

## Uma Análise Sobre Reversão de Ranking no Método PROMETHEE II

**Renan Felinto de Farias Aires**

Programa de Pós-Graduação em Administração - PPGA, UFRN  
Avenida Senador Salgado Filho, 3000, Lagoa Nova, Natal-RN  
renanffa@hotmail.com

**Luciano Ferreira**

Escola de Ciências e Tecnologia, UFRN  
Programa de Pós-Graduação em Administração - PPGA, UFRN  
Avenida Senador Salgado Filho, 3000, Lagoa Nova, Natal-RN  
ferreira@ufrnet.br

### RESUMO

O Promethee é um dos métodos multicritério mais utilizados na academia, mas, apesar da sua grande difusão, este é um método que tem sido criticado devido à ocorrência do fenômeno da reversão de *ranking*. Logo, o objetivo deste estudo foi testar a ocorrência da reversão de *ranking* no método Promethee, a partir da realização de experimentos com 48.000 problemas de decisão, gerados aleatoriamente com base em três critérios de reversão propostos na literatura. Os experimentos apontaram que o Promethee apresenta um quadro grave quanto à ocorrência da reversão de *ranking*, mas com resultados melhores do que foram apresentados por outros métodos.

**PALAVRAS CHAVE. Reversão de Ranking, Multicritério, Método Promethee.**

**Apoio à Decisão Multicritério.**

### ABSTRACT

Promethee is one of the most multicriteria methods used in decision making field and has been applied in different areas, however, it has received criticism from several researchers due to the occurrence of the rank reversal phenomenon. Therefore, the aim of this paper is to evaluate and quantify the occurrence of rank reversal in Promethee method, by conducting experiments on 48,000 decision problems randomly generated based on three classical criteria proposed in the literature. The experiments showed that Promethee presents a serious condition for the occurrence of rank reversal, but with better results than were reported by other methods.

**KEYWORDS. Rank Reversal, Multicriteria, Promethee Method.**

**Multicriteria Decision Support.**

## 1 Introdução

A problemática das decisões multicritério é caracterizada por um contexto em que há pelo menos duas alternativas de ação para se escolher e esta escolha é conduzida para se atender a múltiplos objetivos - muitas vezes conflitantes entre si. Nesse contexto, a tomada de decisão multicritério (MCDM) atua de forma a possibilitar a resolução de um problema com segurança e redução da possibilidade de erro (BELTON; STERWART, 2002), tendo sido vastamente utilizada nas mais variadas áreas, como nas ciências, nos negócios, no governo e na engenharia, com o propósito de ajudar a melhorar a qualidade das decisões (WANGA; TRIANTAPHYLLOU, 2008).

No entanto, os métodos MCDM têm sido criticados na literatura devido à ocorrência de um fenômeno chamado de *rank reversal*. O *rank reversal* se refere à mudança na ordenação de algumas alternativas após uma alternativa ter sido adicionada ou excluída deste grupo anteriormente ordenado. Este fenômeno, observado inicialmente no método AHP, a partir do estudo de Belton e Gear (1983), tem sido debatido até os dias de hoje e para diversos métodos, como para o Topsis (IÇ, 2014; AIRES; FERREIRA, 2014; GARCÍA-CASCALES; LAMATA, 2012), para o Electre (WANG; TRIANTAPHYLLOU, 2008; FIGUEIRA; ROY, 2009; FIGUEIRA *et al.*, 2013) e para o Promethee (DE KEYSER; PEETERS, 1996; MARESCHAL, DE SMET; NEMERY, 2008; VERLY; DE SMET, 2013).

No entanto, o que se tem percebido é que ainda há uma escassez na literatura de estudos que se dediquem a avaliar em profundidade o impacto deste fenômeno para estes métodos, ilustrando, por exemplo, sob quais condições o fenômeno ocorre. Apesar disso, podem-se citar alguns exemplos de estudos com esta finalidade, como o estudo de Wanga e Triantaphyllou (2008) sobre o Electre e o de Aires e Ferreira (2014) sobre o Topsis.

Desse modo, levando em consideração a criticidade do problema do *rank reversal*, este estudo tem como objetivo testar, através dos três critérios propostos por Wanga e Triantaphyllou (2008), a ocorrência do *rank reversal* no método Promethee. Para tanto, o artigo está estruturado da seguinte forma: em primeiro lugar apresenta a estrutura do Promethee, discutindo suas nuances; depois apresenta o método utilizado para o teste do modelo quanto à ocorrência do *rank reversal*; em seguida, são apresentados os resultados obtidos com o teste; e, finalmente, tece a conclusão do estudo.

## 2 O Método PROMETHEE

O PROMETHEE (BRANS; VINCKE, 1985) é uma família de métodos baseados na construção de relações de sobreclassificação (*outranking*) entre as alternativas (VINCKE, 1992). Especificamente, o PROMETHEE II é um método que tem como resultado uma ordenação das alternativas a partir de uma relação de preferência valorada entre as alternativas, baseando-se no conceito de fluxo líquido. O PROMETHEE II está estruturado a partir dos seguintes procedimentos:

1) Calcula-se as diferenças para cada par de alternativas, considerando os critérios onde  $x_i, x_k$

$$\delta_{ik} = |v_j(x_i) - v_j(x_k)|$$

2) Determina-se a função de preferência  $P_j$

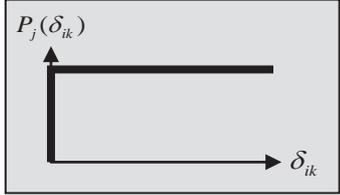
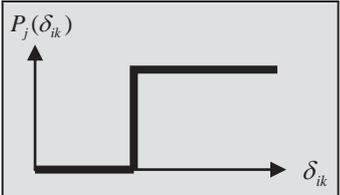
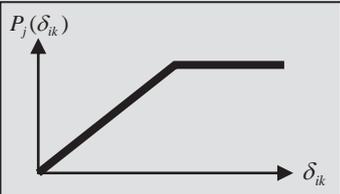
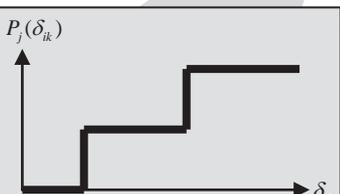
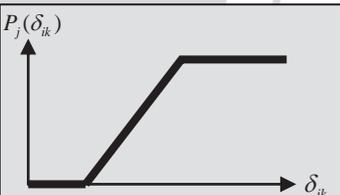
Tipo	Representação Matemática	Representação Gráfica	Parâmetros
Usual	$P_j(\delta_{ik}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta_{ik} = 0 \\ 1 & \text{se } \delta_{ik} \neq 0 \end{cases}$		-
Quase critério	$P_j(\delta_{ik}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta_{ik} \leq q \\ 1 & \text{se } \delta_{ik} > q \end{cases}$		$q = \text{nível de indiferença}$
Critério de preferência linear	$P_j(\delta_{ik}) = \begin{cases} \frac{\delta_{ik}}{p} & \text{se } \delta_{ik} \leq p \\ 1 & \text{se } \delta_{ik} > p \end{cases}$		$p = \text{nível de preferência estrita}$
Critério por níveis	$P_j(\delta_{ik}) = \begin{cases} \frac{\delta_{ik}}{p} & \text{se } \delta_{ik} \leq q \\ 0,5 & \text{se } q \leq \delta_{ik} \leq p \\ 1 & \text{se } \delta_{ik} > p \end{cases}$		$q = \text{nível de indiferença};$ $p = \text{nível de preferência estrita}$
Critério de preferência linear com zona de indiferença	$P_j(\delta_{ik}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta_{ik} \leq q \\ \frac{(\delta_{ik} - q)}{(p - q)} & \text{se } q < \delta_{ik} \leq p \\ 1 & \text{se } \delta_{ik} > p \end{cases}$		$q = \text{nível de indiferença};$ $p = \text{nível de preferência estrita}$
Critério gaussiano	$P_j(\delta_{ik}) = 1 - e^{\left(\frac{-\delta_{ik}^2}{2\sigma^2}\right)}$		$s = \text{nível de preferência}$

Figura 1: Tipos de funções de preferência do Promethee  
 Fonte: Brans, Vincke e Mareschal (1986)

3) Calcula-se os índices de preferência  $S_{ik}$

$$S_{ik} = \frac{\sum_j w_j P(S_{ijk})}{\sum_j w_j}$$

4) Calculam-se os fluxos de superação positivo  $\varphi_i^+$  e negativo  $\varphi_i^-$

$$\varphi_i^+ = \sum_k S_{ik}$$

$$\varphi_i^- = \sum_k S_{ki}$$

5) Calcula-se o fluxo líquido  $\varphi_i$

$$\varphi_i = \varphi_i^+ - \varphi_i^-$$

6) Ordenam-se as alternativas em ordem decrescente de acordo com o  $\varphi_i$ .

### 3 Procedimentos Metodológicos

Conforme já citado, o PROMETHEE é um dos métodos que apresenta o problema de *rank reversal*. A ocorrência deste fenômeno no PROMETHEE foi primeiramente apresentada no estudo de De Keyser e Peeters (1996), sendo também apontado nos estudos de Mareschal, De Smet e Nemery (2008) e Verly e De Smet (2013). Nos estudos de Wanga e Triantaphyllou (2008) e Triantaphyllou (2001), foram propostos três critérios para testar casos de *ranking reversal* – os quais também são utilizados nesse estudo - nos métodos da família Electre e no método AHP, respectivamente, conforme descrito a seguir:

1. Um método eficaz MCDM não deve alterar a indicação da melhor alternativa quando uma alternativa “não ótima” é substituída por uma outra alternativa pior (dado que a importância relativa de cada decisão critério permanece inalterada);
2. Os *rankings* de alternativas por um método eficaz MCDM devem seguir a propriedade de transitividade;
3. Para o mesmo problema de decisão e usando o mesmo método MCDM, depois de combinar os *rankings* dos problemas menores (problema decomposto), o novo *ranking* geral das alternativas deve ser idêntico ao *ranking* global original do problema não decomposto.

Para facilitar a avaliação de cada um dos critérios citados anteriormente para o método PROMETHEE, estes foram implementados em Linguagem Java. A seguir, foram realizados experimentos aleatórios com os seguintes parâmetros:

- Número de critérios: 5, 10, 15 e 20;
- Número de alternativas: 5, 7, 9, 11;
- Função de preferência  $P_j$ : escolhidas aleatoriamente entre os seis tipos apresentados na Figura 1;
- Desempenho das alternativas: gerados aleatoriamente através de uma distribuição uniforme no intervalo [0-10];
- Peso dos critérios: três tipos de pesos foram definidos para os experimentos. No primeiro caso, utilizou-se pesos iguais para todos os critérios; no segundo caso, utilizou-se pesos

gerados aleatoriamente no intervalo [0-1] para todos os critérios através de uma distribuição uniforme; e, finalmente, no terceiro caso, utilizou-se uma distribuição beta em forma de U para atribuir os pesos de cada critério;

- Número de replicações: 1.000 casos para cada combinação, gerando 48.000 problemas de decisão diferentes.

A seguir, o método PROMETHEE foi avaliado para cada um dos 48.000 problemas de decisão gerados aleatoriamente através dos três critérios de reversão de *ranking* propostos por Wanga e Triantaphyllou (2008). Para avaliar o método PROMETHEE em relação ao critério 1, considerou-se duas matrizes de decisão como entrada, onde a primeira foi a matriz de decisão original, gerada aleatoriamente, enquanto que a segunda foi construída através da substituição de uma alternativa não-ótima da matriz de decisão inicial por outra com desempenho 10% inferior em cada critério. O método PROMETHEE foi então aplicado a cada uma das matrizes de decisão, quando o resultado da escolha da melhor alternativa for diferente, considerou-se que o método não passou no critério 1, caso contrário, quando o resultado foi idêntico, considerou-se que o método não produziu reversão de *ranking* para este critério de avaliação.

A avaliação do critério 2 considerou também como entrada duas matrizes de decisão, onde a primeira também foi a matriz de decisão gerada aleatoriamente, enquanto que a segunda foi uma matriz de decisão gerada a partir da primeira com a exclusão de uma alternativa qualquer, sorteada aleatoriamente. Considerou-se que o método passou neste teste quando ele manteve a transitividade entre os *rankings* produzidos para as duas matrizes de decisão de entrada. Por fim, a avaliação do critério 3 considerou três matrizes de decisão como entrada. Assim como nos critérios anteriores, a primeira também foi a matriz de decisão gerada aleatoriamente, com  $n$  alternativas, enquanto que a segunda foi uma matriz com as  $n/2$  alternativas da primeira matriz e a terceira foi uma matriz com as demais  $n-n/2$  alternativas restantes. Este critério também avalia a propriedade da transitividade, assim como o segundo, no entanto, a regra da transitividade deve-se manter para as duas matrizes derivadas da matriz inicial.

#### 4 Resultados

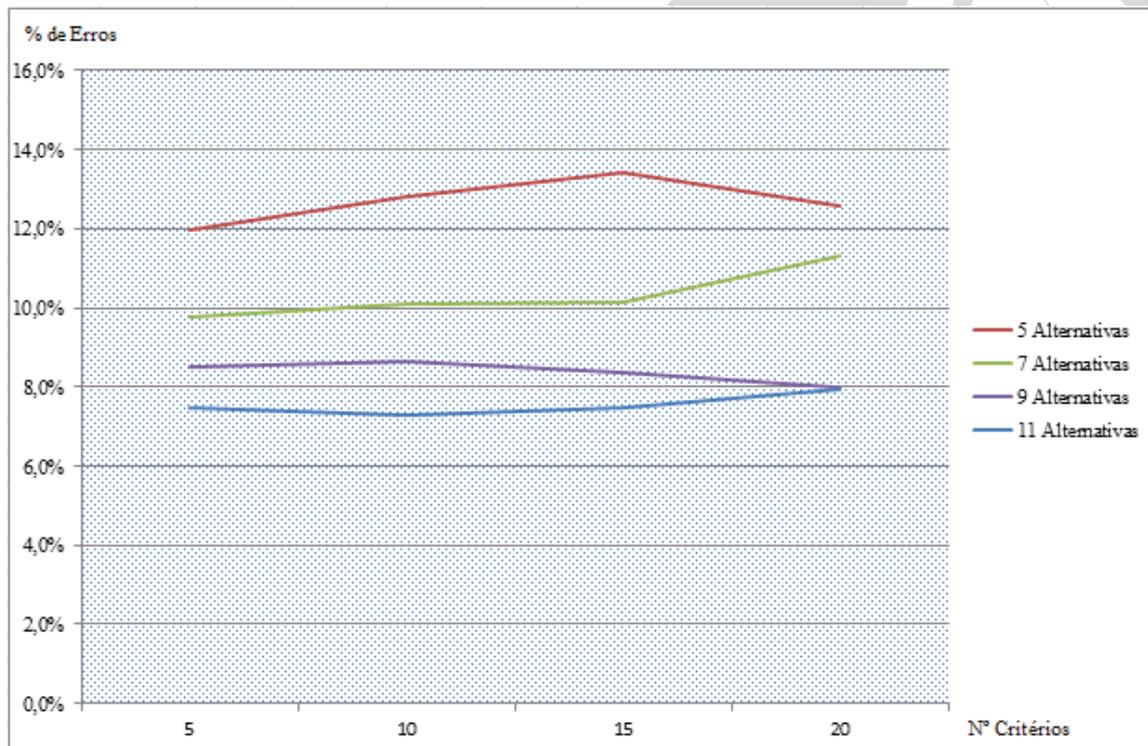
Para a análise dos resultados, são apresentados, para cada um dos critérios testados, tabelas - com os dados numéricos obtidos com as simulações - e gráficos, que melhor ilustram a tendência de ocorrência da reversão de *ranking*. Vale ressaltar que, em cada gráfico, há uma linha com os resultados obtidos para cada número de alternativas utilizadas nos experimentos, que o eixo  $x$  corresponde ao número de critérios e o eixo  $y$  corresponde ao número de irregularidades de *ranking* nos problemas simulados.

Inicialmente, a Tabela 1 e a Figura 2 apresentam os resultados obtidos em relação ao critério 1. Neste critério verifica-se se há alguma alteração na melhor alternativa quando uma alternativa “não ótima” é substituída por uma outra alternativa.

Critérios	Alternativas	Casos	Número de Irregularidades	Número de Irregularidades (%)
5	5	3000	359	11,97
10	5	3000	384	12,80
15	5	3000	402	13,40
20	5	3000	378	12,60
5	7	3000	293	9,77
10	7	3000	303	10,10
15	7	3000	304	10,13
20	7	3000	340	11,33
5	9	3000	255	8,50
10	9	3000	260	8,67
15	9	3000	251	8,37
20	9	3000	240	8,00
5	11	3000	224	7,47
10	11	3000	218	7,27
15	11	3000	224	7,47
20	11	3000	238	7,93
Soma		48000	4673	9,74

 Tabela 1: Dados das Irregularidades de *ranking* – Critério 1.

Logo, os resultados indicam que os problemas com menor número de alternativas geram uma maior ocorrência de irregularidades no *ranking*. Em geral, percebe-se que apenas 9,74% dos casos apresentaram problemas de reversão. No entanto, um método de decisão multicritério para ser consistente, precisa ser consistente com os três critérios de *ranking reversal* apresentados.


 Figura 2: Irregularidades de *ranking* – Critério 1.

A seguir, quando o método PROMETHEE foi avaliado para o segundo critério que mede a propriedade da transitividade, conforme apresentado na Tabela 2 e na Figura 3, o índice encontrado é mais expressivo do que o apresentado no teste do primeiro critério. Logo, o índice geral de 16,63% apesar de mais expressivo, é considerado muito bom tendo em vista os resultados apresentados em outros métodos multicritério – breve comparação apresentada no final dessa seção.

Critérios	Alternativas	Casos	Número de Irregularidades	Número de Irregularidades (%)
5	5	3000	392	13,07
10	5	3000	405	13,50
15	5	3000	447	14,90
20	5	3000	446	14,87
5	7	3000	481	16,03
10	7	3000	503	16,77
15	7	3000	505	16,83
20	7	3000	494	16,47
5	9	3000	510	17,00
10	9	3000	539	17,97
15	9	3000	529	17,63
20	9	3000	550	18,33
5	11	3000	492	16,40
10	11	3000	527	17,57
15	11	3000	572	19,07
20	11	3000	588	19,60
Soma		48000	7980	16,63

Tabela 2: Dados das Irregularidades de *ranking* – Critério 2.

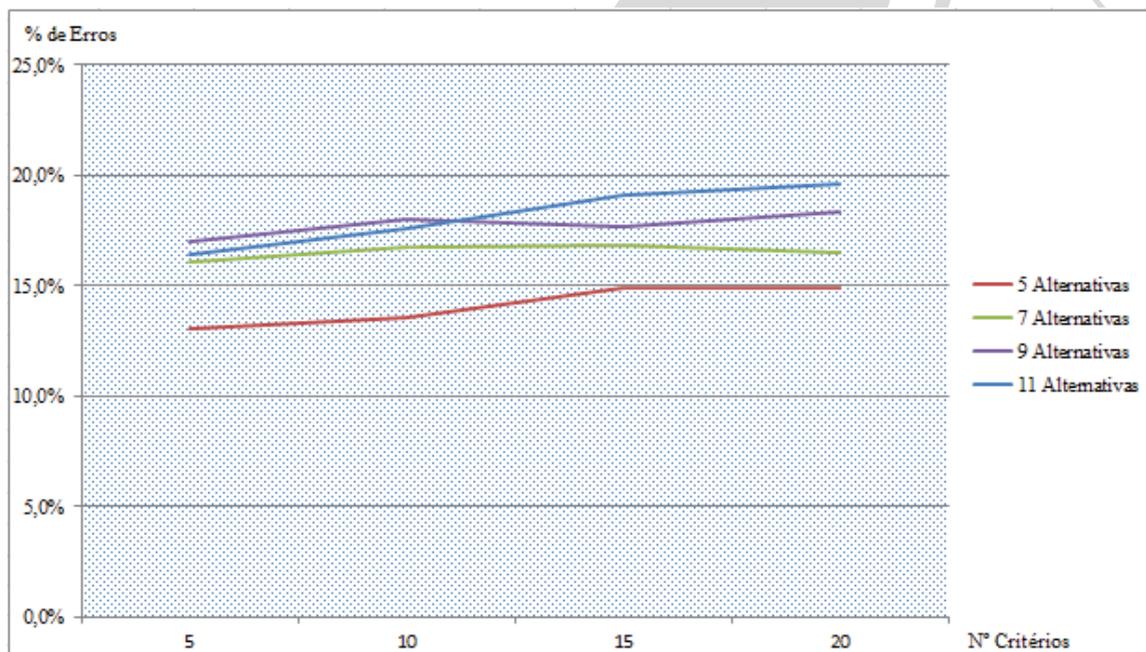


Figura 3: Irregularidades de *ranking* – Critério 2.

Além disso, percebe-se no teste do segundo critério que as taxas de irregularidades do *ranking* aumentam, mesmo que em pequena escala entre um e outro, conforme aumenta o número de alternativas, diferente do encontrado no primeiro critério. Neste sentido, pode-se destacar, por exemplo, a taxa de erro ocorrida quando foram tratados problemas de decisão que envolveram 20 critérios e 11 alternativas, que chegou na casa dos 19,60% de erros, índice mais elevado para esse critério.

Finalmente, no teste do critério 3 (Tabela 3 e Figura 4), que avalia se o *ranking* global (não decomposto) e o novo *ranking* com problemas decompostos seguem a propriedade da transitividade, percebe-se o pior cenário quanto a ocorrência de irregularidades para o PROMETHEE, visto que a taxa global dessas irregularidades chega a 42,07%, sendo que aqueles problemas de decisão que envolviam 20 critérios e 11 alternativas, por exemplo, atingiram uma taxa de 50,5% de irregularidade.

Critérios	Alternativas	Casos	Número de Irregularidades	Número de Irregularidades (%)
5	5	3000	954	31,8
10	5	3000	1000	33,33
15	5	3000	1056	35,2
20	5	3000	1085	36,17
5	7	3000	1141	38,03
10	7	3000	1245	41,5
15	7	3000	1267	42,23
20	7	3000	1214	40,47
5	9	3000	1286	42,87
10	9	3000	1350	45,0
15	9	3000	1421	47,37
20	9	3000	1363	45,43
5	11	3000	1376	45,87
10	11	3000	1470	49,0
15	11	3000	1449	48,3
20	11	3000	1515	50,5
Soma		48000	20192	42,07

Tabela 3: Dados das Irregularidades de *ranking* – Critério 3.

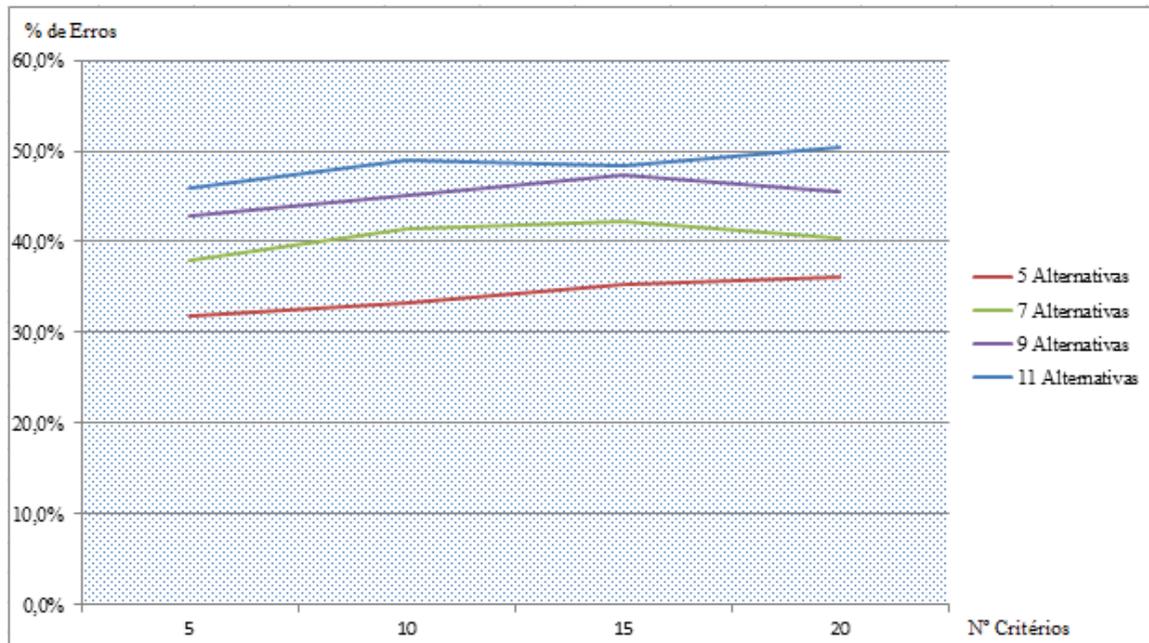


Figura 4: Irregularidades de *ranking* – Critério 3.

Além disso, cabe ressaltar que, similarmente ao teste do critério 2, o aumento da taxa de irregularidades está atrelado ao número de alternativas, sendo que a escala de aumento entre as faixas de alternativas é maior. Como comentário geral em relação aos resultados obtidos, pode-se dizer que o problema de *ranking reversal* no método Promethee II é considerado grave, mas ao compararmos tais resultados com o outro principal método não compensatório, o Electre, seus resultados são melhores. Logo, partindo que no estudo de Wanga e Triantaphyllou (2008) o Electre II apresentou 12% de taxa de erros para critério 1, 75% para o para critério 2 e 70% para o para critério 3, os resultados do Promethee foram considerados baixos, principalmente ao compararmos ambas taxas de irregularidades para o critério 2.

Pode-se ainda comparar esses resultados do Promethee com os resultados apresentados no TOPSIS, de acordo com o estudo de Aires e Ferreira (2014). Logo, percebe-se que o TOPSIS, mesmo sendo um método compensatório que deve seguir a transitividade – aspecto não exigido para os métodos não compensatórios como o Promethee e Electre – apresentou um cenário muito pior em seus testes, visto que com exceção do critério 1, em que sua taxa foi pequena (2,49%), nos outros dois testes o Topsis apresentou um valor superior ao Promethee, na casa dos 45,5% no critério 2 – com pico de 68,6% com 20 critérios e 11 alternativas – e 59,9% no critério 3 - com pico de 85% com 20 critérios e 11 alternativas.

## 5 Conclusão

O método Promethee é um dos métodos de auxílio à tomada de decisão multicritério mais utilizados na academia, novos trabalhos que buscam avaliar a robustez do método são importantes para avaliar a credibilidade dos resultados obtidos com o método, bem como delimitar as limitações das pesquisas conduzidas.

O presente trabalho abordou o problema de reversão de *ranking*, publicado pela primeira vez na literatura por De Keyser e Peeters (1996) e mais recentemente por Mareschal, De Smet e Nemery (2008) e Verly e De Smet (2013) em trabalhos sobre o método Promethee. A motivação básica para o desenvolvimento foi verificar em que medida o método Promethee II é afetado pelos critérios de reversão de *ranking* descritos em Wanga e Triantaphyllou (2008), dado que o mesmo é amplamente utilizado em trabalhos acadêmicos.

Por fim, apesar de que de acordo com Roy (1974) e Gomes (2007) os métodos baseados em relações de sobreclassificação (*outranking*) não precisam obedecer à propriedade da

transitividade, os autores optaram por testar o Promethee quanto a essa propriedade para fins de comparação com os resultados apresentados pelo Electre, como também foi feito por Wanga e Triantaphyllou (2008).

Assim, após a implementação do método Promethee II e dos critérios de reversão de *ranking* em linguagem Java, 48.000 problemas foram gerados aleatoriamente para avaliação. Ao final dos experimentos constatou-se que o método Promethee II apresenta um quadro grave quanto à ocorrência do *rank reversal*, apesar ser melhor que o Electre, conforme estudo de Wanga e Triantaphyllou (2008) e do que o Topsis em dois dos três critérios testados, conforme Aires e Ferreira (2014). Como trabalhos futuros, pretende-se fazer uma análise mais aprofundada sobre as causas das situações de reversão de *ranking* levando em consideração cada etapa do modelo, bem como de todas as variáveis envolvidas.

## Referências

- Aires, R. F. F. e Ferreira, L.** (2014). Uma Análise Sobre Reversão de Ranking no Método PROMETHEE II. In: *XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2014, Salvador - Brasil. *XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO 2014)*.
- Belton, V. e Stewart, T. J.** *Multiple criteria decision analysis*, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- Belton, V. e Gear, T.** (1983), On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies. *Omega*, 11(3), 228-230.
- Brans, J. P. e Vincke, P. H.** (1985). A preference ranking organization method, the PROMETHEE method for MCDM. *Management Science*, 31, 647-656.
- Brans, J. P., Vincke, P. e Mareschal, B.** (1986). How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method. *European Journal of Operational Research*, 24(2), 228-238.
- De Keyser, W. e Peeters, P.** (1996). A note on the use of PROMETHEE multicriteria methods. *European Journal of Operational Research*, 89(3), 457-461.
- Figueira, J. R., Greco, S., Roy, B. e Słowiński, R.** (2013). An Overview of ELECTRE Methods and their Recent Extensions. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 20(1-2), 61-85.
- Figueira, J. R. e Roy, B.** (2009). A note on the paper, "Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some ELECTRE methods", by Wang and Triantaphyllou *Omega* (2008). *Omega*, 37(3), 731-733.
- García-Cascales, M. S. e Lamata, M. T.** (2012), On rank reversal and TOPSIS method. *Mathematical and Computer Modelling*, 56(5-6), 123-132.
- İç, Y. T.** (2014). A TOPSIS based design of experiment approach to assess company ranking. *Applied Mathematics and Computation*, 227, 630-647.
- Mareschal, B., De Smet, Y. e Nemery, P.** (2008). Rank reversal in the PROMETHEE II method: Some new results. In: *2008 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, 2008. *IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, p. 959-963.

**Triantaphyllou, E.** (2001), Two new cases of rank reversals when the AHP and some of its additive variants are used that do not occur with the multiplicative AHP. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 10(1), 11-25.

**Verly, C. e De Smet, Y.** (2013), Some results about rank reversal instances in the PROMETHEE methods. *International Journal of Multicriteria Decision Making*, 3(4), 325-345.

**Vincke, P.** *Multicriteria decision-aid*. John Wiley & Sons, 1992

**Wang, X. e Triantaphyllou, E.** (2008), Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some ELECTRE methods. *Omega*, 36(1), 45-63.

