

## A complexidade do problema sanduíche para grafos fortemente cordais- $(k, \ell)$ e cordais- $(k, \ell)$

**Fernanda Couto**

COPPE - UFRJ

Rio de Janeiro

nandavdc@gmail.com

**Luerbio Faria**

UERJ

Rio de Janeiro

luerbio@cos.ufrj.br

**Sulamita Klein**

IM - COPPE - UFRJ

Rio de Janeiro

sula@cos.ufrj.br

### RESUMO

Um grafo é *cordal* se cada um de seus ciclos de tamanho pelo menos 4 tem uma *corda*, i.e., uma aresta entre vértices não consecutivos do ciclo. Dizemos que um grafo é *fortemente cordal* se ele é cordal e se cada um de seus ciclos pares de tamanho pelo menos 6 tem uma *corda ímpar*, i.e., uma aresta que une vértices não consecutivos separados por uma distância ímpar no ciclo. Um grafo é  $(k, \ell)$  se seu conjunto de vértices pode ser particionado em, no máximo,  $k$  conjuntos independentes e  $\ell$  cliques. No PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(k, \ell)$  (resp. CORDAIS- $(k, \ell)$ ) temos como entrada dois grafos  $G^1 = (V, E^1)$  e  $G^2 = (V, E^2)$  tais que  $E^1 \subseteq E^2$  e perguntamos se existe um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$  e que seja um grafo fortemente cordal- $(k, \ell)$  (resp. cordal- $(k, \ell)$ ). Este trabalho consiste de todos os resultados obtidos até o momento concernentes à dicotomia  $P$  vs  $NP$  da complexidade da solução destes dois problemas. Especificamente, mostramos que, para grafos fortemente cordais- $(k, \ell)$ , o problema é NP-completo quando  $k \geq 1$  e  $\ell \geq 1$  e para  $k = 0$  e  $\ell \geq 3$ . Para grafos cordais- $(k, \ell)$ , provamos que o problema é NP-completo para  $k \geq 1, \ell \geq 2$ ; para  $k \geq 2, \ell \geq 1$  e para  $k = 0$  e  $\ell \geq 3$ . Da literatura, temos que o problema sanduíche para grafos cordais- $(1, 1)$  é polinomial. Nós provamos que ambos os problemas são polinomiais se  $k = 0$  e  $\ell \leq 2$  ou se  $k \leq 2$  e  $\ell = 0$ . Os dois problemas estão em aberto quando  $k \geq 3$  e  $\ell = 0$ .

**PALAVRAS CHAVE.** Problemas Sanduíche, Cordal- $(k, \ell)$ , Fortemente Cordal- $(k, \ell)$ .

**Área Principal:** Teoria dos Grafos

### ABSTRACT

A graph is *chordal* if each of its cycles of length at least 4 has a chord, i.e., an edge between two non-consecutive vertices of the cycle. We say that a graph is *strongly chordal* if it is chordal and each of its even cycles of length at least 6 has an *odd chord*, that means an edge between two non-consecutive vertices that are apart in the cycle by an odd distance. A graph is  $(k, \ell)$  if its vertex set can be partitioned into at most  $k$  independents sets and  $\ell$  cliques. In STRONGLY CHORDAL- $(k, \ell)$  GRAPH SANDWICH PROBLEM (resp. chordal- $(k, \ell)$ ) we have as input data two graphs  $G^1 = (V, E^1)$  and  $G^2 = (V, E^2)$  such that  $E^1 \subseteq E^2$  and we ask if there exists a graph

$G = (V, E)$  such that  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$  and  $G$  is strongly chordal- $(k, \ell)$  (resp. chordal- $(k, \ell)$ ). This work consists of all results obtained until now concerning the dichotomy  $P$  vs  $NP$  of both problems solution complexity. Specifically, we showed that, for strongly chordal- $(k, \ell)$  graphs, the problem is NP-complete when  $k \geq 1$  and  $\ell \geq 1$  or  $k = 0$  and  $\ell \geq 3$  and polynomial in cases in which  $k = 0$  and  $\ell \leq 2$  or  $k \leq 2$  and  $\ell = 0$ . For chordal- $(k, \ell)$  graphs, we proved that the problem is NP-complete for  $k \geq 1, \ell \geq 2, k \geq 2, \ell \geq 1$  or  $k = 0$  e  $\ell \geq 3$  and polynomial when  $k = 0$  and  $\ell \leq 2$  or  $k \leq 2$  and  $\ell = 0$ .

**KEYWORDS.** Sandwich Problems, Chordal- $(k, \ell)$ , Strongly Chordal- $(k, \ell)$ .

**Main Area:** Graph Theory.

## 1. Introdução

Os PROBLEMAS SANDUÍCHE surgiram em 1995 como uma generalização natural dos PROBLEMAS DE RECONHECIMENTO, que, por sua vez, consistem em determinar se um grafo pertence ou não a uma determinada classe de grafos. Introduzidos por Golubic, Kaplan & Shamir (1995), os PROBLEMAS SANDUÍCHE foram definidos da seguinte maneira:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA A PROPRIEDADE  $\Pi$  - ( $\Pi$ -SP)

*Entrada:* Dois grafos  $G^1 = (V, E)$  e  $G^2 = (V, E^2)$  tais que  $E^1 \subseteq E^2$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$  e que satisfaça a propriedade  $\Pi$ ?

Observe que se o grafo  $G$  existir, estará “ensanduichado” entre  $G^1$  e  $G^2$ . Sendo assim,  $G$  é chamado de GRAFO SANDUÍCHE para o par  $(G^1, G^2)$ . A fim de que o problema não seja trivial, é interessante trabalhar com grafos de entrada que não satisfaçam à propriedade  $\Pi$ .

Denotamos por  $E^3 = \overline{E(G^2)}$  o conjunto de arestas *proibidas*. Chamamos  $E^1$  de conjunto de arestas *obrigatórias* ou *forçadas* e  $E^2 \setminus E^1$  de conjunto de arestas *opcionais*. Desta forma, um grafo sanduíche não pode conter arestas proibidas, pode conter algumas arestas opcionais, e deve conter todas as arestas obrigatórias.

O PROBLEMA DE RECONHECIMENTO para uma classe de grafos  $\mathcal{C}$  é equivalente ao PROBLEMA SANDUÍCHE particular onde  $E^1 = E^2$ , ou seja, o conjunto de arestas opcionais é vazio. Observe que, caso o PROBLEMA DE RECONHECIMENTO seja NP-completo, o PROBLEMA SANDUÍCHE também o será.

Os PROBLEMAS SANDUÍCHE já foram estudados para diversas classes de grafos. Alguns resultados podem ser encontrados em Dantas *et al.* (2009), Dourado *et al.* (2008), Figueiredo *et al.* (2007), Sritharan (2008).

Neste artigo estudamos o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(k, \ell)$  e CORDAIS- $(k, \ell)$ . Nosso objetivo é classificar completamente as complexidades de solução desses problemas. Vamos apresentar aqui os resultados obtidos até o momento concernentes a ambos os problemas.

Sejam  $G = (V, E)$  um grafo não direcionado e  $C$  um ciclo de  $G$ . Uma *corda* em  $G$  é uma aresta entre vértices não consecutivos de  $C$ . Um grafo é *cordal* se todos os seus ciclos de tamanho pelo menos 4 têm uma corda.

Um *sol* é um grafo cordal com  $2n$  vértices, para algum  $n \geq 3$ , cujo conjunto de vértices pode ser particionado em um conjunto independente  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  e uma clique  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , de modo que cada vértice  $w_i$  tem exatamente dois vizinhos,  $u_j$  e  $u_{(j+1) \bmod n}$ .

Um grafo é *fortemente cordal* se é cordal e não contém um sol como subgrafo induzido.

Um subconjunto  $K$  (resp.  $S$ ) de vértices de  $G$  é uma *clique* (resp. *conjunto independente*) se entre cada par de vértices distintos de  $K$  (resp.  $S$ ) existe (resp. não existe) um aresta em  $G$ .

Um grafo é  $(k, \ell)$  se pode ter seu conjunto de vértices particionado em, no máximo,  $k$  conjuntos independentes e em  $\ell$  cliques. Brandstädt (1996, 2005), Brandstädt, Le & Szymczak

(1998) mostraram que reconhecer se um grafo é  $(k, \ell)$  para  $k \geq 3$  ou  $\ell \geq 3$  é NP-completo e polinomial, caso contrário.

Sejam  $k, \ell$  dois inteiros não negativos. Denotamos por  $(\ell + 1)K_{k+1}$  o grafo obtido pela união disjunta de  $(\ell + 1)$  cópias de  $K_{k+1}$  (ver Figura 1).

Grafos cordais- $(k, \ell)$  já foram bem estudados na literatura. Feder *et al.* (2005), Hell *et al.* (2004, 2005) analisaram aspectos de complexidade e algorítmicos de grafos cordais- $(k, \ell)$ , provando que os problemas de reconhecimento para grafos cordais- $(k, \ell)$  e fortemente cordais- $(k, \ell)$  são solucionáveis em tempo polinomial, usando a seguinte caracterização:

**Teorema 1.1.** Hell *et al.* (2004) *A chordal graph  $G$  is  $(k, \ell)$  if and only if  $G$  does not contain a  $(\ell + 1)K_{k+1}$  as an induced subgraph.*

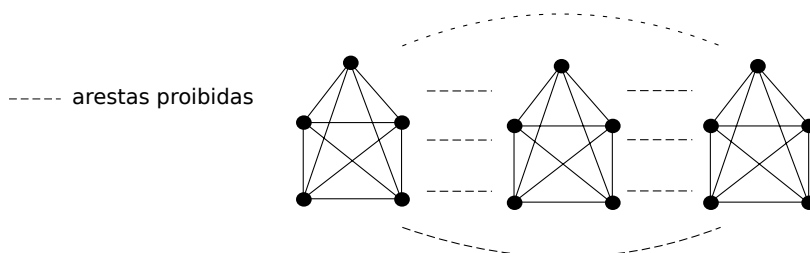


Figura 1:  $3K_5$  é subgrafo proibido para grafos cordais- $(4, 2)$ .

Esta caracterização conduz a um algoritmo polinomial para o reconhecimento dos grafos cordais- $(k, \ell)$ , com complexidade de tempo  $O(n(m + n))$ .

Dantas, Figueiredo & Faria (2004) mostraram que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS- $(2, 1)$  é NP-completo, assim como o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS, mostrado por Golumbic, Kaplan & Shamir (1995) e o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS, provado NP-completo por Figueiredo *et al.* (2007). Além disso, Couto *et al.* (2013) provaram que os PROBLEMAS SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(2, 1)$  e CORDAIS- $(2, 1)$  são NP-completos.

Neste artigo fazemos um compêndio de alguns resultados previamente submetidos e apresentamos um resultado inédito. De maneira geral, mostraremos que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(k, \ell)$  é NP-completo para  $k, \ell \geq 1$  ou  $k = 0$  e  $\ell \geq 3$ . Além disso, provaremos também que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS- $(k, \ell)$  é NP-completo para  $k = 1, \ell \geq 2$ ,  $k = 2, \ell \geq 1$  ou  $k = 0$  e  $\ell \geq 3$  e que ambos os problemas são solucionáveis em tempo polinomial para  $k = 0$  e  $\ell \geq 2$  ou  $k \geq 2$  e  $\ell = 0$ .

## 2. Problema Sanduíche para Grafos Fortemente Cordais- $(k, \ell)$ , $k \geq 1, \ell \geq 1$

Formalmente, o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(k, \ell)$  pode ser formulado da seguinte forma:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(k, \ell)$  - (FC $(k, \ell)$ -SP)

*Entrada:* Dois grafos  $G^1 = (V, E)$  e  $G^2 = (V, E^2)$  tais que  $E^1 \subseteq E^2$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  fortemente cordal- $(k, \ell)$  tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$ ?

Inicialmente vamos mostrar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(1, 1)$  é NP-completo.

### 2.1. Problema Sanduíche para Grafos Fortemente Cordais- $(1, 1)$

Com a finalidade de provar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(1, 1)$  é NP-completo faremos uma redução polinomial a partir do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BIPARTIDOS CORDAIS, que foi provado NP-completo por Sritharan (2008).

Um grafo bipartido é *bipartido cordal* se cada um de seus ciclos de tamanho pelo menos 6 tem uma corda.

O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BIPARTIDOS CORDAIS pode ser formulado da seguinte maneira:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BIPARTIDOS CORDAIS - (BIPARTIDO CORDAL-SP)

*Entrada:*  $G^1 = (V, E^1)$  e  $G^2 = (V, E^2)$ , tais que  $E^1 \subseteq E^2$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  bipartido cordal tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$ ?

A Proposição 2.1 de Dahlhaus (1991) será utilizada no decorrer da demonstração.

**Proposição 2.1.** *Sejam  $G = (X, Y, E)$  um grafo bipartido e  $G'$  um grafo obtido pela adição de arestas a  $X$  com o intuito de que  $X$  induza uma clique. Então  $G$  é bipartido cordal se e somente se  $G'$  é fortemente cordal.*

**Teorema 2.2.** *O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-(1, 1) é NP-completo.*

*Demonstração.* O problema está claramente em NP, uma vez que, dado um grafo  $G$  o reconhecemos fortemente cordal-(1, 1) em tempo polinomial bem como determinamos se ele é um grafo sanduíche para  $(G^1, G^2)$ . Para finalizar a prova da NP-completude, vamos considerar a seguinte instância  $(G^{1'}, G^{2'})$  do FORTEMENTE CORDAL-(1, 1)-SP obtida a partir de  $(G^1, G^2)$ , um instância do problema NP-completo BIPARTIDO CORDAL-SP [Sritharan (2008)], tal que existe um grafo sanduíche  $G$  bipartido cordal para  $(G^1, G^2)$  se e somente se existe um grafo sanduíche  $G'$  fortemente cordal-(1, 1) para  $(G^{1'}, G^{2'})$ .

Inicialmente observamos que BIPARTIDO CORDAL-SP é NP-completo mesmo quando  $G^1$  é conexo. Seja  $G^1 = (X, Y, E^1)$  um grafo bipartido com bipartição  $V = (X, Y)$  e defina  $G^{1'}$  e  $G^{2'}$  da seguinte forma:  $G^{1'} = (X, Y, E^{1'})$ , onde  $E^{1'} = E^1 \cup \{(x_i, x_j) | x_i, x_j \in X\}$  e  $G^{2'} = (V, E^2 \cup \{(x_i, x_j) | x_i, x_j \in X\})$ . Isto conclui a construção de  $(G^{1'}, G^{2'})$ .

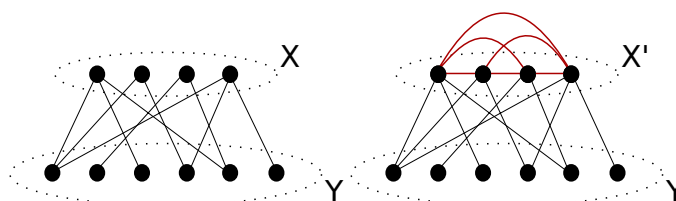


Figura 2: Exemplo da construção da instância especial para FC(1, 1)-SP

A prova da NP-completude do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-(1, 1) segue da Proposição 2.1. □

## 2.2. Problema Sanduíche para Grafos Fortemente Cordais-( $k, \ell$ ), $k \geq 1, \ell \geq 1$

Esta seção destina-se a mostrar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-( $k, \ell$ ) é NP-completo para  $k + \ell \geq 2$ , onde  $k$  e  $\ell$  são inteiros não nulos.

**Lema 2.3.** *Dados  $k \geq 1$  e  $\ell \geq 1$ , se FC( $k, \ell$ )-SP é NP-completo, então FC( $k, \ell + 1$ )-SP é NP-completo.*

*Demonstração.* Observe que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-( $k, \ell$ ),  $k \geq 1, \ell \geq 1$ , está em NP, dado que podemos checar em tempo polinomial se um grafo  $G$  é um grafo sanduíche para o par  $(G^1, G^2)$  e se  $G$  é fortemente cordal-( $k, \ell$ ) [Farber (1981), Hell *et al.* (2004)].

Consideramos a seguinte instância especial  $(G^{1'}, G^{2'})$  do  $FC(k, \ell + 1)$ -SP obtida a partir de  $(G^1, G^2)$ , uma instância do problema NP-completo  $FC(k, \ell)$ -SP, tal que existe um grafo sanduíche  $G$  fortemente cordal- $(k, \ell)$  para  $(G^1, G^2)$  se e somente se existe um grafo sanduíche  $G'$  fortemente cordal- $(k, \ell + 1)$ ,  $k \geq 1, \ell \geq 1$ , para  $(G^{1'}, G^{2'})$ .

A partir de  $G^1, G^2$ , definimos uma clique adicional  $K$  tal que  $|K| = k + 1$ . Além disso, fazemos  $V(G^{1'}) = V(G^{2'}) = V(G^1) \cup V(K)$ ,  $E(G^{1'}) = E^1 \cup E(K)$ , e  $E(G^{2'}) = E^2 \cup E(K)$ .

Isso conclui a construção da instância  $(G^{1'}, G^{2'})$  (ver Figura 3 como exemplo).

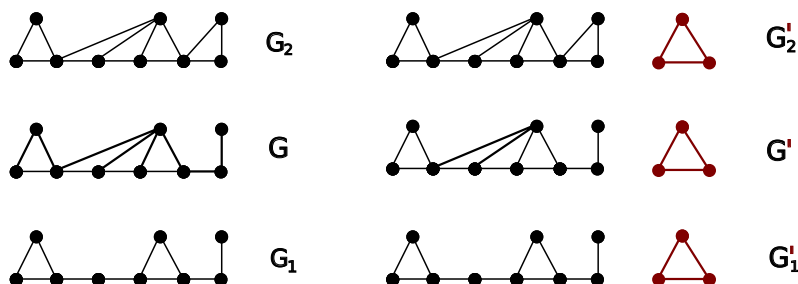


Figura 3: Exemplo da instância quando  $k = 2$  e  $\ell = 1$ . Note que quando  $G$  tem dois triângulos isolados  $(2K_3)$ ,  $G'$  terá 3 triângulos isolados.

Suponha que existe um grafo sanduíche  $G$  fortemente cordal- $(k, \ell)$  para  $(G^1, G^2)$ . Considere  $G'$  formado por  $G$  mais as arestas forçadas de  $(G^{1'}, G^{2'})$ . Com o objetivo de provar que o grafo  $G'$  é fortemente cordal, consideramos a sequência de eliminação forte iniciada por qualquer sequência de vértices de  $K$ , seguida pela sequência de eliminação forte do grafo  $G$ , fortemente cordal. Para provar que  $G'$  é  $(k, \ell + 1)$ ,  $k \geq 1, \ell \geq 1$ , consideramos uma  $(k, \ell)$ -partição para  $G$  e construímos uma  $(k, \ell + 1)$ -partição para  $G'$  formada pelos  $k$  conjuntos independentes e pelas  $\ell$  cliques de  $G$  juntamente com  $K$ .

Suponha agora que existe um grafo sanduíche  $G'$  fortemente cordal- $(k, \ell + 1)$  para  $(G^{1'}, G^{2'})$ ,  $k \geq 1, \ell \geq 1$ . Dado  $G = G' - K$ , provaremos que  $G$  é um grafo sanduíche fortemente cordal- $(k, \ell)$  para  $(G^1, G^2)$ . Suponha, por contradição que  $G$  não seja fortemente cordal- $(k, \ell)$ . Primeiramente, observe que, como “ser fortemente cordal” é uma propriedade hereditária,  $G$  deve ser fortemente cordal. Logo, se  $G$  não for fortemente cordal- $(k, \ell)$ , então isso se deve ao fato de que  $G$  não é um grafo- $(k, \ell)$ . Segue do Teorema 1.1 que  $G$  contém um  $(\ell + 1)(K_{k+1})$  como subgrafo induzido. Como  $G'$  é a união disjunta de  $G$  e  $K$ , em  $G'$  existe um  $(\ell + 2)K_{k+1}$  como subgrafo induzido formado por  $K$  e pelo  $(\ell + 1)(K_{k+1})$  induzido de  $G$ . Pelo Teorema 1.1,  $G'$  não é fortemente cordal- $(k, \ell + 1)$ , uma contradição. Consequentemente,  $G$  é fortemente cordal- $(k, \ell)$ .  $\square$

**Teorema 2.4.**  $FC(1, \ell)$ -SP, para  $\ell \geq 1$ , é NP-completo.

*Demonstração.* A prova para o Teorema 2.4 é feita por indução utilizando o Teorema 2.2 e o Lema 2.3.  $\square$

**Lema 2.5.** Dado  $k \geq 1$ ,  $FC(k, 1)$ -SP é NP-completo.

*Demonstração.* Claramente o  $FC(k, 1)$ -SP,  $k \geq 1$  está em NP [Farber (1981), Hell *et al.* (2004)]. Vamos considerar a seguinte instância especial  $(G^{1'}, G^{2'})$  do  $FC(k, 1)$ -SP obtida a partir de  $(G^1, G^2)$ , uma instância conexa do problema NP-completo BIPARTIDO CORDAL-SP [Sriritharan (2008)], tal que existe um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  bipartido cordal para  $(G^1, G^2)$  se e somente se existe um grafo sanduíche  $G'$  fortemente cordal- $(k, 1)$ ,  $k \geq 1$  para  $(G^{1'}, G^{2'})$ .

Observe que, se existe um grafo sanduíche  $G$  bipartido cordal, então  $G^1 = (V, E^1)$  é obrigatoriamente bipartido. Seja  $G^1 = (X, Y, E^1)$ . Dado  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$ , descrevemos:

- $V(G^{1'}) = V(G^{2'}) = V(G^1) \cup \{w_1, w_2, \dots, w_{k-1}\}$ ,
- $E(G^{1'}) = E^1 \cup \{(x_i, x_j) | x_i, x_j \in X\} \cup \{(w_i, w_j), (w_i, y_1) | i \neq j; i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}\}$ ,  
e
- $E(G^{2'}) = E^1 \cup \{(x_i, x_j) | x_i, x_j \in X\} \cup \{(w_i, w_j), (w_i, y_1) | i \neq j; i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}\}$ .

Isso conclui a construção da instância  $(G^{1'}, G^{2'})$  (veja a Figura 4 como um exemplo).

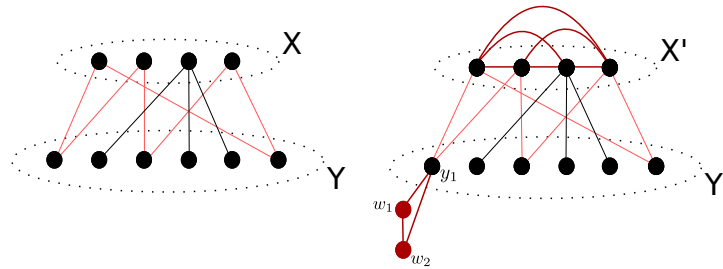


Figura 4: Exemplo da construção da instância quando  $k = 3$ .

Vamos provar que existe um grafo sanduíche  $G$  bipartido cordal para  $(G^1, G^2)$  se e somente se existe um grafo sanduíche  $G'$  fortemente cordal- $(k, 1)$  para o par  $(G^{1'}, G^{2'})$ .

Suponha que  $G$  é um grafo sanduíche bipartido cordal para  $(G^1, G^2)$ . Seja  $G'$  o grafo onde  $V(G') = V(G^{1'})$  e  $E(G') = E(G) \cup \{(w_i, w_j), (w_i, y_1) | i \neq j; i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}\} \cup \{(x_i, x_j) | x_i, x_j \in X\}$ . Vamos mostrar que  $G'$  é fortemente cordal e vamos exibir a partição do seu conjunto de vértices em  $k$  conjuntos independentes e uma clique. Observe que um sol de  $G'$  pertence inteiramente a um bloco de  $G'$ . Como  $y_1$  é uma articulação, temos que um sol de  $G'$  pertence ao grafo  $G'[V]$ . Pela Proposição 2.1,  $G'[V]$  é fortemente cordal. Então, podemos garantir que  $G'$  é fortemente cordal. Além disso, podemos exibir a  $(k, 1)$ -partição de  $G'$ : cada vértice de  $\{y_1, w_1, w_2, \dots, w_{k-1}\}$  participa de um conjunto independente e a clique é induzida por  $X$ .

Agora suponha que  $G'$  seja um grafo sanduíche fortemente cordal- $(k, 1)$  para  $(G^{1'}, G^{2'})$ . Provaremos que  $G = (V, E)$  é bipartido cordal, onde  $E = \{E(G') \setminus \{(x_i, x_j) | x_i, x_j \in X\}\}$ . Podemos assumir que a instância  $(G^1, G^2)$  do problema NP-completo para grafos bipartidos cordais [Sriharan (2008)] seja tal que  $G^1$  é conexo e  $G^2$  é bipartido. Suponha, por contradição, que  $G$  contenha um  $C_6$ . Neste caso, teríamos um sol em  $G'[V]$ , e, portanto, uma contradição.  $\square$

**Teorema 2.6.**  $FC(k, \ell)$ -SP é NP-completo for  $k \geq 1$  e  $\ell \geq 1$ .

*Demonstração.* Segue do Lema 2.5 e do Teorema 2.4.  $\square$

### 3. Problema Sanduíche para Grafos Cordais- $(k, \ell)$

Este problema pode ser formulado da seguinte forma:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS- $(k, \ell)$  -  $CARDAL(k, \ell)$ -SP

*Instância:*  $G^1 = (V, E^1)$  e  $G^2 = (V, E^2)$ , tal que  $E^1 \subseteq E^2$ .

*Questão:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$  e  $G$  é um grafo cordal- $(k, \ell)$ ?

Golumbic, Kaplan & Shamir (1995) provaram que o  $CARDAL(1, 1)$ -SP é solucionável em tempo polinomial. Entretanto, provamos que o  $CARDAL(2, 1)$ -SP é NP-completo [Couto *et al.* (2013)].

### 3.1. Problema Sanduíche para Grafos Cordais- $(k, \ell)$ , $k \geq 2, \ell \geq 1$

Esta seção compõe-se de dois resultados previamente publicados [Couto *et al.* (2013)] que provam que o CORDAL- $(k, \ell)$ -SP para  $k \geq 2, \ell \geq 1$  é NP-completo.

**Lema 3.1.** *Dados  $k \geq 2$  e  $\ell \geq 1$ , se CORDAL- $(k, \ell)$ -SP é NP-completo, então CORDAL- $(k + 1, \ell)$ -SP é NP-completo.*

**Teorema 3.2.** *CORDAL- $(k, \ell)$ -SP, para  $k \geq 2$  e  $\ell \geq 1$ , é NP-completo.*

### 3.2. Problema Sanduíche para Grafos Cordais-(1, 2)

Com o objetivo de provar que o CORDAL-(1,2)-SP é NP-completo, vamos utilizar a mesma instância  $G_I$  utilizada por Golubic, Kaplan & Shamir (1995) oriunda do artigo de Bodlaender, Fellows & Warnow (1992) para mostrar que CORDAL-SP é NP-completo. Bodlaender, Fellows & Warnow (1992) mostram que o PROBLEMA DA TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS é NP-completo.

PROBLEMA DA TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS (TCG)

*Entrada:* Um grafo  $G = (V, E)$  e uma coloração própria de vértices  $c : V \rightarrow \mathbb{Z}$ .

*Pergunta:* Existe um supergrafo  $G' = (V, E')$  de  $G$  que seja cordal e também esteja propriamente colorido em vértices por  $c$ ?

Considere uma instância  $I = (U, \mathcal{C})$  do 3SAT, onde  $U$  é um conjunto de variáveis lógicas e  $\mathcal{C}$  é uma coleção de cláusulas com  $n = |U|$  e  $m = |\mathcal{C}|$ . Vamos construir o grafo  $G_I = (V, E)$ , que consiste de  $n$  componentes decisão e  $m$  componentes cláusula. Vamos assumir que nenhuma cláusula de  $I$  contenha um literal e seu complemento.

Cada componente decisão possui os vértices:  $H$  (cabeça),  $S_X, S_{\bar{X}}$  (ombros),  $K_X^i, K_{\bar{X}}^i$  (joelhos) e  $F$  (pé). A instância particular  $G_I = (V, E)$  para o problema tem apenas uma cabeça e um pé, um par de ombros para cada variável  $X$  e um par de joelhos para cada aparição de  $X$  ou  $\bar{X}$  em uma cláusula  $i$ .

A atribuição de cores a cada um desses vértices será feita da seguinte forma: Cabeça e pé recebem a mesma cor; a cada par de ombros  $S_X, S_{\bar{X}}$  é atribuída uma mesma cor, e cada par de joelhos  $K_X^i, K_{\bar{X}}^i$  também recebe a mesma cor.

Para criarmos a *componente cláusula* não acrescentamos vértices às componentes já criadas, apenas arestas entre os joelhos do grafo.

Um joelho  $K_X^i$  é *verdadeiro* se o literal  $X$  associado a ele recebe valor verdadeiro, caso contrário, o joelho é dito *falso*.

Seja  $L$  um literal da  $i$ -ésima cláusula. Chamamos  $K_L^i$  de *joelho ativo* e  $K_{\bar{L}}^i$  de *joelho inativo*. Para cada par  $K_L^i$  e  $K_{\bar{L}}^i$ , apenas um joelho é ativo.

Considere a cláusula  $(X, Y, Z)$ . A componente cláusula correspondente será como a representada na Figura 5. Isso conclui a construção do grafo  $G_I$ .

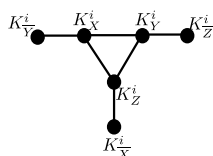


Figura 5: Componente cláusula correspondente a  $(X, Y, Z)$ .

Observe que existem apenas duas maneiras de cordalizar a componente relativa à variável  $X$  respeitando a coloração dos vértices, como é possível observar na Figura 6.

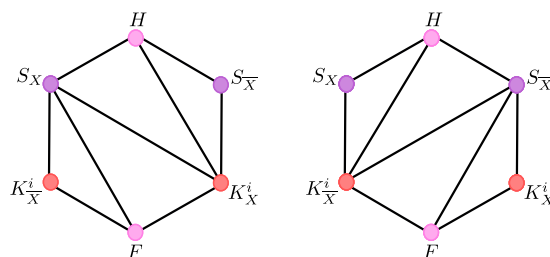


Figura 6: Marcas do Zorro nas orientações positiva e negativa, da esquerda para direita.

Além disso, é importante ressaltar que, ou inserimos todas as arestas  $(H, K_X^i)$  ou todas as arestas  $(H, K_X^{\bar{i}})$ .

Se as Marcas do Zorro estiverem orientadas positivamente na componente decisão referente a  $X$ , então o literal  $X$  receberá valor *verdadeiro*. Caso contrário, receberá valor *falso*.

**Lema 3.3.** *A instância  $I$  do 3-SAT é satisfatível se e somente se existe uma  $(1, 2)$ -triangulação para  $G_I$  respeitando a coloração própria de  $G_I$ .*

*Demonstração.* A suficiência do Lema 3.3 já foi feita por Bodlaender, Fellows & Warnow (1992). Para provar a necessidade, suponha que exista uma atribuição verdadeira  $f$  para  $I$ . Vamos adicionar o seguinte conjunto de arestas a fim de obter um grafo cordal- $(1, 2)$  respeitando a coloração própria de  $G_I$ : a orientação positiva da *Marca do Zorro* para cada componente decisão; todas as arestas entre joelhos verdadeiros e ombros verdadeiros, com a finalidade de obter uma clique; arestas tais que cada ombro verdadeiro seja adjacente a cada joelho falso; todas as arestas entre joelhos ativos e arestas entre joelhos verdadeiros inativos adjacentes a joelhos falsos ativos e joelhos falsos ativos adjacentes a joelhos verdadeiros inativos.

Seja  $G_1$  a instância  $G_I$  mais essas arestas adicionais e considere os seguintes conjuntos:

- $S_1 = \{ \text{Ombros Falsos, Joelhos Falsos Inativos} \}$ ;
- $S_2 = \{ \text{Cabeça} \}$ ;
- $S_3 = \{ \text{Joelho Verdadeiro Inativo adjacente a um Joelho Verdadeiro Ativo} \}$ ;
- $S_4 = \{ \text{Joelho Falso Ativo adjacente a um Joelho Falso Inativo} \}$ ;
- $S_5 = \{ \text{Joelho Falso Ativo adjacente a um Joelho Verdadeiro Inativo (na mesma componente cláusula)} \}$ , e
- $S_6 = \{ \text{Joelhos Verdadeiros Ativos, Ombros Verdadeiros, Pé} \}$ .

Primeiramente observe que essas arestas adicionadas estão no conjunto de arestas opcionais de  $G_I$ . Vamos analisar as vizinhanças de cada vértice desses conjuntos.

Ombros falsos são adjacentes à cabeça e a alguns joelhos verdadeiros. Como a cabeça e joelhos verdadeiros formam uma clique, cada ombro falso é um vértice simplicial e pode ser removido. Joelhos falsos ativos são adjacentes ao pé, aos ombros verdadeiros e a um joelho ativo. Esse conjunto é também uma clique e joelhos falsos inativos são vértices simpliciais, então podem ser excluídos. Seja  $G_2$  o grafo resultante após estas remoções.

A vizinhança da cabeça em  $G_2$  é formada por ombros verdadeiros e joelhos verdadeiros, o que induz uma clique em  $G_2$ . Então a cabeça é um vértice simplicial que pode ser removido do grafo. Seja  $G_3$  o grafo após a remoção da cabeça.



Os vértices de  $S_3$  em  $G_3$  são adjacentes ao pé, aos ombros verdadeiros e aos joelhos verdadeiros. Novamente, este conjunto de vértices induz uma clique em  $G_3$ . Assim, joelhos verdadeiros inativos adjacentes a joelhos verdadeiros ativos são vértices simpliciais em  $G_3$  que podem ser removidos originando  $G_4$ .

Os vértices de  $S_4$  em  $G_4$  são adjacentes a ombros verdadeiros, ao pé e a todos os joelhos ativos. Joelhos ativos formam uma clique assim como ombros verdadeiros, e o pé é adjacente a cada ombro verdadeiro. Além disso, ombros verdadeiros são adjacentes a todos os joelhos. Então, esta vizinhança também induz um clique, o que caracteriza cada joelho falso ativo adjacente a um joelho falso inativo como um vértice simplicial em  $G_4$ . Seja  $G_5$  o grafo obtido após a remoção dos vértices de  $S_4$ .

Os vértices de  $S_5$  são adjacentes a cada joelho ativo, a todos os joelhos verdadeiros inativos adjacentes a um joelho falso ativo, aos ombros verdadeiros e ao pé em  $G_5$ . Consequentemente, os vértices de  $S_5$  são simpliciais e podem ser removidos, formando o grafo  $G_6$ , que é claramente uma clique.

Observe que, se seguirmos a ordem desses conjuntos, qualquer ordem de eliminação de vértices aplicada a cada conjunto conduz a um esquema de eliminação perfeita para o grafo  $G_1$ . Além disso, podemos apresentar a  $(1, 2)$ -partição para os vértices de  $G_1$ :

**Conjunto Independente:** Ombros Falsos e Joelhos Falsos Inativos; **Clique 1:** Cabeça, Ombros Verdadeiros e Joelhos Verdadeiros; **Clique 2:** Pé e Joelhos Falsos Ativos.

Isso conclui a prova do Lema 3.3. □

**Teorema 3.4.** CORDAL-(1,2)-SP é NP-completo.

*Demonstração.* Claramente, CORDAL-(1,2)-SP está em NP. A prova da NP-completude segue da redução polinomial feita no Lema 3.3. □

### 3.3. Problema Sanduíche para Grafos Cordais-(0, 2)

O Lema 3.5 permite que analisemos também a complexidade do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-(0, 2).

**Lema 3.5.**  $G$  é cordal-(0, 2) se e somente se  $G$  é fortemente cordal-(0, 2).

*Demonstração.* Se  $G$  é cordal-(0, 2), então  $G$  não tem um sol como subgrafo induzido, já que, neste caso, o tamanho de um conjunto independente é no máximo 2.

Se  $G$  é fortemente cordal-(0, 2), então  $G$  é cordal-(0, 2) por definição. □

**Teorema 3.6.** CORDAL-(0, 2)-SP é solucionável em tempo polinomial.

*Demonstração.* Com o intuito de definir um algoritmo para o CORDAL-(0, 2)-SP, vamos fazer uma redução polinomial para o 2SAT, problema solucionável em tempo polinomial. Para tal, a partir do vértice  $u$  e da partição  $(V_1, V_2)$  em duas cliques para  $V$ , definimos a seguinte variável booleana:

$$u^i = T \Leftrightarrow u \text{ pertence à parte } V_i, i \in \{1, 2\}.$$

Dada uma instância sanduíche cordal-(0, 2) para  $(G^1, G^2)$ , assumimos que não existem vértices universais em  $G^2$ , dado que em uma  $(0, 2)$ -partição este vértice pode ser adicionado a qualquer uma das partes. Em seguida, descreveremos nosso algoritmo de tempo polinomial para o CORDAL-(0, 2)-SP.

**Algoritmo** CORDAL-(0,2)-SP

*Entrada:*  $G^1 = (V, E^1), G^2 = (V, E^2)$

*Saída:* Um grafo sanduíche  $G$  cordal-(0,2) ou a resposta NÃO caso  $(G^1, G^2)$  seja uma instância NÃO para o CORDAL-(0, 2)-SP.

Início

1.  $U \leftarrow \emptyset; C \leftarrow \emptyset;$
2. Para cada  $uw \in E^3$ , uma aresta proibida, adicione  $u^1, u^2, w^1, w^2$  a  $U$  e adicione a  $C$  as cláusulas:
  - (a)  $(u^1, u^2), (w^1, w^2);$
  - (b)  $(u^1, u^2), (w^1, w^2);$
  - (c)  $(u^1, u^2), (w^1, w^2);$
3. Para cada quádrupla de vértices  $t, u, v, w$  de  $V$  onde  $uw, tv \in E^3$ , e  $tu, vw \in E^1$  insira as cláusulas em  $C$ :  $(u^1, \bar{v}^2), (\bar{u}^1, v^2), (u^2, \bar{v}^1), (\bar{u}^2, v^1);$
4. Rode um algoritmo polinomial para a instância  $I = (U, C)$ . Se existe uma atribuição verdadeira para  $I$ , então construa o grafo sanduíche  $G$  colocando o vértice  $v$  em  $V_1$  se e somente se  $v^1 = \text{verdadeiro}$ . Agora adicione as arestas opcionais entre vértices arrumados na mesma parte com o objetivo de definir  $E$  e retorne  $G = (V, E), (V_1, V_2)$ . Caso contrário, retorne NÃO.

Fim.

**Corretude:** Observe que, se  $I = (U, C)$  é satisfatível, então um grafo sanduíche  $G$  cordal-(0, 2) é obtido para a instância  $(G_1, G_2)$  posicionando o vértice  $u$  em  $V_1$  se e somente se  $v^1$  é verdadeiro ou em  $V_2$ , caso contrário. As únicas arestas opcionais adicionadas são arestas entre vértices de uma mesma parte,  $V_1$  ou  $V_2$ .

Para ver isso, note que as cláusulas em 2 garantem que os vértices de cada aresta proibida pertencem a uma parte da partição  $(V_1, V_2)$ . As cláusulas em 2, garantem que cada vértice de cada aresta proibida pertence a exatamente uma parte da partição  $(V_1, V_2)$ . As cláusulas em 2 garantem, por sua vez, que se um vértice de uma aresta proibida pertence a uma parte, então o outro vértice dessa mesma aresta pertence a outra parte da partição  $(V_1, V_2)$ . Finalmente, as cláusulas em 3 garantem que, a partir de uma solução satisfatível para  $I = (U, C)$ , não existe  $C_4$  em  $G$ .

Suponha que existe um grafo sanduíche  $G$  cordal-(0,2), com partição em cliques  $(V_1, V_2)$  para a instância  $(G^1, G^2)$ . Vamos assumir que todas as arestas opcionais de  $G$  pertencem a  $G[V_1]$  ou a  $G[V_2]$ . Consequentemente, nenhuma aresta proibida é permitida em  $V_1$  ou em  $V_2$ , e nenhum  $C_4$  tem duas arestas forçadas conectando vértices de  $V_1$  e  $V_2$ . Logo, existe uma solução satisfatível para  $I = (U, C)$  tal que o grafo sanduíche  $G$  cordal-(0, 2) é obtido para a instância  $(G^1, G^2)$ .  $\square$

### 3.4. Problema Sanduíche para Grafos (Fortemente) Cordais-(0, $k$ ), $k \geq 3$

Para provar que o FC-(0,  $k$ )-SP e o CORDAL-(0,  $k$ )-SP são problemas NP-completos, vamos fazer uma redução polinomial do problema de decisão NP-completo denominado COBERTURA POR  $k$  CLIQUES introduzido por Karp (1972) para eles.

#### Construção da instância especial:

Considere uma instância geral  $H = (V_H, E_H)$  para o problema da COBERTURA POR  $k$  CLIQUES. Vamos construir uma instância particular  $(G^1 = (V, E^1), G^2 = (V, E^2))$  do (FORTEMENTE) CORDAL-(0,  $k$ )-SP para  $k \geq 3$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V &= V_H \\ E^1 &= \emptyset \\ E^2 &= E_H \end{aligned}$$

**Lema 3.7.**  $H = (V_H, E_H)$  tem uma cobertura por  $k$  cliques se e somente se existe um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  (fortemente) cordal para  $(G^1, G^2)$ .

*Demonstração.* Inicialmente suponha que  $V_H$  pode ser particionado em  $k$  cliques  $K^1, K^2, \dots, K^k$  tais que  $V_H = K^1 \cup K^2 \cup \dots \cup K^k$ . Vamos construir o grafo sanduíche  $G = (V, E)$  fazendo:

$$V = V_H$$

$$E = E(G^2[K^1]) \cup E(G^2[K^2]) \cup \dots \cup E(G^2[K^k])$$

Observe que  $G$  tem o mesmo conjunto de vértices que  $G^1$  e  $G^2$ , tem todas as arestas obrigatórias e toda aresta de  $E$  pertence a  $E^2$ . Além disso,  $G$  é cordal pois é composto por  $k$  componentes conexas que são cliques. Note ainda que  $G$  é fortemente cordal, uma vez que não possui um sol como subgrafo induzido. Portanto,  $G$  é (fortemente) cordal- $(0, k)$ .

Agora suponha que tenhamos um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  (fortemente) cordal- $(0, k)$  para a instância  $(G^1, G^2)$ . Neste caso, existe uma cobertura por  $k$  cliques para  $G$ . Como  $G$  é subgrafo de  $G^2$  com o mesmo conjunto de vértices e, por construção,  $G^2 = H$ , temos que  $H$  também tem uma cobertura por  $k$  cliques.  $\square$

**Teorema 3.8.** FC- $(0, k)$ -SP e CORDAL- $(0, k)$ -SP para  $k \geq 3$  são NP-completos.

*Demonstração.* Este problema está claramente em NP [Farber (1981), Hell *et al.* (2004)].

A prova da NP-completude segue do Lema 3.7.  $\square$

#### 4. Conclusões e Trabalhos Futuros

A Figura 7 e representa os resultados obtidos neste trabalho e outros resultados da literatura. Estamos trabalhando nos problemas CORDAL- $(k, 0)$ -SP e FC- $(k, 0)$ -SP com o intuito de completar a dicotomia  $P$  vs  $NP$  para os problemas sanduíche para grafos cordais- $(k, \ell)$  e fortemente cordais- $(k, \ell)$ .

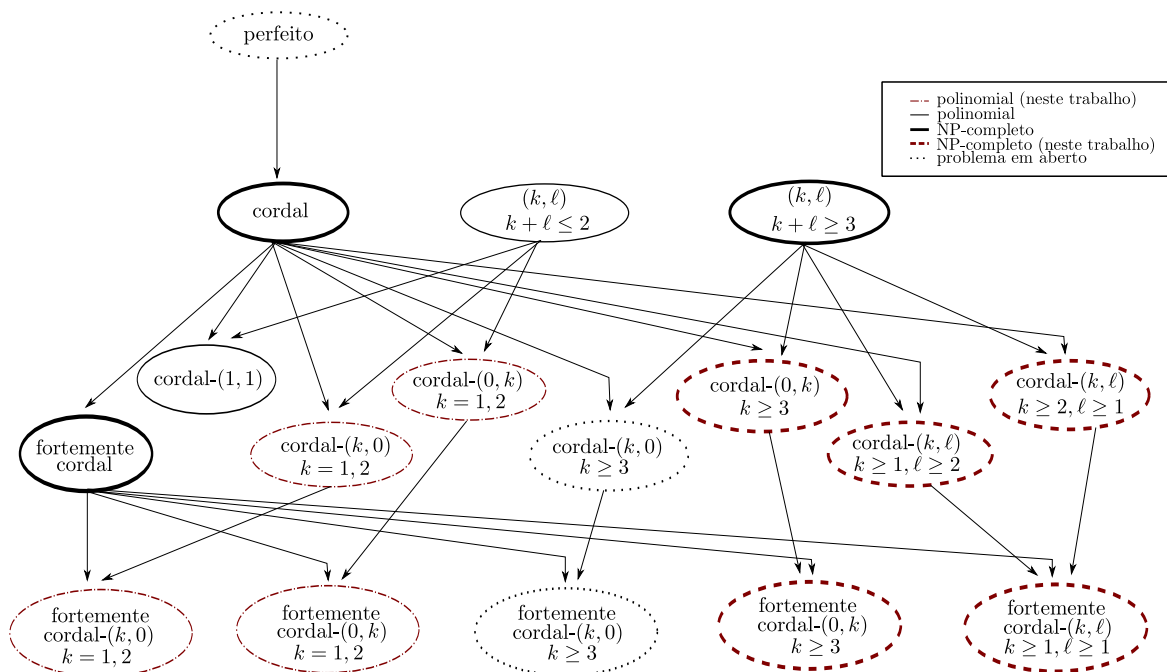


Figura 7: Nossa contribuição para o diagrama de Golumbic, Kaplan & Shamir (1995).

## Referências

- BODLAENDER, H.; FELLOWS, M.; WARNOW, T. Two strikes against perfect phylogeny. **Computer Science**, v. 623, p. 273–283, 1992.
- BRANDSTÄDT, A. Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. **Discrete Mathematics**, v. 152(1-3), p. 47–54, 1996.
- \_\_\_\_\_. Corrigendum. **Discrete Mathematics**, v. 186, p. 295, 2005.
- BRANDSTÄDT, A.; LE, V. B.; SZYMCAK, T. The complexity of some problems related to graph 3-colorability. **Discrete Applied Mathematics**, v. 89(1-3), p. 59–73, 1998.
- COUTO, F.; FARIA, L.; KLEIN, S.; PROTTI, F.; NOGUEIRA, L. On  $(k, l)$ -graph sandwich problems. In: **Frontiers in Algorithmics and Algorithmic Aspects in Information and Management**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2013, (Lecture Notes in Computer Science, v. 7924). p. 187–197.
- DAHLHAUS, E. **Chordale graphen im besonderen hinblick auf parallele algorithmen**. 1991. Habilitation Thesis.
- DANTAS, S.; FIGUEIREDO, C. de; FARIA, L. On decision and optimization  $(k, l)$ -graph sandwich problems. **Discrete Applied Mathematics**, v. 143, p. 155–165, 2004.
- DANTAS, S.; KLEIN, S.; MELLO, C. P. de; MORGANA, A. The graph sandwich problem for  $P_4$ -sparse graphs. **Discrete Mathematics**, v. 309, n. 11, p. 3664 – 3673, 2009.
- DOURADO, M.; PETITO, P.; TEIXEIRA, R.; FIGUEIREDO, C. Helly property, clique graphs, complementary graph classes, and sandwich problems. **Journal of the Brazilian Computer Society**, v. 14, p. 45–52, 2008.
- FARBER, M. **Applications of Linear Programming Duality to Problems Involving Independence and Domination**. Tese (Ph.D. thesis) — Simon Fraser University, Canada, 1981.
- FEDER, T.; HELL, P.; KLEIN, S.; NOGUEIRA, L. T.; PROTTI, F. List matrix partitions of chordal graphs. **Theoretical Computer Science**, v. 349, p. 52–66, 2005.
- FIGUEIREDO, C.; FARIA, L.; KLEIN, S.; SRITHARAN, R. On the complexity of the sandwich problems for strongly chordal graphs and chordal bipartite graphs. **Theoretical Computer Science**, v. 381, p. 57–67, 2007.
- GOLUMBIC, M.; KAPLAN, H.; SHAMIR, R. Graph sandwich problems. **Journal of Algorithms**, v. 19, n. 3, p. 449–473, 1995.
- HELL, P.; KLEIN, S.; NOGUEIRA, L. T.; PROTTI, F. Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. **Discrete Applied Mathematics**, v. 141, p. 185–194, 2004.
- \_\_\_\_\_. Packing  $r$ -cliques in weighted chordal graphs. **Annals of OR**, v. 138, p. 179–187, 2005.
- KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. **Complexity of Computer Computations**, p. 85–103, 1972.
- SRITHARAN, R. Chordal bipartite completion of colored graphs. **Discrete Mathematics**, v. 308, p. 2581–2588, 2008.