

MINIMIZAÇÃO DO NÚMERO DE PADRÕES DE CORTE DISTINTOS NO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL

Kelly Cristina Poldi

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651, CEP 13083-859, Campinas, SP, Brasil
kellypoldi@ime.unicamp.br

Henrique Augusto Kobersztajn
Horacio Hideki Yanasse

Universidade Federal de São Paulo - UNIFESP
Instituto de Ciência e Tecnologia - ICT
Av. Cesare Mansueto Giulio Lattes, 1201, CEP 12247-014, São José dos Campos, SP, Brasil
henriqueak@gmail.com, horacio.yanasse@unifesp.br

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma abordagem para a resolução do problema de corte de estoque unidimensional inteiro no qual dois objetivos são levados em consideração na obtenção da solução final: a minimização de perdas geradas durante o processo de corte e a redução da quantidade de padrões de corte distintos. Inicialmente, uma solução exata para o problema de corte de estoque é obtida e então, sobre esta solução, é aplicado um conjunto de procedimentos visando a redução da quantidade de padrões de corte distintos. Tais procedimentos não necessariamente mantêm a quantidade mínima de objetos cortados inicialmente, de forma que o aumento no consumo de objetos é permitido de forma controlada se implicar em uma maior redução dos padrões distintos presentes na solução final. Testes computacionais foram realizados com um conjunto de dados gerados aleatoriamente de forma a avaliar empiricamente o impacto em permitir o aumento controlado do número de objetos cortados e a diminuição do número de padrões de corte distintos.

PALAVRAS CHAVE: Problema de corte de estoque, Redução de padrões de corte, Otimização linear inteira.

ABSTRACT

In this study we present an approach to the one dimensional cutting stock problem with two objectives: minimize the waste of material and also the number of different cutting patterns. Initially, an exact solution to the cutting stock problem is obtained and then the pattern reduction process is started upon this solution. The minimizing pattern reduction process does not necessarily keep the initial minimum amount of cut objects, however the increase of cut objects are allowed in a controlled way if it implies in more pattern reduction at the final solution. Computational tests were carried out regarding random data in order to empirically evaluate the impact of allowing a controlled increasing on the number of cut objects and the reduction on the number of different cutting patterns.

KEYWORDS: Cutting stock problem, Cutting pattern reduction, Integer linear optimization.

1. Introdução

O Problema de Corte de Estoque (PCE) consiste em atender uma determinada demanda de itens através do processo de corte de objetos de comprimento dado em tais itens de comprimentos menores que os do objeto, visando um ou mais objetivos como, por exemplo, minimizar a perda de material resultante do processo de corte, minimizar a quantidade de padrões de corte diferentes resultantes do planejamento do corte dos objetos, maximizar lucro, dentre outros. Para o problema de corte de estoque tratado neste trabalho, o processo de corte está vinculado a apenas uma dimensão, ou seja, é um problema de corte de estoque unidimensional, sendo então levado em consideração apenas o comprimento dos objetos e dos itens.

Kantorovich (1960) foi um dos primeiros a estudar o problema com uma formulação para minimizar perdas. Gilmore e Gomory (1961, 1963) abordaram o problema de corte usando o método simplex com geração de colunas. Mais recentemente, Valério de Carvalho (1999, 2002) propõe um modelo de fluxo em arcos para o problema de corte de estoque. Farley e Richardson (1984) modelaram o problema de minimização de padrões de corte como um problema de custo fixo e resolveram usando o método simplex. Diegel et al. (1993) apresentaram um procedimento que consiste em identificar um par de padrões em um plano de corte que possa ser substituído por um único padrão de corte. Foerster e Wäscher (2000) propuseram um método, denominado KOMBI, que generaliza o procedimento proposto por Diegel et al. (1993). Vanderbeck (2000) formula o problema de minimização de padrões como um problema de otimização inteira quadrática e resolve com um método exato. Alves e Valério de Carvalho (2008) propuseram um algoritmo *branch-and-price-and-cut* para resolver o problema de minimização de padrões de forma exata. Umetani et al. (2003), Yanasse e Limeira (2006), Lee (2007), Moretti e Salles Neto (2008), Golfeto et al. (2009), Cui e Liu (2011), Araújo et al. (2014) resolvem o problema heurísticamente.

Neste trabalho apresentamos uma abordagem para a obtenção de soluções para o problema de corte de estoque visando minimizar tanto a quantidade de objetos usados quanto a quantidade de padrões de corte distintos. A abordagem proposta consiste inicialmente na obtenção de uma solução exata através do modelo proposto por Valério de Carvalho (1999, 2002) com o objetivo de obtenção de uma solução com perda mínima. Posteriormente, aplica-se à solução obtida um conjunto de procedimentos que tentam reduzir a quantidade de padrões de corte distintos. Tais procedimentos são baseados nos trabalhos de Foerster e Wäscher (2000), e foram propostos por Yanasse et al. (2011). Este conjunto de métodos, em sua forma original, tenta combinar padrões de corte distintos de modo que a quantidade de objetos usados se mantém constante em relação à solução inicial. Entretanto, as modificações realizadas nos métodos KOMBI – que chamamos de KOMBI estendido – permitem um acréscimo controlado na quantidade de objetos cortados se isto implicar em uma maior redução da quantidade de padrões distintos e; neste trabalho, apresentamos esses resultados de testes computacionais que comparam esse *tradeoff*.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: esta é a seção 1 que apresenta uma introdução ao problema de corte de estoque com minimização do número de diferentes padrões de corte. Na seção 2 apresentamos a definição e os modelos matemáticos considerados. A seção 3 apresenta o método de solução utilizado na resolução do problema. Na seção 4 apresentamos os testes computacionais e na seção 5 as conclusões e propostas futuras.

2. Definição do problema e modelagem matemática

Agora, fazemos uma breve descrição do problema de corte de estoque unidimensional com minimização do número de padrões de corte.

Suponha que temos disponíveis objetos (barras, rolos, bobinas etc.) de um dado comprimento L , em quantidade suficiente para atender toda a demanda por itens. Temos, também, um conjunto de itens de um dado comprimento l_i , $i = 1, \dots, m$, que devem ser cortados para atender a demanda d_i , $i = 1, \dots, m$. O problema de corte de estoque consiste em produzir os itens demandados cortando-se os objetos disponíveis em estoque, de forma que a demanda dos

clientes seja atendida e uma função objetivo seja otimizada, i. e., minimizando perda de material e o número de padrões de corte distintos.

Chamamos de padrão de corte um vetor m -dimensional $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$, em que a_{ij} é a quantidade de itens do tipo i , no j -ésimo padrão de corte. No caso unidimensional, o vetor associado a um padrão de corte \mathbf{a}_j deve satisfazer a restrição física de capacidade de um problema da mochila:

$$l_1 a_{1j} + l_2 a_{2j} + \dots + l_m a_{mj} \leq L \quad (1)$$

$$0 \leq a_{ij} \leq d_i, \quad i = 1, \dots, m \text{ e inteiros.} \quad (2)$$

O problema de corte de estoque com quantidade reduzida de padrões de corte (*Cutting Stock Problem with Reduced Number of Cutting Patterns - CSPRP*) pode ser modelado conforme segue:

$$\text{Minimizar} \quad (3)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j x_j \geq \mathbf{d} \quad (4)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \text{ e inteiro} \quad (5)$$

$$\delta(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j \geq 0 \\ 0, & \text{cc} \end{cases} \quad (6)$$

em que:

n é a quantidade total de padrões de corte factíveis;

c_j é o custo do objeto cortado conforme o padrão de corte \mathbf{a}_j ;

s_j indica o custo de setup para o padrão de corte \mathbf{a}_j ; e

x_j constitui a frequência do padrão de corte \mathbf{a}_j (variável de decisão);

$\delta(x_j)$ é igual a um se há troca de padrão de corte e zero, caso contrário (variável de decisão).

Uma solução do modelo apresentado é difícil de ser obtida. Conforme observaram Yanasse e Limeira (2006), a obtenção da quantidade mínima de padrões de corte para o problema é NP-difícil. Desta forma, tratamos o problema da redução de padrões de corte através de heurísticas, as quais são apresentadas na próxima seção. A estratégia utilizada para a redução do número de padrões de corte é baseada na combinação de padrões de corte. Dada uma solução para o problema de corte de estoque com perda mínima, o método identifica dois padrões passíveis de serem substituídos por um único padrão de corte. Para isso, é preciso conhecer uma solução para o problema de corte de estoque e então aplicar o procedimento para reduzir o número de padrões de corte distintos.

Agora, apresentamos o modelo de Valério de Carvalho (1999, 2002), um modelo de fluxo em arcos, que utilizamos para a resolução do problema de corte e que fornece os padrões de corte e suas respectivas frequências para serem combinados.

Neste modelo, o comprimento do objeto é discretizado em unidades de comprimento e as restrições e as variáveis estão associadas às posições físicas destas unidades. Cada unidade do comprimento do objeto é representada por um nó de um grafo, sendo que os comprimentos dos itens são representados por arestas direcionadas entre estes nós, cujo comprimento da aresta é o mesmo do item.

Assim, para um objeto de comprimento L , teremos os nós $\{0, \dots, L\}$, sendo – por convenção – o nó 0 representando o início do objeto. Denotando por l_p o comprimento do p -ésimo item demandado, a representação deste item em um padrão de corte pode ser realizada através de um arco direcionado partindo de qualquer nó inicial i e chegando ao nó final $j = i + l_p$,

respeitando os limites do objeto, ou seja, $i \geq 0$ e $j \leq L$. Caso não existam itens de comprimento unitário, pode-se considerar arcos adicionais de comprimento igual a uma unidade como perdas.

Podemos definir o problema de corte de estoque baseado neste modelo como um problema em encontrar um caminho em um grafo acíclico direcionado $G=(V,A)$, sendo $V=\{0,1,\dots,L\}$ o conjunto de vértices e o conjunto de arcos representado por $A=\{(i,j) : 0 \leq i < j \leq L, j-i = l_p \ \forall p \leq m\}$. Então, podemos afirmar que existe um padrão de corte válido associado a um objeto se, e somente se, existir um caminho entre os vértices 0 e L, sendo que os comprimentos dos arcos definem o comprimento dos itens a serem cortados.

O problema é então modelado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z \\ \text{sujeito a:} & \end{array} \quad (7)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(j,k) \in A} x_{jk} = \begin{cases} -z, & j = 0 \\ 0, & j = 1, \dots, L-1 \\ z, & j = L \end{cases} \quad (8)$$

$$\sum_{(k,k+l_i) \in A} x_{k,k+l_i} \geq d_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (9)$$

$$x_{ij} \in Z^+, \quad \forall (i,j) \in A \quad (10)$$

sendo z a quantidade de fluxo entre os vértices 0 e L e que representa a quantidade de objetos cortados; x_{ij} representa a quantidade de fluxo em um arco de comprimento $j-i$ e representa a quantidade de vezes que um item de comprimento $j-i$ é cortado a i unidades do início do objeto; $d_i, i = 1, \dots, m$ representa a demanda dos m itens e A representa o conjunto de arcos válidos, ou seja, arcos que possuem seus comprimentos mapeados aos comprimentos dos objetos demandados, independente dos nós iniciais e finais, desde que respeitados os limites do objeto. O modelo (7)-(10) foi implementado e utilizado para gerar a solução inicial com perda mínima, ou seja, forneceu os padrões de corte e suas respectivas frequências para que fosse aplicado o método KOMBI para tentar combinar padrões distintos e assim redução o número total de padrões de corte distintos.

3. Método de solução: KOMBI Estendido

3.1. O método KOMBI

O funcionamento do KOMBI proposto por Foerster e Wäscher (2000) está atrelado à frequência dos padrões de corte iniciais a serem combinados, que deve ser mantida após o processamento da solução, assim como também deve ser mantida constante a quantidade de itens a serem gerados pelo novo padrão. É com esta frequência obtida inicialmente que verifica-se se há a possibilidade de gerar novos padrões factíveis mantendo o atendimento à demanda.

Entretanto, se permitirmos que a frequência final possa ser maior que a frequência original e mantivermos a demanda atendida, damos uma flexibilidade maior na possibilidade de combinações, evitando que o procedimento de combinação se encerre devido à limitação da capacidade dos objetos. A seguir, descrevemos essa extensão do método KOMBI. Para detalhes sobre o método KOMBI, em sua forma original, ver Foerster e Wäscher (2000).

3.2. O método KOMBI Estendido

Seja x^* a frequência (denotada por *) do novo padrão a ser combinado a partir de dois padrões arbitrários 1 e 2 e seja $T = 0, \dots, h$, onde h é um valor inteiro não negativo, que denota o grau de flexibilidade no aumento de objetos, ou seja, a quantidade máxima de objetos possíveis de serem inseridos a mais a cada tentativa de combinação de padrões.

A combinação de padrões segue a seguinte ordem:

1. para todo $T, T = 0, \dots, h$ calcula-se a frequência x^* do novo padrão de corte

$$x^* = x_1 + x_2 + T;$$
2. para todo $i, i = 1, \dots, m$, calcula-se a soma

$$s_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2;$$
 que representa o número de itens do tipo i fornecido pelos dois padrões originais;
3. para todo $i, i = 1, \dots, m$, determina-se recursivamente

Toda vez que o procedimento recursivo no passo 3 é chamado, a factibilidade do possível padrão parcialmente determinado $(\alpha_{1^*}, \dots, \alpha_{k^*})$, com $k \leq m$, é verificada e caso o comprimento total de itens obtidos neste padrão for maior que o comprimento do objeto,

$$\sum_{i=1}^k l_i \alpha_{i^*} > L$$

a recursão é interrompida e um novo par de padrões é testado.

Conforme ocorre no KOMBI proposto por Foerster e Wäscher (2000) em relação às diversas formas de combinações de padrões (de p para q padrões), o mesmo é possível no KOMBI Estendido. Basta estabelecermos o valor máximo de objetos a mais que permitiremos incluir a cada tentativa de combinação de padrões (valor máximo de T) e, para cada valor de T , tentamos combinar os padrões da solução.

4. Testes computacionais

4.1. O gerador aleatório

O gerador aleatório CUTGEN1 proposto por Gau e Wäscher (1995) foi usado para gerar o conjunto de dados utilizados nos testes computacionais. Dezoito classes com 100 instâncias cada foram geradas aleatoriamente, com os mesmos parâmetros usados em Foerster e Wäscher (2000).

Os seguintes parâmetros caracterizam as 1800 instâncias geradas:

- Número de tipos de itens (n): 10, 20 e 40;
- Comprimento do objeto em estoque (L): 1000;
- Comprimento dos itens (l_i): os comprimentos foram aleatoriamente gerados no intervalo $[v_1L, v_2L]$, sendo $v_1 = 0,01$ e $v_2 = 0,2$ para gerar itens considerados pequenos, $v_1 = 0,01$ e $v_2 = 0,8$ para gerar itens considerados médios e $v_1 = 0,2$ e $v_2 = 0,8$ para gerar itens considerados grandes;
- Demanda média (\bar{d}): 10 ou 100;

A Tabela 1 mostra concisamente estes parâmetros, além da média do limite inferior tanto para o número de objetos cortados (\bar{n}) quanto para o número de padrões de corte distintos (\bar{p}) (Yanasse e Limeira, 2006) referente a cada classe.

Tabela 1: Parâmetros de definição das classes de exemplos e limitantes inferiores.

Classe	n	Número de itens (n)	v_1	v_2	Limitantes inferiores	
					\bar{n}	\bar{p}
1	10	10	0.01	0.2	10,98	1,67
2	100	10	0.01	0.2	109,74	1,67
3	10	20	0.01	0.2	21,58	2,56

4	100	20	0.01	0.2	215,41	2,56
5	10	40	0.01	0.2	42,48	4,26
6	100	40	0.01	0.2	424,23	4,26
7	10	10	0.01	0.8	49,96	4,62
8	100	10	0.01	0.8	499,34	4,62
9	10	20	0.01	0.8	93,35	8,65
10	100	20	0.01	0.8	931,95	8,65
11	10	40	0.01	0.8	176,59	16,27
12	100	40	0.01	0.8	1763,19	16,27
13	10	10	0.2	0.8	63,23	5,54
14	100	10	0.2	0.8	632,10	5,54
15	10	20	0.2	0.8	119,36	10,52
16	100	20	0.2	0.8	1191,76	10,52
17	10	40	0.2	0.8	224,56	19,85
18	100	40	0.2	0.8	2242,30	19,85

4.2. Resultados

Foram realizados testes computacionais utilizando os conjuntos de dados discutidos na seção anterior como dados de entrada para a resolução do 1D-SSSCSP pelo modelo proposto por Valério de Carvalho (1999, 2002). A partir das soluções obtidas pelo modelo, os padrões de corte foram reconstruídos de forma que permitissem a aplicação dos procedimentos KOMBI Estendidos.

A Tabela 2 mostra a média e o respectivo desvio padrão do número de objetos cortados obtidos para diferentes valores da quantidade máxima de objetos a mais a serem inseridos em cada tentativa de combinação de padrões (valor de T). Foram realizados testes para T variando de 0 (denotado por T_0) até 5 (denotado por T_5), sendo que o KOMBI Estendido T_0 é equivalente ao KOMBI proposto por Foerster e Wäscher (2000).

A coluna denotada por SK representa os valores da média da quantidade de objetos cortados obtidos pelo modelo de Valério de Carvalho (1999, 2002) sem o pós-processamento da solução por quaisquer procedimentos KOMBI Estendido, e consta na tabela de forma que possam ser utilizados como base para a avaliação dos demais métodos.

Tabela 2: Média e desvio padrão do número de objetos.

Classe	SK (σ)	T0 (σ)	T1 (σ)	T2 (σ)	T3 (σ)	T4 (σ)	T5 (σ)
1	11,48 (2,08)	11,48 (2,08)	13,73 (2,57)	14,45 (2,65)	15,17 (3,01)	15,57 (3,31)	15,92 (3,35)
2	110,25 (20,36)	110,25 (20,36)	112,01 (20,27)	114,03 (20,08)	116,13 (19,86)	117,73 (20,34)	119,78 (21,12)
3	22,13 (3,11)	22,13 (3,11)	25,01 (3,81)	26,59 (4,19)	27,70 (4,13)	29,06 (4,67)	29,71 (5,02)
4	215,93 (30,88)	215,93 (30,88)	217,80 (30,65)	220,58 (30,31)	222,95 (29,83)	225,75 (29,60)	229,15 (29,80)
5	42,95 (4,08)	42,95 (4,08)	47,49 (4,86)	50,97 (4,94)	53,88 (6,12)	56,96 (6,68)	58,01 (6,67)
6	424,68 (39,96)	424,68 (39,96)	427,67 (39,39)	431,17 (38,87)	435,04 (38,60)	440,56 (39,15)	445,71 (37,74)
7	50,24 (13,91)	50,24 (13,91)	50,72 (13,58)	51,16 (13,32)	51,88 (13,04)	52,40 (12,94)	52,80 (12,96)
8	499,62 (140,13)	499,62 (140,13)	499,68 (140,05)	499,78 (139,99)	499,90 (139,81)	500,10 (139,48)	500,15 (139,42)
9	93,65 (21,50)	93,65 (21,50)	94,51 (21,04)	95,43 (20,53)	96,39 (20,00)	96,99 (19,84)	97,39 (19,65)
10	932,26 (215,01)	932,26 (215,01)	932,36 (214,99)	932,50 (214,83)	932,77 (214,63)	933,05 (214,33)	933,15 (214,30)

11	176,90 (25,65)	176,90 (25,65)	178,16 (24,93)	179,68 (24,37)	180,91 (23,90)	181,95 (23,73)	183,40 (24,00)
12	1763,45 (257,00)	1763,45 (257,00)	1763,54 (256,93)	1763,60 (256,88)	1763,87 (256,99)	1764,07 (256,85)	1764,42 (256,60)
13	63,47 (13,25)	63,47 (13,25)	63,78 (13,11)	64,04 (12,99)	64,31 (12,88)	64,67 (12,71)	64,97 (12,65)
14	632,36 (133,18)	632,36 (133,18)	632,40 (133,13)	632,42 (133,09)	632,54 (132,94)	632,74 (132,93)	632,84 (133,01)
15	119,59 (21,28)	119,59 (21,28)	120,08 (21,15)	120,70 (20,70)	121,15 (20,57)	121,55 (20,34)	122,25 (20,20)
16	1192,00 (213,03)	1192,00 (213,03)	1192,03 (213,00)	1192,23 (212,85)	1192,26 (212,86)	1192,26 (212,86)	1192,76 (212,64)
17	224,85 (25,53)	224,85 (25,53)	225,66 (25,35)	226,50 (25,12)	227,43 (24,82)	228,31 (24,92)	229,31 (24,58)
18	2242,59 (254,97)	2242,59 (254,97)	2242,68 (254,93)	2242,78 (254,88)	2243,02 (254,80)	2243,34 (254,69)	2243,59 (254,69)

Os valores das médias de objetos consumidos obtidos pelos métodos *SK* e *T0* são iguais pois em ambos não há incremento na quantidade de objetos. Entretanto, para os métodos *T1*, *T2*, *T3*, *T4* e *T5*, notamos o comportamento esperado do aumento na quantidade de objetos cortados que acompanha o incremento da quantidade máxima de objetos permitidos a serem inseridos em cada tentativa de combinação do KOMBI Estendido.

A Tabela 3 apresenta a média e o respectivo desvio padrão do número de padrões de corte distintos obtidos após a execução de cada método. Nota-se que, em relação ao incremento de objetos em cada tentativa de combinação, houve uma resposta favorável sobre os valores dos padrões de corte combinados, os quais foram reduzidos em mais unidades quanto maior era a quantidade de permissão de inserção de objetos na solução.

Pode-se observar também que há uma redução progressiva da média de padrões de corte distintos consoante com o aumento do valor de *T*. Ainda, conforme podemos visualizar nas figuras 1 à 9, a porcentagem de padrões de corte reduzidos é sempre maior que a porcentagem de objetos inseridos na solução.

Tabela 3: Média e desvio padrão do número de padrões de corte.

Classe	SK (σ)	T0 (σ)	T1 (σ)	T2 (σ)	T3 (σ)	T4 (σ)	T5 (σ)
1	6,77 (1,46)	5,06 (1,08)	2,81 (0,67)	2,45 (0,61)	2,21 (0,50)	2,11 (0,44)	2,04 (0,47)
2	9,83 (1,48)	8,86 (1,22)	7,10 (1,36)	6,09 (1,37)	5,39 (1,39)	4,99 (1,22)	4,58 (1,13)
3	12,69 (1,82)	9,01 (1,68)	6,13 (1,14)	5,34 (0,89)	4,97 (0,95)	4,63 (0,87)	4,50 (0,87)
4	19,30 (3,38)	16,83 (1,89)	14,96 (1,83)	13,57 (1,87)	12,78 (1,92)	12,08 (2,04)	11,40 (1,93)
5	26,62 (4,01)	19,27 (2,53)	14,73 (2,02)	12,99 (1,87)	12,02 (1,59)	11,25 (1,64)	11,04 (1,65)
6	41,85 (10,71)	34,88 (4,60)	31,89 (3,80)	30,14 (3,52)	28,85 (3,11)	27,47 (2,70)	26,44 (2,80)
7	8,16 (1,16)	7,58 (1,11)	7,10 (1,08)	6,88 (1,12)	6,64 (1,11)	6,51 (1,08)	6,43 (1,10)
8	8,63 (1,57)	8,23 (1,41)	8,17 (1,36)	8,12 (1,35)	8,08 (1,33)	8,03 (1,33)	8,02 (1,33)
9	16,36 (1,96)	15,26 (1,75)	14,40 (1,45)	13,94 (1,44)	13,62 (1,46)	13,47 (1,47)	13,39 (1,46)
10	17,30 (2,35)	16,91 (2,27)	16,81 (2,25)	16,74 (2,20)	16,65 (2,17)	16,58 (2,12)	16,56 (2,11)
11	31,89 (3,94)	29,72 (3,09)	28,46 (2,70)	27,70 (2,39)	27,29 (2,38)	27,03 (2,29)	26,74 (2,18)
12	33,95 (4,62)	33,52 (4,48)	33,43 (4,41)	33,40 (4,39)	33,31 (4,37)	33,26 (4,32)	33,19 (4,31)
13	9,23 (0,90)	8,33 (0,87)	8,02 (0,87)	7,89 (0,82)	7,80 (0,81)	7,71 (0,83)	7,65 (0,83)
14	9,50 (0,87)	9,00 (0,97)	8,96 (0,92)	8,95 (0,91)	8,91 (0,91)	8,86 (0,89)	8,84 (0,89)
15	18,24 (1,27)	16,85 (1,36)	16,36 (1,23)	16,05 (1,16)	15,90 (1,16)	15,80 (1,25)	15,66 (1,27)
16	18,92 (1,16)	18,42 (1,21)	18,39 (1,21)	18,29 (1,15)	18,28 (1,17)	18,28 (1,17)	18,18 (1,14)
17	36,10 (2,28)	33,03 (2,26)	32,22 (2,17)	31,80 (2,14)	31,49 (2,15)	31,27 (2,21)	31,07 (2,21)

18 | 37,67 (2,26) 36,68 (2,09) 36,59 (2,11) 36,54 (2,10) 36,46 (2,09) 36,38 (2,05) 36,33 (2,05)

A partir da Tabela 2, foi calculada a porcentagem da quantidade de objetos utilizados pelos métodos $T1$, $T2$, $T3$, $T4$ e $T5$ em relação ao método $T0$. De forma semelhante, a partir da Tabela 3, calculamos a porcentagem da quantidade de padrões de corte distintos obtidos com os métodos $T1$, $T2$, $T3$, $T4$ e $T5$ em relação ao método $T0$. Com os valores obtidos, construímos as figuras 1 à 9.

Analisando os dados apresentados nas figuras 1 à 9, chegamos às seguintes conclusões discutidas a seguir.

Para os exemplos das classes 1 e 3, obtivemos uma taxa de variação equivalente entre a redução de padrões e o aumento no consumo de objetos, sendo que houve um decremento constante aproximado de 5% na quantidade de padrões ao passo que obtivemos a mesma porcentagem de aumento na quantidade de objetos.

A classe 5 é a única a possuir a característica de ter uma variação maior na porcentagem do consumo de objetos que da redução de padrões em relação ao aumento do grau de flexibilidade. Tomando a curva da variação de objetos e padrões por uma aproximação linear, temos que o aumento da média de objetos é de aproximadamente 6,12% em relação ao aumento de cada grau de flexibilidade. Por outro lado, com o aumento do grau de flexibilidade, conseguimos reduzir apenas 4,79%.

Figura 1: Variação de objetos e padrões de corte (classes 1 e 2).



Figura 2: Variação de objetos e padrões de corte (classes 3 e 4).



Figura 3: Variação de objetos e padrões de corte (classes 5 e 6).


As classes 2, 4 e 6 mostram o melhor desempenho com o aumento do grau de flexibilidade para estas seis classes constituídas de exemplares com itens demandados definidos como pequenos. Na classe 2, 4 e 6, obtivemos, respectivamente, um aumento de 10%, 5% e 5% no consumo de objetos enquanto a redução de padrões foi de 30%, 20% e 15%, aproximadamente.

De forma análoga para as classes 1 à 6, as figuras 4, 5 e 6 mostram o *trade-off* referente às classes 7 à 12, cujos exemplares possuem itens demandados definidos como médios.

Figura 4: Variação de objetos e padrões de corte (classes 7 e 8).

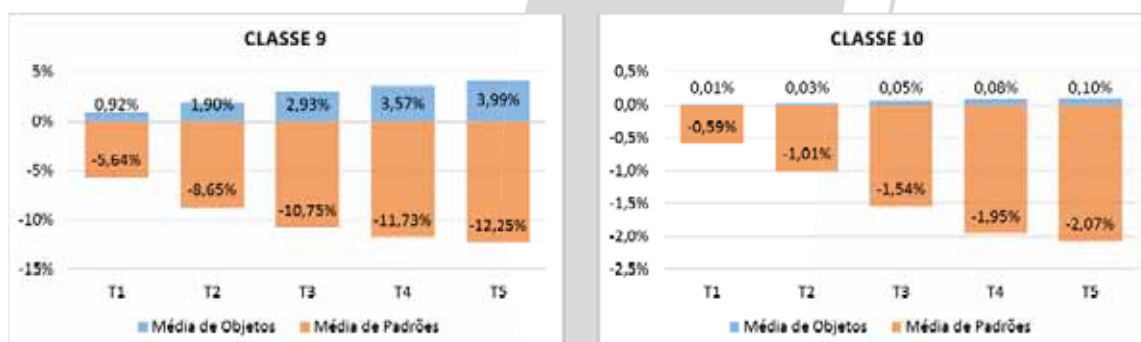
Figura 5: Variação de objetos e padrões de corte (classes 9 e 10).


Figura 6: Variação de objetos e padrões de corte (classes 11 e 12).


Deste conjunto de classes referentes a itens médios, as classes 7, 9 e 11 possuem de forma geral a mesma característica: a porcentagem de aumento de objetos é pouco menor que a porcentagem da redução dos padrões. Entretanto, para as classes 8, 10 e 12, a característica principal é que não houve um aumento considerável na quantidade de objetos cortados. O mesmo é válido para as classes 13 à 18, definidas com itens demandados de tamanho grande.

Figura 7: Variação de objetos e padrões de corte (classes 13 e 14).

Figura 8: Variação de objetos e padrões de corte (classes 15 e 16).

Figura 9: Variação de objetos e padrões (classes 17 e 18).


A Tabela 4 mostra os tempos computacionais necessários para a execução dos procedimentos KOMBI Estendido (T0 à T5), os quais foram implementados na linguagem C++ e executados em um computador Intel Core i7 @2GHz com 8GB de RAM. Não foi levado em consideração o tempo para a obtenção da solução inicial, nem o tempo necessário para a reconstrução dos padrões de corte a partir da solução do modelo de Valério de Carvalho (1999, 2002).

De forma geral, com o aumento do grau de flexibilidade nos procedimentos KOMBI Estendido, não há um aumento considerável no tempo necessário para a obtenção da solução final. Apenas as classes 4, 5 e 6 demandam um tempo maior para execução com o aumento no grau de flexibilidade em relação ao KOMBI T0 sendo que a classe 4 e 5 demandam poucos segundos, enquanto o pior caso – a classe 6 – demandou aproximadamente 30 segundos a mais que o KOMBI T0. Para as demais classes, o acréscimo no tempo é de menos de um segundo.

Tabela 4: Média de tempo computacional para execução do KOMBI Estendido (em segundos).

Classe	T0	T1	T2	T3	T4	T5
1	0,012	0,013	0,014	0,014	0,014	0,015
2	0,075	0,104	0,122	0,117	0,125	0,138
3	0,287	0,358	0,380	0,374	0,398	0,405
4	1,511	2,156	2,565	2,803	3,037	3,136
5	12,698	14,902	15,595	16,020	16,439	16,521
6	85,956	98,324	104,633	111,322	116,337	118,822
7	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002
8	0,001	0,002	0,002	0,003	0,004	0,005
9	0,010	0,016	0,021	0,027	0,029	0,034
10	0,013	0,023	0,032	0,046	0,051	0,060
11	0,206	0,305	0,362	0,470	0,516	0,585
12	0,165	0,292	0,405	0,571	0,664	0,760
13	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003
14	0,001	0,002	0,002	0,003	0,004	0,005
15	0,013	0,021	0,027	0,035	0,038	0,044
16	0,013	0,024	0,034	0,051	0,056	0,065
17	0,281	0,410	0,499	0,677	0,730	0,790
18	0,212	0,365	0,499	0,730	0,852	0,955

5. Conclusões e propostas

Neste trabalho, foi proposta uma variação no método KOMBI proposto por Foerster e Wäscher (2000) para a resolução do problema de corte de estoque unidimensional tendo por objetivo tanto minimizar o número de objetos cortados quanto reduzir o número de padrões de corte distintos.

A partir do modelo matemático formulado por Valério de Carvalho (1999, 2002), foi desenvolvido um algoritmo para obter soluções exatas para o problema de corte de estoque unidimensional com o objetivo de minimizar perdas e, a partir destas soluções, os padrões de corte associados a elas foram reconstruídos de forma que tais padrões pudessem ser processados pelos procedimentos de combinações de padrões baseados nas ideias de Foerster e Wäscher (2000) – o KOMBI Estendido.

Os testes computacionais mostraram que o método proposto possui boa eficiência, tendo uma taxa de redução de padrões de corte maior que a taxa de aumento do consumo de objetos. Conforme as análises do tempo computacional para a execução dos métodos que foram comparados, nota-se que não há um aumento de tempo considerável no método KOMBI Estendido.

Como continuidade deste trabalho, o procedimento KOMBI Estendido será modificado de forma a aceitar padrões referentes a múltiplos tipos de objetos, de forma que a solução ótima inicial obtida na primeira etapa seja processada por tais procedimentos visando a redução da quantidade de padrões de corte distintos.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem as agências de financiamento FAPESP e CNPq.

Referências

- Alves, C. e Valério de Carvalho, J. M.** (2008), A branch-and-price-and-cut algorithm for the pattern minimization problem. *RAIRO Operations Research*, 42(4), 435–453.
- Araujo, S. A., Poldi, K. C. e Smith, J.** (2014), A genetic algorithm for the one-dimensional cutting stock problem with setups, *Pesquisa Operacional*, 34(2), 165–187.
- Cui, Y. e Liu, Z.** (2011), C-sets-based sequential heuristic procedure for the one-dimensional cutting stock problem with pattern reduction. *Optimization Methods and Software*, 26(1), 155–67.
- Diegel A., Chetty, M., Van Schalkwyk, S. e Naidoo, S.** (1993), Setup combining in the trim loss problem—3to2 & 2to1. Working paper. Business Administration. University of Natal. Durban.
- Farley, A. A. e Richardson, K. V.** (1984), Fixed charge problems with identical fixed charges. *European Journal of Operational Research*, 18(2), 245–249.
- Foerster, H. e Wäscher, G.** (2000), Pattern reduction in one-dimensional cutting stock problem. *International Journal of Production Research*, 38(7): 1657–1676.
- Gau, T. e Wäscher, G.** (1995), CUTGEN1: A problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem, *European Journal of Operational Research*, 84, 572–579.
- Gilmore, P. C. e Gomory, R. E.** (1961), A linear programming approach to the cutting stock problem, *Operations Research*, 9, 848–859.
- Gilmore, P. C. e Gomory, R. E.** (1963), A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II, *Operations Research*, 11, 863–888.
- Golfeto, R. R., Moretti, A. C. e Salles Netto, L. L.** (2009), A genetic symbiotic algorithm applied to the one-dimensional cutting stock problem. *Pesquisa Operacional*, 29(2), 365–382.

- Kantorovich, L. V.** (1960), Mathematical methods of organizing and planning production. *Management Science*, 6, 366–422.
- Lee J.** (2007), In situ column generation for a cutting-stock problem. *Computers & Operations Research*, 34(8), 2345–2358.
- Moretti, A. C. e Salles Neto, L. L.** (2008), Nonlinear cutting stock problem model to minimize the number of different patterns and objects. *Computational and Applied Mathematics*, 27, 61–78.
- Umetani, S., Yagiura, M. e Ibaraki, T.** (2003), An LP-based local search to the one dimensional cutting stock problem using a given number of cutting patterns. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E86-A, 1093–1102.
- Valério de Carvalho, J. M.** (1999), Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound, *Annals of Operations Research*, 86, 629–659.
- Valério de Carvalho, J. M.** (2002), LP models for bin packing and cutting stock problems, *European Journal of Operational Research*, 144, 253–273.
- Vanderbeck, F.** (2000), Exact algorithm for minimizing the number of setups in the one-dimensional cutting stock problem. *Operations Research*, 48(6), 915–926.
- Yanasse, H. H. e Limeira, M. S.** (2006), A hybrid heuristic to reduce the number of different patterns in cutting stock problems. *Computers & Operations Research*, 33(9), 2744–2756.
- Yanasse, H. H., Poldi, K. C. e Cerqueira, G. R. L.** (2011), Modified KOMBI to reduce the different patterns in cutting stock problems. *IFORS 2011*, Melbourne, Australia. *Conference Program and Abstract Book*, p.5.