

ANÁLISE DOS PICOS DE DEMANDA DIÁRIA DE ENERGIA ELÉTRICA VIA CADEIAS DE MARKOV

Débora Campbell de Oliveira

Bolsista de Iniciação Científica do curso de Graduação em Engenharia de Produção

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

Departamento de Engenharia Industrial

deboracampbell14@gmail.com

Paula Medina Maçaira

Doutoranda em Engenharia de Produção

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

Departamento de Engenharia Industrial

paulamacaira@gmail.com

Fernando Luiz Cyrino Oliveira

Professor orientador do trabalho

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

Departamento de Engenharia Industrial

cyrino@puc-rio.br

RESUMO

O monitoramento diário da demanda energética permite o acompanhamento do consumo ao longo do dia, definindo horários críticos e auxiliando o planejamento do suprimento da demanda ao longo do dia. Este trabalho investiga o comportamento da demanda energética diária do Brasil entre 2009-2014. A metodologia empregada utiliza conceitos de Cadeias de Markov e dois modelos são propostos. O primeiro fornece um tratamento individualizado para cada um dos subsistemas. O segundo, uma visão geral do Sistema Interligado Nacional. Os resultados obtidos mostraram que as séries dos picos de energia possuem comportamento de leve crescimento e que permanecem, caso não haja intervenção no sistema de abastecimento. As análises mostraram que Norte e Nordeste possuem características próximas quanto às variações de demandas nos picos, assim como Sul e Sudeste/Centro-Oeste. Este trabalho foi realizado pela aluna Débora Campbell, com auxílio, na parte computacional, da doutoranda Paula Maçaira e sob a orientação do Prof. Fernando Cyrino.

PALAVRAS CHAVE. Cadeias de Markov, Séries temporais, Demanda energética.

Área Principal: EN, EST, MP

ABSTRACT

Daily monitoring of energy demand allows the tracking of energy consumption throughout the day, defining critical hours and assisting the demand supply planning over the day. This paper investigates the behaviour of daily energy demand in Brazil between 2009-2014. The methodology uses concepts of Markov Chain and two models are proposed. The first provides an individualized treatment for each one of the subsystems. The second, an overview of the National Interconnected System. The results showed that the energy peak series have a light growth behaviour and remain, if there is no intervention in the supply system. The analyses showed that North and Northeast have similar characteristics with respect to changes in demands on the peaks, as well as South and Southeast/Midwest. This work was performed by the student Débora Campbell, with support, in the computational part, of the PhD student Paula Maçaira and under the orientation of Prof. Fernando Cyrino.

KEYWORDS. Markov Chain, Time Series, Energy demand.

Main Area: EN, EST, MP

1. Introdução

O sistema brasileiro de geração de energia elétrica, com produção de aproximadamente 135.000 MW é basicamente hidroelétrico. Esta fonte de energia é responsável por cerca de 70% (EPE, 2014) da eletricidade consumida no país, sendo o restante dividido basicamente por gerações termoeletricas e term nucleares. Com toda esta dependência do Brasil em uma fonte que está sujeita a diversas variações climáticas e comerciais, o planejamento e o estudo da demanda de energia se tornam essenciais para o bom funcionamento do sistema.

O cenário atual do setor energético brasileiro se estabeleceu a partir de um modelo aplicado desde 2004 (Tolmasquim, 2011), após o setor ter enfrentado crises como a transição do modelo estatal para o modelo privado e o racionamento ocorrido em 2001. O monitoramento da demanda de energia é realizado com o intuito de evitar ou amenizar os efeitos das possíveis crises que serão enfrentadas, além de servir para o conhecimento aprofundado do sistema energético. Ainda, as considerações das especificidades que envolvem este setor com relação ao planejamento da expansão nacional, planejamento de operação e a valorização do preço da energia no mercado, evidenciam a importância deste estudo e da busca de soluções com o auxílio de técnicas de otimização estocástica (Souza, 2014).

Devido à importância citada anteriormente, o objetivo desta pesquisa é o estudo dos picos de demanda diária de energia a partir de Cadeias de Markov. Foram analisados dados diários de carga horária da demanda de energia elétrica, divididos pelos subsistemas que compõem o Sistema Interligado Nacional (SIN): Sudeste/Centro Oeste, Sul, Norte e Nordeste.

O trabalho foi dividido em dois casos: o primeiro com dois estados para cada subsistema, em que o estado 1 é definido quando a mudança entre os picos diários é positiva e o segundo quando é negativa. Para o segundo caso foi preciso agregar os dados dos quatro subsistemas, gerando o total do Brasil, e calcular um valor limite através do gráfico de Pareto para a divisão em três estados, onde o primeiro foi definido como as mudanças inter diárias com valores entre 0 e o valor limite τ , o segundo são os valores maiores que este limite e o terceiro as variações negativas.

As demais seções do artigo estão organizadas da seguinte maneira: a seção 2 apresenta o material e os métodos utilizados, incluindo a metodologia, as características do Sistema Elétrico Brasileiro e a análise descritiva. Na seção 3 serão apresentados os resultados, na seção 4 as conclusões e na seção 5, as referências bibliográficas.

2. Material e Métodos

2.1. Metodologia

Este trabalho utiliza conceitos da teoria de Processos Estocásticos, particularmente de Markov para a obtenção dos resultados e para a realização das análises em questão. Uma cadeia de Markov é um processo estocástico com hipóteses adicionais que proporcionam uma simplificação no tratamento matemático. Pode-se dizer que ela é um caso particular de um processo estocástico, com estados discretos e que apresenta a propriedade Markoviana que significa que os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido (Barros, 2004).

Para esta pesquisa, primeiramente foi definido Z_1, \dots, Z_n como uma sequência de picos diários de demanda de energia elétrica e a mudança diária Z_t no dia t , como $Z_t = X_t - X_{t-1}$, em que X_t corresponde à demanda de energia no instante t , para $t = 1, \dots, n$. Esta análise consiste em modelar as mudanças no pico de energia entre dias usando os conceitos de Cadeias de Markov discretas. Inicialmente, dois estados foram definidos: estado 1 se a mudança for positiva, ou seja, há um aumento no pico de energia de um dia para outro e estado 0 se a mudança for negativa, ou seja, há uma redução no pico de energia entre os dias (Sigauke e Chikobvu, 2014). Outra definição importante é P_{ij} como a probabilidade de ocorrência da transição do estado i para o estado j em um período, por exemplo, P_{10} é a probabilidade de sair do estado 1 para o estado 0.

Para uma Cadeia de Markov de n estados, a matriz P_{nn} , $P = [p_{ij}]$, é a matriz de transição associada ao processo, que possui duas características básicas: todas as entradas são não negativas

e todas as colunas tem a soma de entradas igual a um. Para uma matriz com dois estados há quatro possibilidades de transição: do estado 1 para o 0, do estado 1 para ele mesmo, do estado 0 para o 1 e do estado 0 para ele mesmo, como ilustrado no grafo estocástico da Figura 1. A soma do número de transições entre estados é encontrada para se calcular as matrizes de transição que serão mostradas na seção dos resultados obtidos.

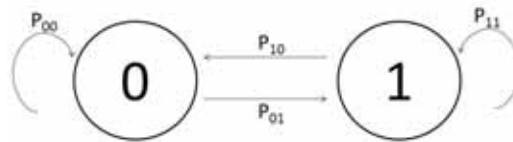


Figura 1: Grafo com probabilidades de transição.

2.2. Visão geral do Sistema Elétrico Brasileiro (SEB)

A análise presente neste projeto contou com uma base de dados dividida pelos quatro subsistemas do Brasil que foram criados pelo SIN com o objetivo de maximizar o aproveitamento energético brasileiro. Em meados da década de 70 o Sul e Sudeste passaram a ser as primeiras regiões interligadas pelo sistema, que atualmente engloba todas as regiões do país, menos uma pequena parte da região Norte. O SIN foi criado com o objetivo de ampliar a confiabilidade, aperfeiçoar os recursos energéticos e homogeneizar mercados, já que o Brasil possuía vários sistemas elétricos desconectados. Isso impossibilitava uma operação eficiente das bacias hidrográficas regionais e da transmissão de energia elétrica entre as principais usinas geradoras. Atualmente, ele pode ser considerado uma interconexão dos sistemas elétricos e uma integração dos recursos de geração e transmissão para atender ao mercado energético brasileiro (PROCEN, 2012).

O SEB possui outros sistemas, denominados Sistemas Isolados, que se concentram principalmente na Amazônia. Parte de alguns estados do Norte não está interligada ao SIN, devido à floresta densa e heterogênea, além de rios extensos, que dificultaram a construção de linhas de transmissão de grande extensão que permitissem a conexão (Mujica, 2012). Os Sistemas Isolados compreendem 45% do território nacional, mas respondem por apenas 3% da energia elétrica produzida no país (ABRADEE, 2014).

As distâncias geográficas das usinas hidroelétricas, associada à grande extensão territorial e as variações climáticas e hidrológicas do país, tende a ocasionar excedente ou escassez de produção hidrelétrica em determinadas regiões e períodos do ano. O estudo da demanda de energia em cada localidade do Brasil pode facilitar o planejamento de distribuição, evitando assim, esta escassez (Aneel, 2013).

2.3. Análise descritiva das Séries Temporais

No atual contexto brasileiro, o sistema hidrotérmico tem de um lado a disponibilidade futura de geração hídrica incerta, e de outro, a geração térmica futura supostamente conhecida, porém a um custo de geração elevado (Ferreira, 2015).

Os dados de demanda utilizados estão em base horária entre os dias 01 de janeiro de 2009 e 23 de fevereiro de 2014. Para a realização dos perfis de cargas diárias foram calculados os valores médios das demandas. Com estes valores médios foi possível a elaboração de gráficos que possibilitam a visualização da diferença na demanda energética diária para cada subsistema brasileiro (Figura 2).

O primeiro gráfico mostra o perfil de carga média diária do subsistema Norte, que possui uma visível oscilação da demanda nos diferentes horários do dia. O pico diário está em torno das 22h00min (BRST) com o valor de aproximadamente 4.400MW e o mínimo da demanda média do dia para esta região está um pouco abaixo de 3.800MW no horário de 8h. Para os demais subsistemas a oscilação não é tão atenuada como para o Norte, ao longo do dia, porém observando o

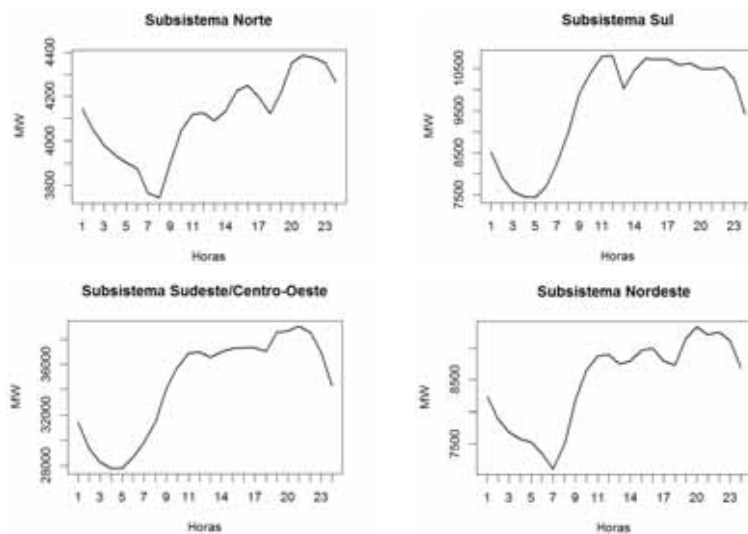


Figura 2: Perfis de carga média por subsistema.

gráfico do subsistema Sul, por exemplo, percebe-se que este subsistema possui um consumo médio praticamente constante das 14h30min até as 22h00min com um valor em torno de 10.000MW (bem mais alto do que o da região Norte). O subsistema Sudeste/Centro-Oeste possui os maiores valores de demanda do país, com o pico diário de aproximadamente 40.000MW. Este resultado já era previsto, já que estas regiões agregam o maior polo industrial do país e o maior centro de consumo energético.

Após as análises diárias, avaliaram-se as oscilações entre os dias (*Inter-Day*) dos picos de demanda diários, que são calculados como os valores máximos da demanda em cada dia do período em questão. Para isto, foi realizada uma programação em linguagem R com o cálculo dos picos de energia e das diferenças inter diárias, além da elaboração de gráficos para ilustrar essas variações.

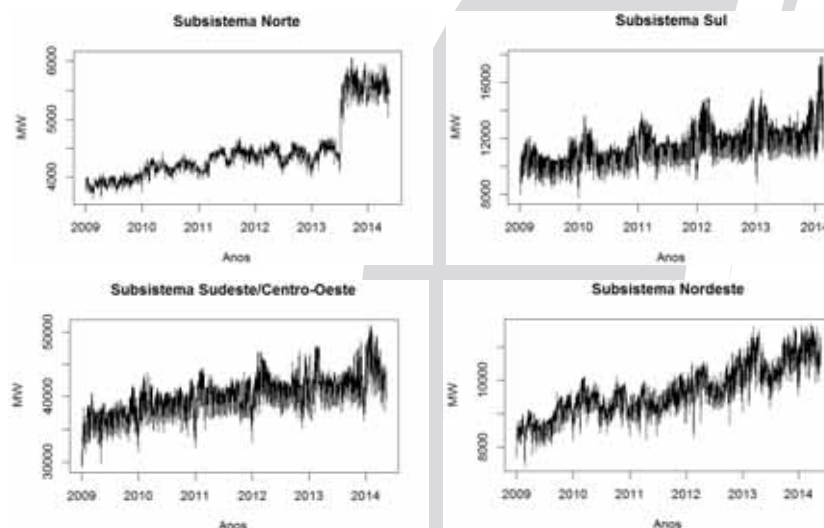


Figura 3: Gráficos dos picos diários de energia por subsistemas.

A Figura 3 mostra que em meados de 2013 houve um aumento brusco no pico de energia para o subsistema Norte, o que modificou o comportamento da série que vinha crescendo lentamente. Esta mudança, provavelmente, foi devido ao fato de que em junho de 2013, foi feita a integração do Estado do Amazonas ao SIN, com a implantação da interligação em 500 kV Tucuruí-

Macapá-Manaus. Já para os demais subsistemas, o comportamento se manteve estável, com um leve crescimento do pico, e para as diferenças inter diárias os resultados são compatíveis com as demandas dos picos de energia apresentadas no próprio site do ONS (ONS, 2014).

Na próxima seção são apresentados os resultados obtidos a partir da análise das Séries Temporais via Cadeias de Markov.

3. Resultados

3.1. Modelo I

Neste projeto foram utilizados dados da demanda de energia elétrica dos quatro subsistemas do Brasil oferecidos pelo ONS. Para a realização da análise, primeiramente, foi necessário o cálculo dos picos diários, que são os valores máximos da demanda em cada dia do período analisado. Todos os resultados aqui foram obtidos utilizando as ferramentas Excel 2010 e o software livre R.

Conforme citado na seção 2.1, as diferenças entre os picos diários foram calculadas para poderem ser classificadas em dois estados, 0 se a diferença for negativa e 1 se for positiva. Para o cálculo da matriz de transição P foi criada uma função que analisa se de um dia para o outro o pico passa do estado 0 para ele mesmo (definido como 1), do estado 0 para o estado 1 (definido como 2), do estado 1 para o estado 0 (definido como 3) ou do estado 1 para o estado 1 (definido como 4). As quatro matrizes encontradas estão na Tabela 1.

Subsistema	Norte	Sul	Sudeste/Centro-Oeste	Nordeste
$\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.575 & 0.425 \\ 0.616 & 0.384 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.377 & 0.623 \\ 0.463 & 0.537 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.554 & 0.446 \\ 0.491 & 0.509 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.358 & 0.642 \\ 0.518 & 0.482 \end{bmatrix}$

Tabela 1: Matrizes de transição (P) dos quatro subsistemas

A partir da análise das matrizes de transição percebe-se que para os subsistemas Norte e Nordeste a probabilidade da demanda se manter no estado após uma transição é menor do que a probabilidade de mudança. Em outras palavras, se o processo estiver em um estado de redução no pico de energia (estado 0), há uma chance maior de transição para o estado de aumento e vice-versa. Já para os subsistemas Sul e Sudeste/Centro-Oeste, a probabilidade de transição de um estado de redução para um estado de aumento é menor do que a probabilidade de permanência neste estado. Este fato pode ser dado devido às diferentes características das regiões em questão.

Nas aplicações de Cadeias de Markov, outro aspecto importante a se considerar é o comportamento a longo prazo do sistema, após o efeito das condições iniciais terem diminuído, ou seja, em uma situação de equilíbrio. Devido a esta importância, após a análise das matrizes de transição, foram calculadas as probabilidades dos estados estacionários (π) (Winston 2004), utilizando o pacote 'markovchain' do R, especificamente a função 'steadyStates' (Spedicato, 2014).

Os valores encontrados para as probabilidades dos estados estacionários também revelaram um comportamento que aproxima as características das regiões Norte e Nordeste, como sendo regiões semelhantes e o mesmo acontece com as regiões Sul e Sudeste/Centro-Oeste, conforme descrito na Tabela 2.

Subsistema	Norte	Sul	Sudeste/Centro-Oeste	Nordeste
$\pi = (\pi_0, \pi_1)$	(0.497,0.503)	(0.521,0.479)	(0.524,0.476)	(0.446,0.554)

Tabela 2: Probabilidades dos estados estacionários dos quatro subsistemas.

Outro conceito importante de Cadeias de Markov que foi utilizado nesta pesquisa é o de Tempo de Primeira Passagem, que pode ser entendido como o tempo demandado para o processo atingir o estado j a partir do estado i . Quando i é igual a j , o tempo de primeira passagem é simplesmente o número de transições para o processo retornar ao estado inicial e passa a se chamar

Tempo de Recorrência ou Tempo de Retorno. Este valor pode ser determinado a partir do inverso da Distribuição Estacionária do estado (Barros, 2004).

Sendo R_0 o tempo de retorno para o estado de redução no pico de energia e R_1 o tempo de retorno para o estado de aumento no pico. De acordo com a Tabela 3, o subsistema Norte demora em média 2 dias tanto para voltar a ter uma redução no pico de energia, quanto para ter um aumento. Nas regiões Sul e Sudeste/Centro-Oeste os valores dos Tempos de Retorno também foram muito próximos. Já o subsistema Nordeste apresentou a maior diferença neste tempo, visto que demora aproximadamente 2.24 dias para retornar ao estado de redução no pico de energia.

Subsistema	Norte	Sul	Sudeste/Centro-Oeste	Nordeste
$R_0=1/\pi_0$	2.01	1.92	1.91	2.24
$R_1=1/\pi_1$	1.99	2.09	2.10	1.81

Tabela 3: Tempos de Retorno por subsistema.

3.2. Modelo II

Para uma visão mais geral do contexto energético do país, a análise do SIN agregado traz informações sobre o consumo total de energia do Brasil, podendo ser avaliado de diferentes formas e comparado com os dados obtidos pelo ONS e pela Empresa de Pesquisa Energética (EPE). Nesta etapa, os dados das demandas dos quatro subsistemas foram agrupados para se obter o valor total de energia demandada do SIN.

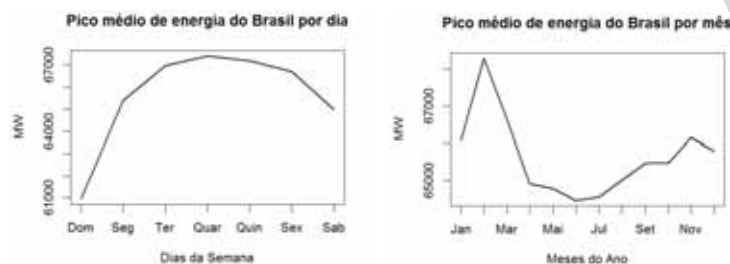


Figura 4: Gráficos dos picos médios de energia por dia da semana e por mês.

De acordo com a Figura 4, os maiores valores dos picos médios de energia no período avaliado estão no meio da semana, o que pode ser explicado pelo menor consumo de energia dos finais de semana, principalmente, na área industrial devido ao seu não funcionamento. Quanto à avaliação mensal dos picos de energia, os meses de verão possuem um maior consumo, o que pode ser nitidamente visualizado na Figura 4.

Para este segundo estudo, será calculado um limite τ , que auxiliará na criação de três estados de transição, ao invés de dois. Vários métodos são propostos na literatura sobre como selecionar este limiar quando se usa picos com mais distribuições de limite, como o tipo Pareto Generalizado. Neste trabalho foi utilizado o quantile Pareto, sendo um de seus benefícios a possibilidade de inspecionar as características dos dados e avaliar a adequação do modelo (Chikobvu, 2014). Porém, uma das desvantagens deste modelo é a falta de uma apreciação formal da incerteza associada ao limiar selecionado (MacDonald, 2012).

O quantile Pareto é definido como o gráfico de dispersão dos seguintes pontos: $(-\log(1 - p_i), \log X_i)$, onde $i = 1, \dots, n$. O limite τ é tomado como a observação sobre o eixo vertical $(-\log(1 - p_i))$, onde o gráfico começa a seguir um padrão linear (Chikobvu, 2014). A partir do gráfico de Quantis de Pareto calculado (Figura 5) foi possível estabelecer, $\tau = \exp^{8.9} = 7331.97$. Em Chikobvu (2014) o limiar encontrado para os dados da África do Sul foi $\tau = \exp^8 = 2980.96$.

Com o valor de $\tau = 7331.97\text{MW}$, foram definidos três novos estados em que: o estado 1 inclui todos os valores das diferenças inter diárias dos picos de energia que estão no intervalo $[0, \tau]$,

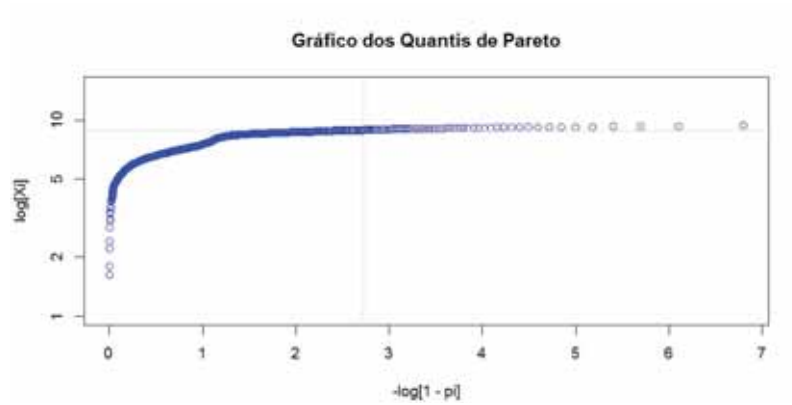


Figura 5: Gráfico dos Quantis de Pareto com o ponto 8.9013 indicado no eixo y.

o estado 2 foi definido como os números que excedam τ (grande aumento) e o estado 0, como as diferenças negativas, ou seja, quando há uma redução no pico de energia de um dia para o outro.

A matriz de transição P foi calculada da mesma maneira que no Método I e seus valores mostraram que a ocorrência de uma mudança dos estados de redução e de pequeno aumento para o estado de grande aumento não possuem grande probabilidade de ocorrência. Porém, a probabilidade de permanência no estado de grande aumento após uma transição é bem significativa, com aproximadamente 72% de chance. A partir da matriz de transição P foi possível calcular as probabilidades dos estados estacionários $(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (0.488, 0.408, 0.104)$ e os tempos de retorno (R_0, R_1, R_2) .

$$P = \begin{bmatrix} 0.568 & 0.377 & 0.055 \\ 0.496 & 0.498 & 0.006 \\ 0.078 & 0.203 & 0.719 \end{bmatrix}$$

$$R_0 = 1/\pi_0 = 2.05$$

$$R_1 = 1/\pi_1 = 2.45$$

$$R_2 = 1/\pi_2 = 9.64$$

Analisando os valores obtidos, percebe-se que na situação de equilíbrio a probabilidade do estado estacionário para um grande aumento no pico de energia possui o valor de 0.104 que é inferior as probabilidades estacionárias para um pequeno aumento no pico e para uma redução. Os tempos de retorno (ou de recorrência) mostram que o número de transições para o processo de grande aumento no pico voltar ao seu estado inicial é significativamente superior ao dos outros dois estados. Este resultado pode ser explicado pela frequência espaçada de ocorrência do estado 2, em outras palavras, após uma ocorrência de grande aumento do pico de energia de um dia para o outro, o tempo para uma nova ocorrência é de em média 9,64 dias, o que pode ser considerado alto se comparado aos tempos de recorrência dos estados 0 e 1.



Figura 6: Análise do grande aumento (estado 2) nos picos de energia por mês.

Outra forma de análise foi realizada para avaliar o comportamento da série do aumento extremo no pico de energia e sua sazonalidade ao longo do ano. Para tal, o nível mensal e a

frequência de ocorrência das observações acima do limiar de 7331,97MW por mês foi inserido em um gráfico (Figura 6) e assim, concluiu-se que a maior frequência do estado 2 ocorre para os meses de janeiro e fevereiro, ditos alto verão. A importância desta análise está na sinalização para os operadores do sistema de concessionárias os períodos de pico de demanda.

4. Conclusões

A partir das análises realizadas foi possível perceber que os subsistemas Norte e Nordeste possuem características próximas quanto ao seu consumo energético, que pode ser explicado pela semelhança existente de seus estados com relação à indústria e ao desenvolvimento tecnológico. As probabilidades estacionárias encontradas mostraram que a probabilidade de permanência nos estados de redução e de aumento do pico de energia é menor do que a de mudança, o que significa que há pouca variação nos picos de demanda dos subsistemas Norte e Nordeste.

Pode-se perceber, também, que o subsistema Sudeste/Centro Oeste tem um consumo de energia mais alto que os demais subsistemas e pode ser tratado como um caso à parte. O comportamento das probabilidades de transição do Sul e do Sudeste/Centro Oeste é contrário ao dos outros dois subsistemas e pode ser útil na orientação dos tomadores de decisões.

Como possíveis pesquisas futuras, sugere-se a ampliação desta análise para o ano de 2015, a comparação dos resultados obtidos com os fornecidos pelos órgãos governamentais de energia e realização de um terceiro caso utilizando o limite de Pareto por subsistema.

Referências

- ABRADEE** (2014), *Sistema Interligado*, <http://www.abradee.com.br/setor-eletrico/sistema-interligado> (acesso em 03 de abril de 2015).
- Aneel** (2013), *Aspectos Institucionais - Sistema Interligado Nacional*, http://www.aneel.gov.br/aplicacoes/atlas/aspectos_institucionais/2_1_1.htm (acesso em 11 de fevereiro de 2015).
- Barros, M.**, *Processos Estocásticos*, Rio de Janeiro: Papel Virtual Editora, 2004.
- Chikobvu, D.**, *Modelling Electricity Demand*, Faculty of Natural And Agricultural Sciences. Bloemfontein, 20 de Janeiro de 2014.
- EPE** (2014), *Balanço Energético Nacional 2014: ano base 2013*, Rio de Janeiro.
- Ferreira, P. G. C., Cyrino Oliveira, F. L., Souza, R. C.** (2015), The stochastic effects on the Brazilian Electrical Sector, *Energy Economics*, 49, 328-335.
- MacDonald, A.**, Extreme value mixture modelling with medical, *PhD. thesis*, University of Canterbury, New Zealand, 2012.
- Markovchain, R Package**, *Pacote utilizado na programação em R*, versão 0.0.7.
- Mujica, L. G. B.**, *Benefícios associados à operação coordenada do sistema interligado nacional junto com as usinas binacionais de Corpus e Yacyretá*, Campinas, Unicamp, 29 de outubro de 2012.
- ONS** (2014), *Operador Nacional do Sistema Elétrico*, http://www.ons.org.br/conheca_sistema/o_que_e_sin.aspx, (acesso em 10 de fevereiro de 2015).
- PROCEN** (2012), *Procen Ufc*, www.procen.ufc.br/wp-content/uploads/Procen.pptx (acesso em 11 de fevereiro de 2015).
- Sigauke, C. and Chikobuv, D.**, *A Markov chain analysis of daily changes to peak electricity demand in South Africa*, Rotterdam, 30 de junho de 2014.
- Souza, R.C., Marcato, A. L. M., Cyrino Oliveira, F. L., Ferreira, P. G., Dias, B. H., Brandi, R. S., Ramos, T. P.**, *Planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos no Brasil: geração de cenários e otimização*, Rio de Janeiro, PUC-Rio, 248.
- Spedicato, G. A.**, *markovchain: discrete time Markov chains made easy*, Junho 2014.
- Tolmasquim, M. T.**, *Novo modelo do setor Elétrico Brasileiro*, Brasília: Synergia, 2011.
- Winston, W. L.**, *Operations Research: Applications and Algorithms*, 4 Ed., Duxbury: Duxbury Press, 2004.