in Graphs)

1. Introdução

No que se segue, $G = G(V(G), E(G))$ é um grafo simples (sem arestas múltiplas, sem orientação e sem laços) e finito, no qual $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ é o conjunto dos n vértices de G e $E(G) = \{\{i, j\}; i, j \in V(G)\}$ representa o conjunto de arestas de G . O grau d_i do vértice i é o número de vértices j tais que $\{i, j\} \in E(G)$ e d_G denota o n -vetor coluna cujos elementos são os graus dos vértices do grafo G . O grafo é *completo* quando quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. O grafo completo com n vértices é denotado K_n . O *grafo complementar* de G é o grafo \overline{G} que possui os mesmos vértices de G , sendo que $\{i, j\} \in E(\overline{G})$ se e somente se $\{i, j\} \notin E(G)$.

Uma sequência finita $i, i+1, i+2, \dots, i+p$ de vértices de um grafo G é dita uma *cadeia de i a $i+p$* quando $\{i+k, i+k+1\} \in E(G)$ para $0 \leq k \leq p-1$. Um *caminho* é uma cadeia em que todos os vértices são distintos. Diz-se que G é um *grafo conexo* quando existe um caminho ligando cada par de seus vértices. Em caso contrário, G é denominado *grafo desconexo*. Um caminho fechado é denominado *ciclo*. Uma *árvore* é um grafo conexo que não possui ciclos.

Um grafo $G(V, E)$ é *r -partido* quando o seu conjunto de vértices V pode ser particionado em r subconjuntos disjuntos V_1, V_2, \dots, V_r , tais que toda aresta de G une vértices de subconjuntos distintos. Denota-se tal partição por $V = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_r$. Um grafo é *r -partido completo* se quaisquer dois vértices de diferentes subconjuntos da partição são adjacentes. Sendo $|V_i| = p_i$, $1 \leq i \leq r$, um grafo *r -partido completo* é denotado por K_{p_1, p_2, \dots, p_r} . Se $r = 2$, G é dito *bipartido*. O grafo bipartido completo $K_{1, n}$ é uma árvore denominada *estrela*. Um grafo bipartido G é dito um *grafo (bipartido) semirregular* se os vértices que pertencem a um mesmo subconjunto da partição possuem o mesmo grau.

O grafo G com n vértices determina uma matriz quadrada de ordem n , cujas entradas são $a_{ij} = 1$, se $\{i, j\} \in E(G)$, e $a_{ij} = 0$, se $\{i, j\} \notin E$, chamada *matriz de adjacência de G* e denotada por $A(G)$. Diz-se que λ é um autovalor do grafo G quando λ é um autovalor de $A(G)$. O espectro de G , $Spec(G)$, é o multiconjunto dos autovalores do grafo G . Em geral, os n autovalores de G são apresentados em ordem não crescente, $\lambda_{\max}(G) = \lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G) = \lambda_{\min}(G)$ e o autoespaço associado a cada autovalor $\lambda \in Spec(G)$ é denotado por $\mathcal{E}_G(\lambda)$. Denota-se por \mathbf{J} a matriz de ordem n formada por 1's e por \mathbf{j} , o n -vetor coluna formado por 1's.

Cada autovalor λ de G tal que \mathbf{j} é não ortogonal ao autoespaço $\mathcal{E}_G(\lambda)$ é dito ser um *autovalor principal (main eigenvalue)* de G . Caso contrário, dizemos que λ é um autovalor não principal. Denota-se por $Main(G)$ a parte de $Spec(G)$ contida somente pelos autovalores principais de G , que são todos distintos [Cvetković (1970)]. Por Cvetković *et al.* (1979), temos que o maior autovalor de qualquer grafo conexo é um autovalor principal do grafo (consequência do Teorema de Perron-Frobenius). Um grafo conexo é *regular*, isto é, todos os seus vértices possuem o mesmo grau, se e somente se, seu maior autovalor é o único autovalor principal. Um *survey* devido a Rowlinson (2007) apresenta os principais resultados relativos a autovalores principais até aquela data.

Em Cardoso e Pinheiro (2009), os autores investigaram relações entre os autovalores principais de um grafo e os de seu complementar, buscando estimativas para a ordem máxima de subgrafos induzidos regulares. Apresentaram uma cota superior para a ordem de tais subgrafos, que é atingida para os grafos G em que o menor autovalor é não principal. A partir disso, os autores propõem a seguinte questão: para quais grafos o menor autovalor é não principal? Como consequência do Teorema 2.2, respondemos tal questão para os grafos conexos bipartidos.

O artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2, encontra-se a Proposição 2.1 demonstrada em Rowlinson (2007) e referente a grafos semirregulares, e o nosso principal resultado, Teorema 2.2, que estabelece uma condição necessária e suficiente para que o simétrico de qualquer autovalor simples de um grafo bipartido seja não principal. Na Seção 3, este teorema é aplicado para caracterizar as árvores de diâmetro 3 em que os menores autovalores são não principais. Finalizamos o artigo com uma sugestão para trabalhos futuros.

2. Grafos bipartidos em que o simétrico de um autovalor simples é não principal

O menor dos autovalores de um grafo bipartido pode ou não pertencer à parte principal do espectro do grafo. Como exemplos, apresentamos os grafos $G = K_{5,5}$ e T ilustrados na Figura 1.

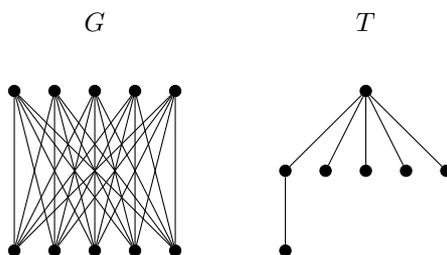


Figura 1: $\lambda_{\min}(G)$ é não principal e $\lambda_{\min}(T)$ é principal

Como os grafos G e T são conexos segue que $\lambda_{\max}(G)$ e $\lambda_{\max}(T)$ são autovalores principais. No caso do grafo G , $\lambda_{\min}(G)$ é um autovalor não principal, pois G é um grafo regular de grau 5 e $\lambda_{\max}(G)$ é o seu único autovalor principal. No grafo T , $\lambda_{\min}(T) = -\sqrt{\sqrt{5} + 3}$ é um autovalor simples e principal, pois

$$v = \left[1 \quad \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \frac{(\sqrt{5}-3)\sqrt{\sqrt{5}+3}}{4} \quad -\frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{\sqrt{5}+3}}{4} \right]^T$$

é um autovetor associado a $\lambda_{\min}(T)$ e não é ortogonal a \mathbf{j} .

É conhecido que um grafo conexo G é bipartido se e somente se seus autovalores se distribuem simetricamente em relação ao zero. Em Rowlinson (2007), foi provado um resultado de caracterização para grafos conexos que possuem como únicos autovalores principais λ_{\max} e $-\lambda_{\max}$, como segue:

Proposição 2.1 *Um grafo conexo não trivial G é bipartido semirregular se e somente se os únicos autovalores principais de G são $\lambda_{\max}(G)$ e $-\lambda_{\max}(G)$.*

Foi provado em Cvetković *et al.* (1997), que se λ é um autovalor simples de um grafo conexo bipartido G então $-\lambda$ também é um autovalor simples de G . Porém, λ ser um autovalor principal de um grafo conexo bipartido G não implica que $-\lambda$ seja também um autovalor principal de G . O grafo $G = K_{5,5}$, dado na Figura 1, ilustra este caso. A seguir apresentamos uma condição necessária e suficiente para que o simétrico de um autovalor simples seja um autovalor não principal de tal grafo.

Teorema 2.2 *Sejam G um grafo conexo bipartido com n vértices e λ um autovalor simples de G . Nestas condições, $-\lambda$ é um autovalor não principal de G se e somente se d_G é ortogonal ao autoespaço $\mathcal{E}_G(-\lambda)$.*

Demonstração.

Seja $G = G(V, E)$ um grafo conexo bipartido com n vértices tal que $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ com $V_1 = \{1, \dots, s\}$ e $V_2 = \{s+1, \dots, n\}$.

Se λ é um autovalor simples de G com autovetor associado $v = [v_1 \ \dots \ v_s \ v_{s+1} \ \dots \ v_n]^T$ então $A(G)v = \lambda v$ e portanto, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ temos que $\sum_{k \sim i} v_k = \lambda v_i$. Deste modo,

$$\sum_{i=1}^s \sum_{k \sim i} v_k = \lambda \sum_{i=1}^s v_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=s+1}^n \sum_{k \sim i} v_k = \lambda \sum_{i=s+1}^n v_i.$$

Como G é bipartido então $\sum_{i=1}^s \sum_{k \sim i} v_k = \sum_{i=s+1}^n d_i v_i$ e $\sum_{i=s+1}^n \sum_{k \sim i} v_k = \sum_{i=1}^s d_i v_i$. Logo,

$$\lambda \sum_{i=1}^s v_i = \sum_{i=s+1}^n d_i v_i \quad \text{e} \quad \lambda \sum_{i=s+1}^n v_i = \sum_{i=1}^s d_i v_i.$$

Como λ é um autovalor simples do grafo bipartido G então $-\lambda$ também é um autovalor simples de G [Cvetković *et al.* (1997)]. Neste caso, o autoespaço associado a $-\lambda$ é gerado por $v' = [v_1 \ \dots \ v_s \ -v_{s+1} \ \dots \ -v_n]^T$. Assim,

$$\begin{aligned} -\lambda \text{ é não principal} &\iff \langle v', j \rangle = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^s v_i - \sum_{i=s+1}^n v_i = 0 \\ &\iff \lambda \left(\sum_{i=1}^s v_i - \sum_{i=s+1}^n v_i \right) = 0 \\ &\iff \sum_{i=s+1}^n d_i v_i - \sum_{i=1}^s d_i v_i = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^n d_i v'_i = 0 \\ &\iff \langle d_G, v' \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Observe que se G for um grafo conexo bipartido então $\lambda_{\max}(G)$ é um autovalor simples e $\lambda_{\min}(G) = -\lambda_{\max}(G)$. Logo, o Teorema 2.2 nos dá uma condição necessária e suficiente para que o menor autovalor de um grafo conexo bipartido seja não principal, o que responde parcialmente à questão apresentada em Cardoso e Pinheiro (2009). Na seção a seguir, aplicamos tal teorema para determinar as árvores de diâmetro 3 para as quais o menor autovalor é não principal.

3. Caracterização de árvores com diâmetro 3

Grone e Merris (1990) introduziram a notação $T(k, s)$ para designar as árvores de diâmetro 3, que possuem exatamente 2 vértices não pendentes e adjacentes entre si, com k folhas adjacentes a um dos vértices e s folhas adjacentes ao outro. Tais árvores são conhecidas como *duplas estrelas* e os vértices não pendentes são os *vértices centrais*. Quando $k = s$ chamaremos estas árvores *duplas estrelas balanceadas*. Na Figura 2 é apresentada uma dupla estrela $T = T(k, s)$ com a rotulação que adotaremos.

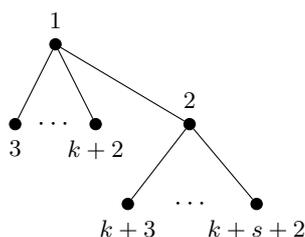


Figura 2: dupla estrela T

Dado um número natural a maior do que 2, T_a é a árvore obtida de $a^2 - a + 1$ estrelas disjuntas $K_{1,a-1}$ cujos vértices centrais possuem um vizinho em comum. Para exemplificar tais árvores, a Figura 3 apresenta a árvore T_4 . Hou e Zhou (2005) identificaram as árvores T_a , as estrelas e as duplas estrelas balanceadas como as árvores com exatamente dois autovalores principais.

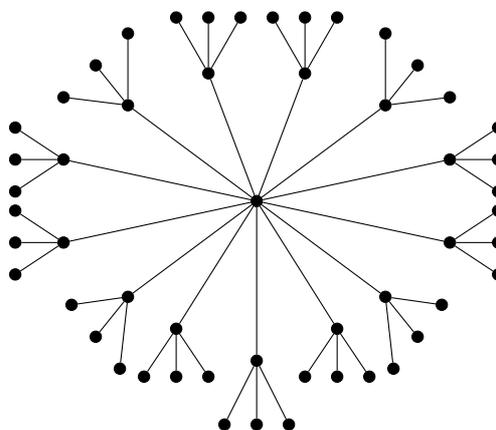


Figura 3: árvore T_4

Lema 3.1 Se $\lambda \neq 0$ é um autovalor simples da dupla estrela $T(k, s)$ rotulada como na Figura 2 com um autovetor $v = [v_i], 1 \leq i \leq k + s + 2$, tal que $v_1 = 1$ então

$$v_i = \begin{cases} \lambda - \frac{k}{\lambda}, & \text{se } i = 2; \\ \frac{1}{\lambda}, & \text{se } 3 \leq i \leq k + 2; \\ 1 - \frac{k}{\lambda^2}, & \text{se } k + 3 \leq i \leq k + s + 2. \end{cases}$$

Demonstração.

Seja

$$A(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $A(T)v = \lambda v$ então

$$A(T)v = \begin{bmatrix} v_2 + v_3 + \dots + v_{k+2} \\ v_1 + v_{k+3} + \dots + v_{k+s+2} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ \vdots \\ \lambda v_{k+2} \\ \lambda v_{k+3} \\ \vdots \\ \lambda v_{k+s+2} \end{bmatrix}.$$

Escrevendo as coordenadas do vetor v em função de sua primeira coordenada, v_1 , obtém-se

- $v_3 = v_4 = \dots = v_{k+2} = \frac{v_1}{\lambda}$
- $v_2 + v_3 + \dots + v_{k+2} = \lambda v_1 \implies v_2 + k \frac{v_1}{\lambda} = \lambda v_1 \implies v_2 = v_1 \left(\lambda - \frac{k}{\lambda} \right)$
- $v_{k+3} = v_{k+4} = \dots = v_{k+s+2} = \frac{v_2}{\lambda} = v_1 \left(1 - \frac{k}{\lambda^2} \right)$

$$\text{Assim, } v = \left[v_1 \quad v_1 \left(\lambda - \frac{k}{\lambda} \right) \quad \frac{v_1}{\lambda} \quad \dots \quad \frac{v_1}{\lambda} \quad v_1 \left(1 - \frac{k}{\lambda^2} \right) \quad \dots \quad v_1 \left(1 - \frac{k}{\lambda^2} \right) \right]^T.$$

Fazendo $v_1 = 1$ tem-se o resultado. □

O resultado que se segue utiliza o Teorema 2.2 e caracteriza todas as árvores balanceadas de diâmetro 3 por meio de uma propriedade do autovetor associado ao menor dos respectivos autovalores.

Teorema 3.2 *Uma dupla estrela possui o menor autovalor como não principal se e somente se é uma dupla estrela balanceada.*

Demonstração.

Seja $T = T(k, s)$ uma dupla estrela com a rotulação dada pela Figura 2.

Por Del Vecchio *et al.* (2009), o polinômio característico de T é dado por $p_T(\lambda) = \lambda^{s-1} \lambda^{k-1} (\lambda^4 - \lambda^2(k+s+1) + ks)$. Daí, seus autovalores podem ser explicitados como segue

$$\lambda_i(T) = \begin{cases} \frac{\sqrt{k+s+1+2\sqrt{ks}} + \sqrt{k+s+1-2\sqrt{ks}}}{2}, & \text{se } i = 1; \\ \frac{\sqrt{k+s+1+2\sqrt{ks}} - \sqrt{k+s+1-2\sqrt{ks}}}{2}, & \text{se } i = 2; \\ 0, & \text{se } 3 \leq i \leq k+s; \\ \frac{-\sqrt{k+s+1+2\sqrt{ks}} + \sqrt{k+s+1-2\sqrt{ks}}}{2}, & \text{se } i = k+s+1; \\ \frac{-\sqrt{k+s+1+2\sqrt{ks}} - \sqrt{k+s+1-2\sqrt{ks}}}{2}, & \text{se } i = k+s+2. \end{cases}$$

Se $v = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_{k+2} \ v_{k+3} \ \dots \ v_{k+s+2}]^T$ é um autovetor associado ao autovalor simples $\lambda_1(T)$ então $\lambda_{k+s+2}(T)$, que é o simétrico de $\lambda_1(T)$, também é um autovalor simples de G [Cvetković *et al.* (1997)] e o seu autoespaço é gerado por

$$v' = [v_1 \ -v_2 \ -v_3 \ \dots \ -v_{k+2} \ v_{k+3} \ \dots \ v_{k+s+2}]^T.$$

Do Teorema 2.2, $\lambda_{k+s+2}(T)$ é não principal se e somente se

$$d_1 v_1 + \sum_{i=k+3}^{k+s+2} d_i v_i = d_2 v_2 + \sum_{i=3}^{k+2} d_i v_i.$$

Mas,

$$\begin{aligned} (k+1)v_1 + \sum_{i=k+3}^{k+s+2} v_i = (s+1)v_2 + \sum_{i=3}^{k+2} v_i &\iff v_1 - v_2 - \sum_{i=3}^{k+2} v_i + \sum_{i=k+3}^{k+s+2} v_i = sv_2 - kv_1 \\ &\iff sv_2 = kv_1 \end{aligned} \quad (1)$$

Logo, $\lambda_{k+s+2}(T)$ é não principal se e somente se $sv_2 = kv_1$.

Do Lema 3.1, o vetor

$$v' = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_{k+s+2}(T) - \frac{k}{\lambda_{k+s+2}(T)} \\ \frac{1}{\lambda_{k+s+2}(T)} \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{1}{\lambda_{k+s+2}(T)} \\ 1 - \frac{k}{\lambda_{k+s+2}^2(T)} \\ \vdots \\ 1 - \frac{k}{\lambda_{k+s+2}^2(T)} \end{bmatrix}$$

é um autovetor associado a $\lambda_{k+s+2}(T)$ e portanto, o vetor v obtido de v' trocando-se o sinal das coordenadas correspondentes à partição $\{2, 3, \dots, k+2\}$ é um autovetor associado a $\lambda_1(T)$. Logo, $\lambda_{k+s+2}(T)$ é um autovalor não principal se e somente se as duas primeiras coordenadas de v satisfazem a equação (1), isto é

$$\begin{aligned} s(-v_2) = kv_1 &\iff s \left(\frac{k}{\lambda_{k+s+2}(T)} - \lambda_{k+s+2}(T) \right) = k \\ &\iff s(k - \lambda_{k+s+2}^2(T)) = k\lambda_{k+s+2}(T) \\ &\iff \lambda_{k+s+2}^2(T)s + k\lambda_{k+s+2}(T) - sk = 0. \end{aligned}$$

Isto leva a $\lambda_{k+s+2}(T) = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4s^2k}}{2s}$ ou $\lambda_{k+s+2}(T) = \frac{-k - \sqrt{k^2 + 4s^2k}}{2s}$. Dado que $\frac{-k + \sqrt{k^2 + 4s^2k}}{2s} > 0$ e o menor autovalor de um grafo com pelo menos uma aresta é menor do que -1 [Doob (1982)], temos $\lambda_{k+s+2}(T) = \frac{-k - \sqrt{k^2 + 4s^2k}}{2s}$.

Mas, $\lambda_{k+s+2}(T) = -\frac{\sqrt{k+s+1+2\sqrt{ks}} + \sqrt{k+s+1-2\sqrt{ks}}}{2}$ e portanto, tem-se a seguinte equação

$$\frac{-k - \sqrt{k^2 + 4s^2k}}{2s} = -\frac{\sqrt{k+s+1+2\sqrt{ks}} + \sqrt{k+s+1-2\sqrt{ks}}}{2},$$

que pode ser reescrita como

$$k = s\sqrt{(\sqrt{k} - \sqrt{s})^2 + 1} - \sqrt{k^2 + 4s^2k} + s\sqrt{(\sqrt{k} + \sqrt{s})^2 + 1}. \quad (2)$$

Após aplicações de operações algébricas, a equação (2) fornece o seguinte polinômio:

$$k^2s^5[(s-1)k^3 + (s-2s^2)k^2 + (s^3+s^2)k - s^3] = 0,$$

cujas raízes são $k = 0$ com multiplicidade 2, $k = s$ com multiplicidade 2 e $k = \frac{s}{s-1}$, $s \neq 1$, com multiplicidade 1. Dentre essas raízes, aquelas que satisfazem a equação (2) são $k = 0$ e $k = s$. Como T é uma árvore de diâmetro 3, segue que k deve ser um inteiro positivo e assim, a única solução possível é $k = s$.

Reciprocamente, seja $T' = T(k, k)$ uma dupla estrela balanceada. Como provado por Hou e Zhou (2005), T' possui exatamente dois autovalores principais. Embora seja um grafo bipartido, T' não é semirregular. Da Proposição 2.1, $\lambda_{\min}(T')$ é não principal. \square

4. Considerações Finais

Nesse trabalho foi apresentada uma condição necessária e suficiente para que o simétrico de um autovalor simples de um grafo bipartido seja um autovalor não principal de tal grafo. Este resultado foi aplicado para caracterizar as árvores de diâmetro 3 cujo menor autovalor é não principal. Sugere-se para trabalhos futuros que investigações sejam feitas para verificar a possibilidade de aplicação do Teorema 2.2 na identificação e caracterização das *duplas vassouras*, generalizações das duplas estrelas para diâmetros maiores que 3, cujos respectivos menores autovalores sejam não principais.

Referências

- Cardoso, D.M. e Pinheiro, S.J.** (2009), Spectral upper bounds on the size of k-regular induced subgraphs, *Electron. Notes Discrete Math.*, 32, 3-10.
- Cvetković, D.** (1970) The Generating Function for Variations and Paths of the Graph and Self-Complementary Graphs, *Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, 320-328, 27-34.
- Cvetković, D., Doob, M. e Sachs, H.** *Spectra of Graphs - Theory and Application*, Academic Press, New York, 1979.
- Cvetković, D., Rowlinson, P. e Simić, S.** *Eigenspaces of graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- Del Vecchio, R. R., Gutman, I., Trevisan, V. e Vinagre, C. T. M.** (2009) On the spectra and energies of double-broom-like trees, *Kragujevac J. Sci.*, 31, 45-58.
- Doob, M.** (1982) A Surprising Property of the Least Eigenvalue of a Graph, *Linear Algebra Appl.*, 46, 1-7.



Grone, R. e Merris, R. (1990), Ordering Trees by Algebraic Connectivity, *Graphs and Combinatorics*, 6, 229-237.

Hou, Y. e Zhou, H. (2005), Trees with exactly two main eigenvalues, *Acta of Hunan Normal University*, v. 2, n. 28, pp. 1-3 (in Chinese).

Rowlinson, P. (2007) The principal Eigenvalues of a Graph: A Survey, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 1, 445-471.