O número de Helly na convexidade geodética

Moisés Teles Carvalho Junior

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, UFRJ
moisesteles@cos.ufrj.br

Mitre Costa Dourado

Instituto de Matemática, UFRJ
mitre@nce.ufrj.br

Jayme Luiz Szwarcfiter

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, UFRJ
Instituto de Matemática, UFRJ
jayme@cos.ufrj.br

Resumo

Um conjunto de vértices S de um grafo G é geodesicamente convexo se todos os vértices de qualquer caminho mínimo entre dois vértices de S pertencem a S. O número de Helly de um grafo G na convexidade geodética é o menor inteiro k para o qual toda família $\mathcal{C}$, de conjuntos geodesicamente convexos k-intersectante de G, possui um vértice comum a todos os conjuntos de $\mathcal{C}$. Neste trabalho determinamos o número de Helly das árvores, grades completas e ciclos. Mostramos também que para grafos completos K_n, k-partidos completos e de distância hereditária o número de Helly é igual ao tamanho da clique máxima do grafo. Além disso, apresentamos uma caracterização parcial dos grafos que possuem número de Helly igual a dois. Finalmente, são descritos dois limitantes inferiores para o número de Helly geodético de um grafo.

PALAVRAS-CHAVE: Convexidade, convexidade geodética, número de Helly.
ÁREA PRINCIPAL: Teoria dos grafos.

Abstract

A subset of vertices $S \subseteq V(G)$ of a graph G is *geodesically convex* if all vertices belonging to any shortest path between two vertices of S lie S. The *Helly number* of G is the least integer k, such that any subfamily of k-intersecting geodesically convex sets of G contain a common vertex. In this work, we determine the Helly number of trees, complete grids, cycles and complete r-partitite graphs. We also show that the Helly number of a distance-hereditary graph equals maximum size of a clique in G, and describe a partial characterization of graphs having Helly number 2. Finally, we present two general lower bounds for the Helly number of a graph.

KEYWORDS: Convexity, geodetic convexity, Helly number.
MAIN AREA: Graph Theory.

1 Introdução

Dado um conjunto finito V, uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de V é dita uma *convexidade* em V quando o conjunto vazio e o conjunto V pertencem a $\mathcal{C}$, além disso quando é fechada por interseção e a união de uma cadeia de elementos ordenada por inclusão de $\mathcal{C}$ está em $\mathcal{C}$. Os subconjuntos de $\mathcal{C}$ são ditos conjuntos convexos. O menor conjunto convexo contendo $X \subseteq V$ é denominado *envoltória convexa* de X, ou *fecho convexo* de X [14]. Para convexidades finitas, ser fechada por união de uma cadeia de elementos ordenada por inclusão o resultado é igual ao último elemento, ou seja, tal condição é satisfeita de forma direta [3, 4, 8, 9].

Exemplo 1.1. Dados o conjunto $V = \{a, b, c, d, e\}$ e a família de conjuntos $\mathcal{C} = \{\emptyset,\{\text{a}\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c, d, e\}\}$, então $\mathcal{C}$ satisfaz as condições mencionadas anteriormente, ou seja, $\mathcal{C}$ é uma convexidade em V.

Inspirado no conceito de convexidade definido anteriormente, utilizamos tal conceito em grafos.

Existem diversas convexidades relevantes em grafos sendo amplamente estudadas atualmente, como por exemplo a *convexidade* P_3, que trata de caminhos de tamanho três, *convexidade monofônica*, que é sobre caminhos induzidos, entre outras .

O estudo de convexidades em grafos encontra aplicações nas redes sociais, por meio das relações de amizade, além de estratégias de marketing, computação distribuída, entre outras.

O foco deste trabalho foi pesquisar uma convexidade em grafos específica conhecida como *geodética* [10].

A *distância* $d(u, v)$ entre dois vértices u, $v \in G$ é o comprimento de um caminho mínimo entre u e v em G. Quando não existir um caminho, $d(u, v)$ é considerada infinita. Uma *geodésica* entre dois vértices u e v de um grafo é um caminho entre u e v com comprimento $d(u, v)$.

A partir dessa definição, é fácil perceber que uma geodésica entre dois vértices u e v é um caminho mínimo entre u e v.

Nesta convexidade, dados um grafo G e um conjunto $S \subseteq V(G)$, um conjunto S é dito *convexo* se, para quaisquer dois vértices em S, todos os caminhos mínimos entre esses dois vértices estão em S.

O *intervalo fechado* entre dois vértices u e v é o conjunto $I[u, v]$ de todos os vértices pertencentes a alguma geodésica entre u e v. O intervalo fechado pode ser também definido por fecho geodésico. Se $S \subseteq V(G)$, então $I[S] = \bigcup_{u,v \in S} I[u, v]$.

Podemos definir também conjunto convexo utilizando o conceito de intervalo da seguinte forma: Dados um grafo G e $S \subseteq V(G)$, então S é dito convexo em G se $I[S] = S$.

Dados um grafo G e $S \subseteq V(G)$, denotamos por $I_h[S]$ o menor conjunto convexo de G que contém S. Denominamos $I_h[S]$ por fecho convexo (ou envoltória convexa) de S em G. Se $I_h[S] = V(G)$, então S é chamado *conjunto envoltória* de G. O *número envoltória* de G é a cardinalidade do menor conjunto envoltória de G.

Na Figura 1, temos que no grafo à esquerda os vértices marcados em negrito não formam um conjunto convexo, pois o vértice a pertence ao caminho mínimo entre os vértices b e f, já no grafo à direita os vértices em negrito formam um conjunto convexo.

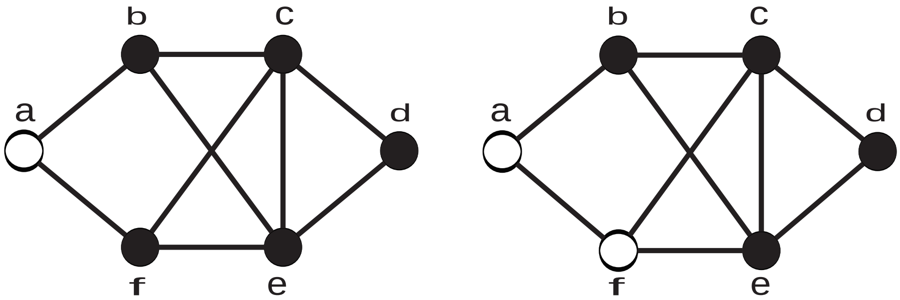

Figura 1: Exemplo de conjuntos convexos

Neste trabalho, estudamos o conceito de convexidade associado a um parâmetro conhecido por propriedade de Helly [2, 11].

A propriedade de Helly tem esse nome graças ao teorema proposto pelo matemático austríaco Eduard Helly, em 1923 [15].

O teorema diz que em um espaço euclidiano d-dimensional, se em uma coleção finita de $n > d$ conjuntos convexos, qualquer $d+1$ conjuntos têm um elemento em comum, então existe ao menos um elemento em comum em todos os conjuntos.

Tal teorema originou a conhecida propriedade de Helly, que diz que uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um conjunto atende a *propriedade de Helly* se, para toda subfamília formada por subconjuntos dois a dois intersectantes, então existe um elemento comum a todos os subconjuntos.

A propriedade de Helly possui aplicações em diversas áreas. Em otimização em problemas de localização e programação linear. Na ciência da computação possui aplicação em biologia computacional, banco de dados, processamento de imagens, entre outras. Além disso, motivou o estudo de diversas classes de grafos, como os grafo clique-Helly, disk-Helly e hipergrafos Helly, entre outros.

Para tal conceito, trataremos a família de conjuntos convexos como um hipergrafo e seus conjuntos convexos como hiperarestas [2, 5].

Um *hipergrafo* $\mathcal{H}$ é um par ordenado $(V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$, onde $V(\mathcal{H}) = \{v_1, ..., v_n\}$, com $n < \infty$, e $E(\mathcal{H}) = \{E_1, ..., E_m\}$, onde cada E_i, $1 \leq i \leq m$, e $E_i \subseteq V(\mathcal{H})$.

Os elementos de $V(\mathcal{H})$ são os vértices do hipergrafo e os conjuntos $E_1, E_2, ..., E_m$ são chamadas hiperarestas, onde $V(\mathcal{H}) = \bigcup_{E_i \in E(\mathcal{H})} E_i$. O *núcleo* de $\mathcal{H}$ é definido como *núcleo*$(\mathcal{H}) = E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_m$.

Um hipergrafo é dito k-$uniforme$ se todas suas as hiperarestas possuem exatamente k vértices. Assim definido, todo grafo G é um hipergrafo $\mathcal{H}$ 2-$uniforme$.

Um conjunto S é um *q-conjunto* se $|S| = q$, S é um *q^--conjunto* se $|S| \leq q$ e S é um *q^+-conjunto* se $|S| \geq q$.

Um hipergrafo $\mathcal{H}'$ é um *hipergrafo parcial* de $\mathcal{H}$ se $E(\mathcal{H}') \subseteq E(\mathcal{H})$.

Um hipergrafo $\mathcal{H}$ é dito *p-intersectante* se todo p^--hipergrafo parcial de $\mathcal{H}$ possui núcleo não vazio.

O foco desse estudo é definir o número de Helly para algumas classes de grafos num contexto de convexidade.

O *número de Helly*, cuja definição é uma extensão do conceito primitivo da propriedade de Helly, ou seja, é o menor número inteiro k tal que para toda subfamília k-intersectante, o núcleo é não vazio.

Quando tal condição é atendida, dizemos que o número de Helly do grafo é igual a k, ou dizemos também que o grafo é k-Helly. Em particular, quando $k = 2$ dizemos simplesmente que a família atende à propriedade de Helly.

É fácil perceber que, se uma família $\mathcal{C}$ for k-Helly, será também p-Helly para $k < p$.

Existem alguns parâmetros relativos às convexidades e cada um desses parâmetros, em geral, são inspirados em resultados clássicos no espaço euclidiano. Neste trabalho, estudamos o parâmetro conhecido como o número de Helly.

Dada uma família de conjuntos convexos, que por ser uma família de subconjuntos dos vértices de um grafo é um hipergrafo, estudamos para quais classes, ou características, o número de Helly desse grafo.

O teorema sobre hipergrafos de Berge e Duchet apresentado a seguir, mostra uma caracterização de um hipergrafo ser ou não k-Helly.

Teorema 1.2 (Berge e Duchet [1, 7])**.** *Um hipergrafo H é k-Helly se e somente se para todo conjunto A de vértices com $|A| = k + 1$, a interseção das hiperarestas E_j com $|E_j \cap A| \geq k$ é não vazio.*

A demonstração deste teorema está no livro *Hypergraphs* de C. Berge [7].

O problema de determinar se um grafo G dado é k-Helly é co-NP-completo [12].

2 O número de Helly na convexidade geodética

Inicialmente apresentaremos os resultados preliminares para algumas classes de grafos mais simples, como caminhos, árvores, entre outras e posteriormente trabalharemos com algumas classes mais complexas.

A partir de algumas dessas classes mais conhecidas, foi possível detectar alguns limites inferiores para o parâmetro com o qual trabalhamos.

2.1 Árvores

Teorema 2.1 (Árvores)**.** *Dado um grafo G do tipo árvore. O número de Helly na convexidade geodética é igual a dois.*

Demonstração. Todo conjunto convexo em um grafo do tipo árvore é uma subárvore, e sabe-se que subárvores de uma árvore atende à propriedade de Helly.

Logo, $h(G) = 2$.

□

2.2 Ciclos

Teorema 2.2 (Ciclos)**.** *Seja G um grafo do tipo ciclo com n vértices denotado por C_n, com $n \geq 4$. O grafo G é 3-Helly na convexidade geodética.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que C_n não é 3-Helly. Então, pelo teorema de Berge e Duchet (Teorema 1.2), existem vértices v_1, ... , $v_4 \in V(C_n)$ e conjuntos convexos S_1, ... , $S_4 \in V(C_n)$ tal que $v_j \in S_i$, para $1 \leq i, j \leq 4$, se e somente se $i \neq j$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que existe um caminho de v_1 até v_3, contendo v_2 e não contendo v_4.

Além disso, podemos assumir que a envoltória convexa de v_1 e v_3 contém v_2. Mas então S_2 contém v_1 e v_3, mas não contém v_2, uma contradição.

Logo, o grafo G é 3-Helly.

$\square$

É fácil constatar que o ciclo de tamanho 3, ou seja, C_3 possui o número de Helly na convexidade geodética igual a 3, pois os conjuntos convexos com dois ou mais vértices são as arestas e o próprio grafo $G = C_3$.

Assim, temos que os conjuntos convexos formado pelas arestas são 2-intersectantes e o núcleo é vazio, ou seja, C_3 não é 2-Helly. Logo $h(C_3) = 3$.

Para um grafo $G = C_4$, o número de Helly será igual a dois.

Da mesma forma que o C_3, os conjuntos convexos num grafo C_4 com dois ou mais vértices também são somente as suas quatro arestas e o grafo inteiro.

Assim, toda família 2-intersectante é formada por duas arestas adjacentes ao mesmo vértice v e o próprio grafo, ou seja, o vértice v pertence ao núcleo.

Logo, $h(C_4) = 2$.

2.3 Grafos completos

Teorema 2.3 (Completos). *Dado um grafo G completo com n vértices, denotado por K_n, então $h(G) = n$ se e somente se G é um grafo completo .*

Demonstração. Seja $G = K_n$ um grafo completo com n vértices.

Tomando no grafo K_n a família de conjuntos convexos $S_1 = \{v_2, v_3, ..., v_n\}$, $S_2 = \{v_1, v_3, ..., v_n\}$, ... , $S_n = \{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$, constata-se facilmente que estes formam uma família de conjuntos convexos $(n-1)$-intersectantes com núcleo vazio, ou seja, $\bigcap_{i=1}^{n} S_i = \emptyset$.

Assim, G não é $(n-1)$-Helly.

Logo $h(G) = n$.

Supondo $h(G) = n$ e, supondo por contradição, que G é um grafo não completo, ou seja, existem ao menos dois vértices não adjacentes em G.

Tomemos os conjuntos $A_1 = \{v_2, v_3, ..., v_n\}$, $A_2 = \{v_1, v_3, ..., v_n\}$, ... , $A_n = \{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$.

Tais conjuntos são claramente $(n-1)$-intersectante.

Tomando o fecho convexo de cada um desses conjuntos, temos os conjuntos convexos $S_1 = H(A_1)$, $S_2 = H(A_2)$, ... , $S_n = H(A_n)$.

Assim, cada conjunto convexo S_k terá, ao menos $n-1$ elementos.

Como o grafo G não é completo, porém conexo, existe um vértice v_i, para algum i, $1 \leq i \leq n$, tal que dois de seus vizinhos não são adjacentes, vizinhos estes que pertencem a A_i.

Desse modo, $v_i \in H(A_i)$, e como $v_i \in A_j$, para todo $j \neq i$, então $v_i \in H(A_j)$, para todo j, $1 \leq j \leq n$.

Logo $v_i \in S_j$, para todo j, $1 \leq j \leq n$.

Pelo Teorema de Berge e Duchet 1.2, temos que, dado o conjunto $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, ou seja, $|A| = n$, a interseção dos conjuntos convexos S_j, com $|S_j \cap A| \geq n-1$ é não vazio, pois $v_i \in S_j$, para todo j, $1 \leq j \leq n$.

Logo, G é $(n-1)$-Helly, ou seja, $h(G) \leq n-1$, uma contradição.

Logo G é um grafo completo.

□

3 Limites inferiores para o número de Helly

Uma vez visto tais resultados, constata-se que existem dois limitantes inferiores para o número de Helly na convexidade geodética para grafos que poderão ser aplicados naqueles que não se encaixam em nenhuma das classes estudadas até aqui.

Para um melhor entendimento de um desses limitantes, apresentaremos a definição de um ciclo no grafo com uma característica específica que chamaremos de ciclo geodético.

Dado um grafo G, um ciclo induzido C_l, $l \neq 4$, em G é dito *ciclo geodético* se os vértices de todo caminho P_k no ciclo, para $k = \lceil \frac{l}{2} \rceil$, formam um conjunto convexo.

Um dos limitantes inferiores encontrados é o tamanho da clique máxima do grafo, que é uma consequência direta da caracterização de grafos completos, ou seja, se o grafo possuir uma clique de tamanho k, então o número de Helly será pelo menos k, ou seja, $h(G) \geq k$.

Além do tamanho da clique máxima do grafo, outro limitante inferior ao número de Helly é a existência no grafo de ciclos geodéticos.

Assim, se um grafo possuir um ciclo geodético, temos que o número de Helly necessariamente será igual ou superior a três, ou seja, $h(G) \geq 3$. Tal fato é consequência do resultado obtido para ciclos.

4 Uma caracterização parcial para $\mathbf{h(G) = 2}$

Após os resultados preliminares com as respectivas consequências que nos leva a limitantes inferiores, é possível perceber que algumas características nos fornecem uma caracterização para um grafo G qualquer atender ou não a propriedade de Helly.

É bem fácil perceber que grafos que possuem cliques maiores que dois ou que possuem *ciclos geodéticos*, não atendem à Propriedade de Helly, pelos limitantes inferiores descritos.

Assim, para caracterizar um grafo com o número de Helly igual a dois, introduziremos o seguinte lema:

Lema 4.1. *Seja G um grafo que não contém ciclos de tamanho quatro. O grafo G é do tipo árvore se e somente se o grafo G não contém ciclo geodético.*

Demonstração. Seja G um grafo do tipo árvore.

Como árvores não possuem ciclos, então o grafo G não contém ciclos geodéticos.

Seja G um grafo que não contém ciclos geodéticos.

Suponhamos, por contradição, que G não é do tipo árvore. Assim, existe ao menos um ciclo em G.

Seja C_l um ciclo induzido em G.

Como o grafo G não contém ciclos geodéticos então existe um caminho P_k contido em C_l tal que P_k, com $k = \lceil \frac{l}{2} \rceil$, não é um conjunto convexo.

Assim, existem vértices u e v em P_k e existe um caminho entre u e v não contido em P_k que é mínimo.

Dessa forma, temos um novo ciclo $C_{l'}$, onde $l' < l$, contendo u e v, formado pelo caminho entre u e v em P_k e o caminho entre u e v fora de P_k.

Como o grafo G não contém ciclos geodéticos, o ciclo $C_{l'}$ não é geodético, assim podemos usar o mesmo raciocínio anterior em $C_{l'}$ encontrando um ciclo $C_{l''}$, com $l'' < l'$.

Como o grafo G é finito, assim, aplicando esse mesmo argumento um número limitado de vezes, encontraremos, em algum momento, um ciclo mínimo em G. Tal ciclo não é geodético, pois o grafo G, por hipótese, não contém ciclos geodéticos. Então tal ciclo só poderá ser um C_4. Contradição, pois o grafo G não contém ciclos de tamanho quatro.

Logo o grafo G é do tipo árvore.

□

A partir desse lema, temos então a seguir uma caracterização direta para os grafos que atendem a propriedade de Helly.

Teorema 4.2. *Seja G um grafo sem ciclos de tamanho quatro. O grafo G é sem ciclos geodéticos se e somente se $h(G) = 2$.*

Demonstração. Seja G um grafo sem ciclos de tamanho quatro.

Supondo G um grafo com $h(G) = 2$ e supondo, por contradição, que o grafo G contém um ciclo geodético.

Assim, temos que o grafo é limitado inferiormente pelo ciclo, ou seja, $h(G) \geq 3$. Contradição, pois $h(G) = 2$.

Logo G é um grafo sem ciclos geodéticos.

Supondo G um grafo sem ciclos geodéticos.

Como G não possui ciclos de tamanho quatro, pelo Lema 4.1 temos que G é uma árvore.

Logo $h(G) = 2$.

□

5 Outras classes de grafos

Nesta seção, apresentaremos algumas classes não tão simples, ou não tão comuns quanto as anteriores.

5.1 Grafos k-partidos completos

Teorema 5.1 (k-partido)**.** *Dado um grafo G k-partido completo. Então o número de Helly na convexidade geodética será igual a k.*

Demonstração. Seja G um grafo k-partido completo.

Temos no grafo G então k conjuntos independentes, a saber $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, ... , $\mathcal{M}_k$.

Como cada vértice de $\mathcal{M}_i$ é adjacente a todos os vértices dos conjuntos $\mathcal{M}_j$, para $i \neq j$, temos que seus conjuntos convexos não vazios são os vértices, as arestas, as cliques, variando o tamanho de três até k, sendo estas cliques de tamanho k as máximas do grafo, além do próprio grafo G.

Desse modo, não temos no grafo conjuntos convexos com mais vértices que os conjuntos convexos formado pelas cliques máximas de G, a não ser o próprio grafo.

Como vimos anteriormente que a clique máxima é um limitante inferior para o número de Helly, então este será igual ao tamanho da clique máxima, ou seja, $h(G) = k$.

□

Em vista disso, é interessante perceber que se estendermos esse resultado para o grafo k-partido, onde cada um dos k conjuntos independentes possui apenas um único vértice, que também é um grafo completo com k vértices, tal resultado também corrobora o resultado que encontramos para grafos completos.

5.2 Grades

Teorema 5.2 (d-Grade)**.** *Dado um grafo $G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ onde G é do tipo d-grade completa, finita, (grade de dimensão d, $2 \leq d < \infty$) então G possui número de Helly na convexidade geodética igual a dois.*

Demonstração. Seja G um grafo do tipo d-*grade* completa.

Representaremos cada vértice v de G como pontos de coordenadas inteiras positivas no espaço d-dimensional, com $2 \leq d < \infty$, e cada dois vértices u e w são adjacentes se e somente se a distância euclidiana entre u e w é igual a um [6].

Assim, o conjunto dos vértices $V(G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)) = \{v = (v_1, v_2, \ldots, v_d)/1 \leq v_1 \leq \alpha_1, 1 \leq v_2 \leq \alpha_2, \ldots, 1 \leq v_d \leq \alpha_d\}$.

Como a clique máxima é um limitante inferior natural, e como toda grade possui como clique máxima um P_2, temos que $h(G) \geq 2$.

Como todo convexo de uma d-grade completa é uma d-subgrade completa então cada S_i, $1 \leq i \leq 3$, é uma d-subgrade completa de G.

Assim, dados vértices a, b e c em G, cada conjunto convexo S_i, é da forma:

$S_1 = \{(u_1, u_2, \ldots, u_d)/min\{b_1, c_1\} \leq u_1 \leq max\{b_1, c_1\}$ e $min\{b_2, c_2\} \leq u_2 \leq$
$\leq max\{b_2, c_2\}, \ldots, min\{b_d, c_d\} \leq u_d \leq max\{b_d, c_d\}\}$

$S_2 = \{(v_1, v_2, \ldots, v_d)/min\{a_1, c_1\} \leq v_1 \leq max\{a_1, c_1\}$ e $min\{a_2, c_2\} \leq v_2 \leq$
$\leq max\{a_2, c_2\}, \ldots, min\{a_d, c_d\} \leq v_d \leq max\{a_d, c_d\}\}$

$S_3 = \{(w_1, w_2, \ldots, w_d)/min\{a_1, b_1\} \leq w_1 \leq max\{a_1, b_1\}$ e $min\{a_2, b_2\} \leq w_2 \leq$
$\leq max\{a_2, b_2\}, \ldots, min\{a_d, b_d\} \leq w_d \leq max\{a_d, b_d\}\}$

Tomando um vértice $e = (e_1, e_2, \ldots, e_d)$, de modo que cada uma de suas coordenadas $e_k = mediana\{a_k, b_k, c_k\}$, $1 \leq k \leq d$, verifica-se facilmente que $e \in S_1$, $e \in S_2$ e $e \in S_3$, ou seja, o vértice $e \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$, assim $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \neq \emptyset$.

Logo, $h(G) = 2$.

□

5.3 Distância hereditária

Teorema 5.3 (Distância hereditária)**.** *Seja G um grafo distância hereditária. O número de Helly na convexidade geodética é igual ao tamanho de sua clique máxima.*

Demonstração. Seja G um grafo distância hereditária.

Todo caminho mínimo em G é também um caminho induzido, sendo assim, todo conjunto convexo geodético S em G é um conjunto convexo monofônico em G.

Pelo Teorema de *Duchet* [3], dado um grafo G qualquer, o número de Helly do grafo na convexidade monofônica é sempre igual ao tamanho de sua clique máxima.

Logo, o número de Helly para convexidade geodética de um grafo distância hereditária é igual ao tamanho de sua clique máxima.

□

Referências

[1] C. Berge, P. Duchet, A generalization of Gilmore's Theorem, *Recent Advances in Graph Theory* (Fielder, M., ed.), Acad. Praha, Prague, 1975, 49–55.

[2] M. C. Dourado, F. Protti, J. L. Szwarcfiter, Complexity aspects of the Helly property: Graphs and hypergraphs, *The Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Surveys*, n. 17, 2009.

[3] P. Duchet, Convex set in graphs II. Minimal path convexity. *Journal of Combinatorial Theory*, séries **B 44**, 1988, 307–316.

[4] V. F. Santos, Convexidades em Grafos: Intermediações, Parâmetros e Conversões, *Tese de doutorado*, UFRJ/COPPE, 2013.

[5] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland, Dunod, Paris, 1973.

[6] A. Itai, C. H. Papadimitriou, J. L. Szwarcfiter, Hamilton paths in grid graphs *Society for Industrial and Applied Mathematics*, v.11, **4**, 1982, 676–686.

[7] C. Berge, *Hypergraphs: combinatorics of the finite set*, North-Holland Mathematical Library, Elsevier, Paris, 1989.

[8] M. C. Dourado, J. G. Gimbel, J. Kratochvíl, F. Protti, J. L. Szwarcfiter, On the computation of the hull number of a graph, *Discrete Mathematics*, **309**, 2008, 5668–5674.

[9] D. A. Rocha, Partições Convexas Geodésicas e Contornos em Grafos, *Tese de doutorado*, UFRJ/COPPE, 2010.

[10] M. C. Dourado, D. Rautenbach, V. G. Sá, J. L. Szwarcfiter, Polynomial time algorithm for the Radon number of grids in the geodetic convexity, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, Playa del Carmen, v.44, 2013, 371–376.

[11] P. Duchet, Radon and Helly number of segment spaces, Joint Proceedings of the International Workshop on Metric and Convex Graph Theory and International Instructional workshop on Convexity in Discrete Structures (Kovalam and Barcelona, 2006), *The Ramanujan Mathematical Society Lecture Note Series*, Chennai, India, 2007, 1–12.

[12] M. T. Carvalho Jr., J. L. Szwarcfiter, The complexity of deciding the Helly number of a graph in the geodetic convexity, manuscript, 2014.

[13] M. C. Dourado, J. L. Szwarcfiter, The dinamic of the convex hull of a set of vertices of a grph: a survey, *ICRTGC-2010*, Cochin, Índia, 2010.

[14] M. L. J. Van de Vel, *Theory of convex structures*, North-Holland Mathematical Library, Elsevier, Amsterdan, London, New York, Tokyo, 1993.

[15] E. Helly, Ueber Mengen konvexer Koerper mit gemeinschaftlichen Punkter, Jahresber, *Math Verein.* v.32, 1923, 175–176.