

## **Administração de Ativos e Passivos - Uma abordagem de otimização estocástica**

**Alan Delgado de Oliveira**

Escola de Administração – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Washington Luiz, 855 – Centro – Porto Alegre – RS – Brazil  
alan.delgado@ufrgs.br

**Tiago Pascoal Filomena**

Escola de Administração – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Washington Luiz, 855 – Centro – Porto Alegre – RS – Brazil  
tpfilomena@ea.ufrgs.br

**Guilherme Ribeiro de Macedo**

Escola de Administração – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Washington Luiz, 855 – Centro – Porto Alegre – RS – Brazil  
guilherme.macedo@ufrgs.br

### **RESUMO**

Este trabalho trata de uma aplicação de programação estocástica para administração de passivos e ativos que utiliza otimização e programação estocástica baseado em uma árvore de cenários multiestágio balanceada. O modelo é descrito, implementado e analisado. Os resultados definem uma política de investimento de ativos para o instante inicial do período considerado, e estimam a probabilidade de insolvência do fundo de pensão. Além disso, realiza-se o estudo do impacto da redução de uma proxy da taxa de juros básico na composição do portfólio administrado por essas empresas.

**PALAVRAS CHAVE.** ALM, Programação Estocástica, Árvore de Cenários.

**Área Principal:** GF - Gestão Financeira, MP - Modelos probabilísticos, OC - Otimização Combinatória

### **ABSTRACT**

This work discusses an application of stochastic programming for asset-liability management. A stochastic programming model based on a balanced multistage scenario tree is presented, described and implemented for an asset-liability environment. The main results are: (i) an investment policy for the fund, and, (ii) the pension's fund insolvency probability considering an initial relation between the current assets and the present value of the future liabilities. The impact of a possible reduction in interested rate on the pension's fund optimal portfolio is also presented.

**KEYWORDS.** ALM. Stochastic Programming. Scenario Tree.

**Main Area:** GF - Financial Management, MP - Probabilistic Models, OC - Combinatorial Optimization

## 1. Introdução

Neste trabalho, tratamos da aplicação desses modelos a fundos de pensão. Um fundo de pensão tem o objetivo de fazer pagamentos de benefícios aos participantes que terminaram sua trajetória de ganho de renda ativa. Assume-se que o fundo de pensão tenha três fontes de financiamento de seus passivos: receitas de seu portfólio, contribuições regulares feitas pelos patrocinadores do fundo e contribuições corretivas [Bauer et al.(2009)]. Então, de acordo com esse autor, um fundo tem como balanço característico os ativos à esquerda; as responsabilidades (passivo) à direita, e o restante se refere ao seu superávit ou ao seu déficit. Ao considerar-se a incerteza futura, a fim de se realizar um planejamento a médio e longo prazo, torna-se fundamental a avaliação e à análise de diferentes cenários para variáveis econômicas reputadas importantes para a administração correta e robusta de ativos e passivos (ALM), que garanta os benefícios a serem pagos. Logo, a modelagem ALM possibilita aos gestores de fundos de pensão a simulação de cenários extremos. Dessa forma, pode-se utilizá-los no planejamento da política de investimentos, evitando perdas financeiras.

Este trabalho considera essa incerteza por meio de um modelo estocástico com árvores de cenários multiestágio, baseando-se nas ideias de [Kouwenberg(2001)]. Então, os ativos do fundo são modelados por meio de equações diferenciais estocásticas, e o passivo é definido por meio da estrutura de um grande fundo de pensão nacional. A partir dessas informações desenvolve-se um número significativo de cenários discretos e independentes entre si, derivando-se possíveis resultados para todas as variáveis de decisão relevantes do modelo ALM a cada período futuro. Assim, torna-se razoável a estimação da perspectiva de insolvência do fundo, ou seja, a esperança de que o fundo não exerça o pagamento de suas responsabilidades (passivo) ao final do período considerado. A partir disso, avalia-se o resultado dessa projeção a termos das expectativas, das desvantagens, e das vantagens. Essa simulação também permite o estudo do impacto de uma estratégia particular de portfólio de ativos, possibilita a identificação de informações e indícios importantes relacionados a saúde financeira da instituição previdenciária, a indexação e a política de contribuição ligadas aos interesses dos principais envolvidos no fundo de pensão.

O modelo apresentado se difere ao executar uma árvore binária de dez períodos. Essa estrutura de distribuição da ocorrência dos cenários determina a mesma probabilidade de acontecimento entre cenários habituais e cenários extremos da economia. Então, procura-se encontrar uma distribuição das variáveis de decisão robusta o suficiente para evitar o descasamento dos ativos e passivos em diferentes circunstâncias da economia. Assim como [Hilli et al.(2004)], o nosso objetivo é apresentar um modelo de administração de ativos e passivos adequado a realidade e restrições legais do Brasil juntamente com uma análise do comportamento do fundo mediante a evolução esperado do contexto desse país. Os resultados mostram que, em função dessa tendência de queda da taxa de juros de títulos de renda fixa, os administradores do fundo serão obrigados a assumir maior risco para garantir a solvência dos seus fundos de pensão. Esses resultados são coerentes com o comportamento de fundos de pensão que, atualmente, já se encontram em ambientes em que os juros de títulos de renda fixa não são tão atrativos.

## 2. Revisão Bibliográfica

Conforme [Consigli and Dempster(1998)], a literatura sobre o uso de modelagem recursiva de multiestágio para formalizar problemas de otimização de portfólios complexos data do início dos anos setenta, quando a técnica foi primeiramente adotada para resolver um problema de portfólio de seguro com renda fixa. Inicialmente [Eppen and Fama(1968)] e [Eppen and Fama(1971)] modelaram problemas de dois e três ativos usando programação dinâmica e estocástica. [Daellenbach and Archer(1969)] ampliaram o seu trabalho para incluir um passivo. Esses modelos consideraram incerteza para os retornos e são dinâmicos, mas, nesses casos, somente problemas com muito poucos instrumentos financeiros poderiam ser analisados simultaneamente. Por isso, eles são muito limitados na prática.

[Wolf(1969), Bradley and Crane(1980), Lane and Hutchinson(1980)] usaram modelos com árvores de cenário. [Bradley and Crane(1972)] introduziram a abordagem de inventário para mo-

delar decisões financeiras nas quais cada ativo ou passivo no modelo tem uma variável inicial, uma variável de posição de investimento, e uma variável para o final para cada período. Eles aplicaram seu modelo dinâmico estocástico para administração de portfólio de títulos de dívidas. Seu modelo, a medida que era útil para pequenos problemas, tornou-se intratável computacionalmente, mesmo com poucos períodos e poucas saídas.

[Kusy and Ziemba(1986)] discutiram a abordagem da programação estocástica linear sob incerteza e a comparou com os modelos de Bradley e Crane. Eles mostraram por simulação que essa técnica era superior à estratégia de programação dinâmica com árvores de decisão desenvolvidas por Bradley e Crane; porém, o modelo de Kusy e Ziemba não considerava os efeitos nos períodos finais, nem era verdadeiramente dinâmico, já que era resolvido em dois períodos por vez, na forma de rolagem.

[Cariño et al.(1994)] realizaram o primeiro estudo que descreveu a programação dinâmica e estocástica em escala comercial, apesar do fato de que a maioria de seus antecessores estiveram envolvidos em protótipos de aplicações para instituições financeiras. Ao longo do tempo, os modelos foram aprimorados a fim de se adequarem melhor a realidade do mercado financeiro. [Ziemba and Fellow(2003)] contribui com a inclusão de algumas complexidades ao tratamento do problema, tais como custos de transação, liquidez, impostos, preferências do investidor, incluindo controle de risco, políticas e outras restrições, retorno incertos, e retornos com prazo limite. Os modelos de administração de passivos e ativos foram implementados em diversos países, entre eles pode-se mencionar [Kouwenberg(2001)], que propõe um modelo de programação estocástica de multiestágio para um fundo de pensão Alemão, utilizando árvores de eventos que adequam-se a média e covariância da distribuição de retornos para gerar os coeficientes da sua programação; [Hilli et al.(2004)] também desenvolveu um modelo para companhias de segura finlandesas; bem como [Dupacová and Polívka(2009)] que obteve sucesso apresentando um modelo de programação estocástica aplicável à Rússia, embora tivesse que lidar com a falta de dados históricos confiáveis e planos de pensão totalmente não estabilizados devido à grandes mudanças governamentais; e, por fim, menciona-se [Valladão(2008), Figueiredo(2011)] que realizaram a implementação de modelos considerando a realidade brasileira.

Sendo assim, com o desenvolvimento do tópico, trabalhos foram publicados em diferentes áreas de aplicação. Pode-se notar avanços recentes do estudo de administração de ativos e passivos em diferentes áreas de aplicação, por exemplo, em bancos, [Mukuddem-Petersen and Petersen(2008)]; na administração da emissão de títulos de dívidas, [Consiglio and Stanio(2012), Valladão et al.(2014)]; em empresas de seguro, [Asanga et al.(2014), Asimit et al.(2014)]; e em fundos de pensão [Fombellida and Zapatero(2012), Gülpinar and Pachamano(2013), Abourashchi et al.(2014)].

### 3. Dinâmica do Modelo

As etapas do modelo podem ser definidas pela simulação dos parâmetros que compõem o cenário, pela geração da estrutura de cenários, que determinará a dinâmica das diferentes simulações e suas interações, pela otimização do modelo que toma cenário e variáveis de decisão como entrada, e, por fim, pelo resultado que implica uma política de investimentos, a probabilidade de *underfunding* e insolvência do fundo, e a maximização do valor final do fundo. A Figura 1, que é inspirada no sistema de otimização estocástica de [Hilli et al.(2007)], e ilustra o funcionamento do modelo.

Após o processo de entrada de dados, os cenários são formados por meio de uma árvore de cenários multiestágio, que é pormenorizada na seção 5, o qual realiza a *Geração de Cenários*, respeitando as não antecipatividades e as interdependências do modelo. Cada um desses cenários, é formalizado pela seção 4 e otimizado, o que descreve o processo *Modelo de Otimização*, resultando em uma política de investimento, já que a variável de decisão será a determinação de quantas participações manter, comprar ou vender. De acordo com [Murarka et al.(2014)], esse modelo pode ser considerado recursivo porque todas as decisões terão impacto no último período do nível, que é o que deve ser maximizado.

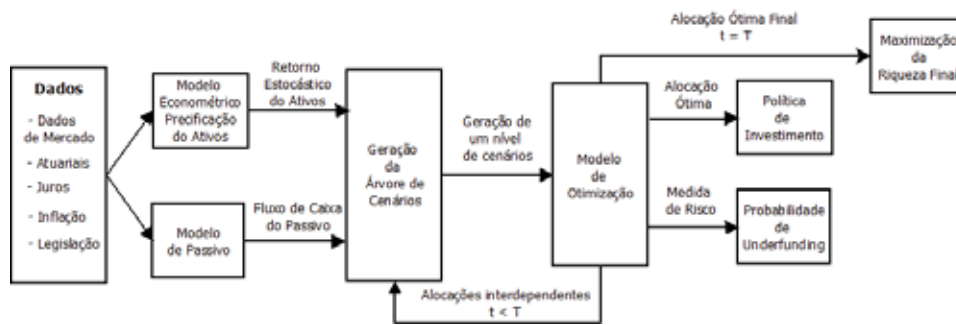


Figura 1: Dinâmica do Modelo  
 Fonte: Adaptado de [Hilli et al.(2007), pg. 15]

#### 4. Modelo de Programação Estocástica Multi-Estágio

Dado  $N$  como um conjunto de ativos, utiliza-se um gerador de cenários para simular a realização de cada ativo e passivo, esse processo é melhor discutido na seção 6. Essas possíveis realizações são simuladas em horizonte de tempo discreto,  $t \in T$ , para os preços de cada ativo,  $i \in N$ , de cada cenário,  $s \in S$ . Os preços dos ativos são denotados como  $P_{its}$ , que se trata de uma variável aleatória. Os passivos são obtidos para cada cenário, e eles são denotados pela variável  $L_{ts}$  para todos os elementos em conjunto de cenários  $S$  e em um dado período de tempo  $t \in T$  considerado no modelo ALM. Então, a formulação de programação estocástica equivalente deterministicamente do problema ALM poderia ser dada por:

$$\max \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N p_s P_{iT_s} X_{iT_s} \quad (1)$$

sujeito a :

$$X_{its} = X_{it-1s} + B_{its} - S_{its} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N P_{its} S_{its} - \sum_{i=1}^N P_{its} B_{its} + F_t + U_{ts} = L_{ts} \quad (3)$$

$$\bar{U} = \sum_{t=1}^T U_{ts} \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N P_{its} S_{its} \geq \sum_{i=1}^N P_{its} B_{its} \quad (5)$$

$$X_{3t} \leq \pi X_{it} \quad (6)$$

$$p_{s \in \{1, \dots, S\}} \{U_{ts} \leq 0\} \geq R_t \quad (7)$$

$$E_{s \in \{1, \dots, S\}} [\bar{U}] \leq W \quad (8)$$

$$0 \leq U_{ts} \leq M \quad (9)$$

$$X_{its}, B_{its}, S_{its} \geq 0, i \in N, t \in T, s \in S, \pi \in [0, \dots, 1]$$

A quantidade de *shares* do portfólio é rebalanceada em pontos discretos do tempo. A quantidade mantida de cada ativo é expressa pela restrição 2, quando se considera  $t = 1$ , tem-se a posição inicial do ativo, nos períodos  $t > 1$ , administra-se a evolução do portfólio de ativos. A quantidade de *shares* de um dado ativo é resultado da quantidade anterior somada ao quantidade comprada  $B_{it}$  durante o período de tempo menos a aquelas que foram vendidas  $S_{it}$ .

O fluxo de caixa do fundo é dividido em entradas e saídas. Essas entradas são devido à venda de ativos, ou ao bom rendimento dos investimentos nos ativos, além disso o fundo pode obter um financiamento adicional,  $F_t$ . Essas saídas se referem aos pagamentos que o fundo deve fazer ou outras obrigações que possam existir, bem como a compra de ativos. Estas restrições que são relacionadas a evolução do fluxo de caixa do fundo ao longo tempo são definidas pela equação 3.

As equações 4, 8 e 9 se tratam de um relaxamento das restrições de fluxo de caixa para permitir, em certos momentos do tempo, que a entrada líquida do fundo não seja suficiente para honrar os compromissos do fundo. Essa diferença poderia ser vista como um empréstimo realizado pelo fundo, *underfunding*. A equação 4 e 9, *chance constraints*, formalizam o *underfunding*. A equação 8, *integrated chance constraints*, é a soma de todos os *underfunding* em um dado ramo da árvore.

Quando se permite *underfunding*, a quantidade dessa variável  $U_{ts}$  poderia ser realocada pelo investidor também no futuro, de modo que um dinheiro poderia aparecer indevidamente no fluxo de caixa. Por isso, a equação 5 garante que o investidor use apenas o dinheiro das entradas do fluxo de caixa. A equação 7 é uma restrição probabilística. Ela determina o nível de confiança mínima,  $R_t$ , na qual os cenários de um período honrem seus compromissos.

Além disso, o modelo contempla também a legislação brasileira relacionada a regulação dos investimentos nos fundos de pensão de previdência complementar fechada, visto que sua atividade é disciplinada pelo Estado. Para este fim, adicionou-se ao modelo a restrição 6. Atualmente, a Resolução CMN nº 3.792/2009 prevê que a alocação em ativos de Renda Variável seja no máximo 70% do valor total do portfólio de investimentos do fundo. O índice 3 representa o ativo de renda variável. O parâmetro  $\pi$  corresponde à alocação máxima relativa ao total de recursos disponíveis legalmente permita. Por fim, o função objetivo, equação 1, procura pela maximização da riqueza no último período da árvore de cenários.

## 5. Estrutura de Dados do modelo ALM

A incerteza dos parâmetros é especificada usando estágios, que são a discretização da realização dos valores dos parâmetros. Essa estrutura de dados garante a não antecipatividade, permitindo que somente a informação disponível a cada estágio de decisão influencie na decisão a ser tomada. A árvore implementada foi a árvore de cenários binária. Ela é baseada em uma árvore binária com  $T$  estágios e  $S$  nós. Então, exceto pelos nós folhas, cada nós tem dois sucessores. O número total de estágios  $S$  é  $2^{T+1} - 1$ , onde  $T$  é o número de períodos. Por isso, cada caminho da raiz até a folha na figura 2 representa um cenário, e os nós representam pontos de decisão. Essa árvore também é balanceada, uma vez que ela tem todas os nós folhas no último período. Uma representação gráfica da árvore é exibida na figura 2.

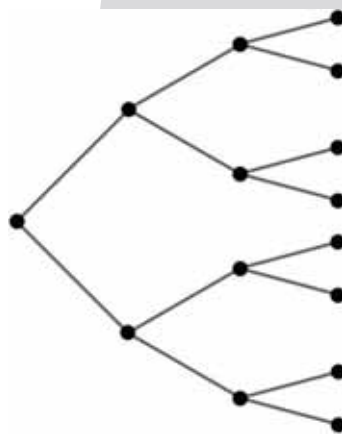


Figura 2: Árvore de eventos multiestágio do modelo ALM

Como [Bauer et al.(2009)] explica, cada nó na árvore retrata um conjunto de decisões - indexadas pelos estágios, pelo período de tempo, e pelas variáveis de decisão (ativos, passivo, etc). Depois do nó inicial, as decisões são condicionadas ao ambiente econômico ao longo do ramo específico. De acordo com [Dupacová and Polívka(2009)], a abordagem de rolagem horizontal de decisão dinâmica é baseada nas decisões de primeiro estágio que consistem de todas as decisões que foram selecionadas antes da nova informação ser revelada, estando relacionada a distribuição de probabilidade. Então, o investidor toma a decisão e os parâmetros são realizados considerando as novas informações. O modelo rebalancia o portfólio e com os novos cenários, a partir dos valores atuais das variáveis, resolve o modelo repetidamente. Nós assumimos que todos os estágios de um mesmo período do modelo podem ocorrer com a mesma (uniforme) probabilidade. Por isso, dado  $S$  como um conjunto de estágios e  $p_s = \frac{1}{|S|}$  com a probabilidade de ocorrência do estágio  $s \in S$ .

## 6. Modelo de Precificação de Ativos

O preço dos ativos é visto como um processo estocástico de período discreto, já que seu valor muda de maneira incerta ao longo do tempo, e, embora essa alteração possa ocorrer a qualquer momento, utiliza-se intervalos de tempo para realizar a amostragem dos preços, [Hull(2008)]. Então, considerando-se  $P_t$  como o preço dos ativos, a variável  $dP_t$  poderia ser vista como uma pequena variação de preço em um determinado intervalo de tempo  $\Delta t$ , com retorno esperado  $\mu$ , e desvio padrão  $\sigma$ . Logo, o processo de modelagem para um ativo pode ser dado pela equação 10 e 11.

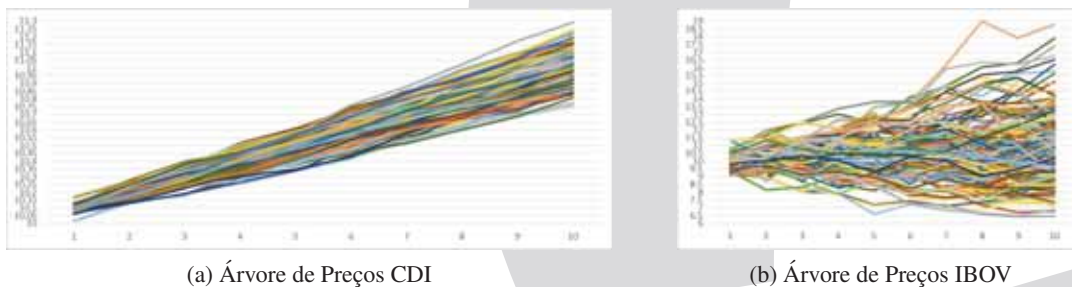
$$P_t = P_{t-1} + \Delta P_t \quad (10)$$

$$\Delta P_t = \mu P_{t-1} \Delta t + \sigma \epsilon P_{t-1} \sqrt{\Delta t} \quad (11)$$

$$\Delta P_t \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t) \quad (12)$$

A partir dessas definições, adotou-se, como entrada do modelo a ser simulado, os retornos mensais logarítmicos de três ativos, Money Market, CDI e IBOV, buscando representar a possibilidade de valores financeiros em caixa, de investimento de menor volatilidade e de outro, de maior volatilidade. A amostra utilizada continha dados a partir de janeiro de 2004 até julho de 2014, e foi aplicada para definir-se os parâmetros  $\mu$ ,  $\sigma^2$ , bem como a matriz de correlação entre os ativos. A simulação de preços deu-se utilizando as equações 10 e 11, considerando-se a correlação entre os ativos. Como o retorno utilizado era mensal, o  $\Delta t$  utilizado foi 1. O exemplo de uma das iterações pode ser visto pelas Figuras 3, painel a, e 3, painel b.

Figura 3: Árvore de Preços Simuladas



## 7. Simulações e Resultados

Os parâmetros de entrada utilizados nesse modelo foram os retornos médios dos ativos durante o período avaliado e suas correlações. Além disso, o passivo nominal também é visto como um informação entrada importante, já que consiste no saldo de todas as contribuições realizadas

ao fundo subtraídos os benefícios a serem pagos aos participantes, ou seja, valor a ser provido a partir somente da gestão dos ativos do fundo. O passivo pode ser obtido, por exemplo, de balanços públicos de fundos de pensão.

O modelo implementado foi o formalizado na seção 4. Ele utilizou uma árvore de cenários binária com  $T = 10$ , ou seja, dez estágios. Adotou-se  $N = 3$ , que compreende, os retornos mensais logarítmicos de três ativos, definidos pelos certificados de depósito interbancários (CDI), como uma proxy para taxa de juros, pelo Money Market, e pela de cotação do índice IBOVESPA (IBOV). Esses ativos foram escolhidos a fim de representar a possibilidade de valores financeiros em caixa, de investimento de menor volatilidade e de outro, de maior volatilidade respectivamente. A amostra utilizada continha dados a partir de janeiro de 2004 até julho de 2014, e foi aplicada para definir-se os parâmetros  $\mu$ ,  $\sigma^2$ , bem como a matriz de correlação entre os ativos. Os dados extraídos dessas séries são apresentados na tabela 1.

Tabela 1: Retorno Médio e Desvio Padrão da Amostra

Ativo	Retorno Médio Logarítmico %	Desvio Padrão Logarítmico %
Money Market	5.65	0.0
CDI	11.3	9.26
IBOV	8.7	22.13

Assim como exibido na tabela 1, adota-se como retorno do ativo Money Market sempre a metade do retorno utilizado para o CDI. A estrutura de passivo empregado no modelo foi fornecido por um grande fundo de pensão. Além disso, utiliza-se a metodologia usual para trazer o valor do passivo à valor presente, adotando-se como taxa de desconto somente os juros atuariais. O valor utilizado é de 5%, o mesmo praticado por [Previ(2013)]. Defini-se também o  $\pi$  a ser adotado na equação 6 como valor máximo de alocação permitida em ativos de renda variável. Para este trabalho, emprega-se o limite máximo de 70 % do total de recursos disponíveis para alocação em ativos de maior volatilidade. Optou-se também por não adotar a possibilidade de *underfunding* no fundo de pensão, mesmo definindo-o algebricamente. O *underfunding*, assim como percebido por [Valladão(2008)], pode ser visto como uma medida subestimada do risco levando a interpretações equivocadas do estado de solvência do fundo.

### 7.1. Alocação do fundo no instante inicial

As variáveis de decisão do modelo são referentes a alocação dos recursos. Então, a resposta esperada é definida por uma política de investimento que maximize a riqueza do portfólio respeitando as regras e restrições apresentadas nas seções anteriores. Assim como realizado por [Figueiredo(2011)], Ao tratar-se da incerteza no modelo, ainda que a cada iteração sejam produzidos dez cenários, faz-se necessário identificar se há convergência quanto a proporção de alocação de recursos em ativos, por meio dos parâmetros de entrada empregados. Para tal, realizou-se diferentes números de execuções a fim de buscar se havia convergência do portfólio inicial. Seguem os resultados na tabela 2.

Tabela 2: Composição do Portfólio para Carteira Inicial

Nº Iterações	Money Market %	Renda Fixa%	Renda Variável%
50	18	44	38
100	16	48	36
200	16	51	33
300	16	51	33
500	17	50	33

Dado o equilíbrio do portfólio inicial na composição de carteira a partir de 300 iterações, verificado na tabela 2, elegeram-se esse número como adequado para as demais análises e verificações a serem realizadas a partir do modelo. O número de iterações apropriado foi selecionado após a simulação de 11500 cenários diferentes.

## 7.2. Probabilidade de Insolvência

O estado de insolvência é descrito pelo déficit no final da existência do fundo, ou seja, ao final do período considerado, o modelo não foi capaz de cumprir com o passivo, terminando com ao menos um dos 10 cenários com o patrimônio negativo. Como parâmetro para verificação, utilizou-se o fundo inicialmente equilibrado, ou seja, o valor do patrimônio inicial era o mesmo do total do passivo em valor presente. Posteriormente, o valor do patrimônio inicial foi sendo decrementado até chegar à medida de apenas 60% do total do passivo. Esse experimento considerou dezenove valores para patrimônio inicial, executando-se trezentas corridas para cada uma dessas faixas. A partir disso, aferiu-se quantas vezes o fundo tornou-se insolvente, definindo-se a probabilidade da ocorrência de tal evento para a respectiva faixa. O resultado pode ser verificado na Figura 4.



Figura 4: Probabilidade de Insolvência  
 Fonte: Elaborado pelo Autor

A probabilidade de insolvência foi testada diferentes níveis de confiança, mas devido à restrição que garante que todos os estágios de todos os períodos do fundo sejam positivos, o nível de confiança se tornou um condicionante *lower bound* para o modelo, não influenciando os resultados. A partir da Figura 4, percebe-se um comportamento esperado por parte do modelo, uma vez que conforme o decréscimo do valor inicial do patrimônio inicial, o fundo deverá buscar um retorno maior a fim de garantir o pagamento de suas responsabilidades. Como os investimentos apresentam maior risco, o modelo se expõe cada vez a um nível maior de risco, aumentando a probabilidade de insolvência do fundo de pensão.

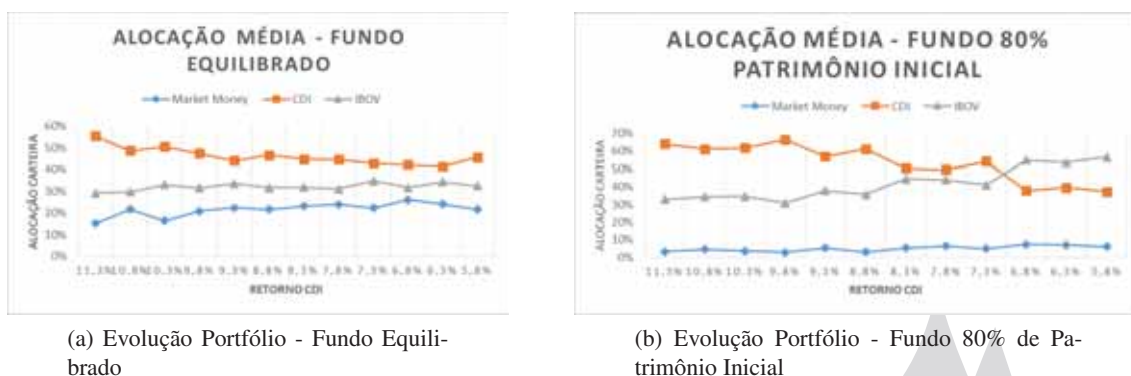
## 7.3. Comportamento do Fundo com o decréscimo da Taxa de Juros

Um exemplo de aplicação plausível para o modelo apresentado poderia ser análise do comportamento de alocação de investimentos do fundo dado o cenário de queda da taxa de juros. O decréscimo da taxa de juros pode ser visto como uma tendência de longo prazo no Brasil. Esta tendência já foi destacada em outros países em desenvolvimento, [Dupacová and Polívka(2009)] observaram o mesmo fenômeno na Rússia.



Dessa maneira, procurou-se analisar o impacto do decréscimo da taxa de juros na política de investimentos de um fundo de pensão, uma tendência de longo prazo no país. Como mencionado anteriormente, os certificados de depósito interbancários (CDI) foram vistos como uma proxy para taxa de juros. Sendo assim, analisou-se o impacto na política de investimentos do fundo de pensão ao avaliar essa possível queda na taxa de juros. Considerou-se dois cenários para o estudo do comportamento do portfólio sob decréscimo da taxa de Juros. Eles são exibidos pelas Figuras 5 painel a, 5 painel b.

Figura 5: Alocação Média



O cenário ilustrado pela Figura 5, painel a, ocorreu de forma previsível. Quando o fundo detém recursos suficientes para pagar o passivo, independente dos retornos dos ativos, mesmo quando o retorno da renda fixa é menor, ele mantém a carteira, com uma leve tendência a migrar investimentos para a renda variável. Esse comportamento pode ser visto porque nesse caso a taxa de juros não atua como uma restrição *hard*, já que o modelo tem disposição financeira suficiente para o pagamento do passivo independentemente dos retornos de seus investimentos. Então, ele mantém a carteira ótima, já apresentada pela tabela 2. O cenário representado pela Figura 5, painel b, também exibiu comportamento esperado. Enquanto o retorno do CDI estava superior ao retorno verificado com IBOV, o modelo manteve a carteira ótima, que apresenta rentabilidade média maior. A partir do momento que os juros do CDI ficaram abaixo do retorno obtido no IBOV, ele começou gradualmente a migrar investimentos para a renda variável. Esse comportamento se dá até o momento que ele aloca a maior parte de seus investimentos em renda variável a fim de garantir a solvência do fundo e a maximização de seu retorno.

## 8. Conclusões

De acordo com [Adam(2007)], ALM deve procurar encontrar pontos de equilíbrio entre a aversão à risco e o prêmio sob risco, e ganho a partir das posições tomadas. Neste trabalho, implementou-se, descreveu-se e analisou-se os resultados de um modelo para administração de ativos e passivos aplicado a fundos de pensão de benefício definido. A abordagem adotada foi a otimização e programação estocástica em período de tempo discreto baseada em uma árvore de cenários multistágio balanceada. Uma visão geral do funcionamento e interação de todos esses componentes é encontrada na seção 3, que é ilustrada pela Figura 1. O resultado encontrado caracterizou-se por uma distribuição de probabilidade da alocação dos ativos no instante inicial da simulação, e da probabilidade de insolvência quantificada com base na medida de equilíbrio financeiro do fundo.

Tratando-se do modelo estocástico, os valores encontrados para a composição do portfólio no instante inicial são julgados adequados e condizentes com a realidade brasileira, veja tabela 2, uma vez que estão muito próximos das composições de carteiras de fundos brasileiros como, por exemplo, Previ e BB, os quais de acordo com [Paixão et al.(2005)], no ano de 2004, compunham

seu portfólio com 62,20% de renda fixa, 30,07% de renda variável, e 7,73% de outros investimentos. Os resultados apresentados nesse trabalho indicam maior investimento em renda fixa, com uma tendência de migração para renda variável. Essa inclinação pode ser explicada pela propensão a longo prazo de queda da taxa de juros básico do país, cujo valor naquele período era aproximadamente 16%, o valor da taxa considerado é de 11%, cerca de 30% menor.

Na seção 7.2, detalhou-se as probabilidades de insolvência do fundo, realizando-se também diversas análises de sensibilidade. Essa verificação é alvo de muitos pesquisadores. Estudos semelhantes podem ser encontrados em [Bauer et al.(2009), Dupacová and Polívka(2009)] [Figueiredo(2011)]. Os resultados poderiam ser aplicados por fundos de pensão como uma regra *ad-hoc* para a constatação de sua saúde financeira, bastando enquadrar-se em qual cenário o fundo se encontra. Então, verificaria-se, sob condições de mercado atuais, qual seria a sua probabilidade de insolvência. Por fim, na seção 7.3, ilustra-se o comportamento do fundo mediante a uma possível queda da taxa de juros. Essa análise evidencia a importância crescente de modelos de ALM dentro desse cenário econômico, uma vez que a redução da taxa de juros básica deverá impor aos administradores de fundo de pensão um cenário de maior risco, a fim de poderem honrar os compromissos definidos previamente com os participantes do fundo. A exposição a esse risco deve se dar de maneira responsável, controlada e medida. Por isso, os modelos de ALM são grandes aliados, uma vez que permitem simular, projetar e planejar o posicionamento estratégico mediante diferentes futuros cenários econômicos. Essa facilidade traz visibilidade e transparência ao processo de planejamento de políticas de investimento de um fundo de pensão, valores associados a uma governança empresarial de qualidade.

## Referências

- Abourashchi, N., Clacher, I., Freeman, M., Hillier, D., Kemp, M., and Zhang, Q.** (2014). Pension plan solvency and extreme market movements: a regime switching approach. *The European Journal of Finance*, pages 1–28.
- Adam, A.** (2007). *Handbook of asset liability management: from models to optimal return strategies*. John Wiley and Son, 1 edition.
- Asanga, S., Asimit, A., Badescu, A., and Haberman, S.** (2014). Portfolio optimization under solvency constraints: A dynamical approach. *North American Actuarial Journal*, 18:394–416.
- Asimit, A. V., Badescu, A. M., Siu, T. K., and Zinchenko, Y.** (2014). Capital requirements and optimal investment with solvency probability constraints. *IMA Journal of Management Mathematics*, 1:1–31.
- Bauer, R., Hoevenaars, R., and Steenkamp, T.** (2009). *Oxford Handbook of Pensions and Retirement Income, Asset Liability Management*, chapter 21, pages 417–440. Oxford University Press.
- Bradley, S. P. and Crane, D. B.** (1972). A dynamic model for bond portfolio management. *Management Science*, 19:139–151.
- Bradley, S. P. and Crane, D. B.** (1980). Managing a bank bond portfolio over time. In Dempster, M. A. H., editor, *Stochastic Programming*. Academic Press.
- Cariño, D. R., Kent, T., Meyers, D. H., Stacy, C., Sylvanus, M., Turner, A. L., Watanabe, K., and Ziemba, W. T.** (1994). The russel-yasuda kasai model: An asset/liability model for japanese insurance company using multistage stochastic programming. *INTERFACES*, January-February(24):29–49.

- Consigli, G. and Dempster, M.** (1998). Dynamic stochastic programming for asset - liability management. *Annals of Operations Research*, 81:131–161.
- Consiglio, A. and Stanio, A.** (2012). A stochastic programming model for the optimal issuance of government bonds. *Annals of Operations Research*, 193:159–172.
- Daellenbach, H. G. and Archer, S. A.** (1969). The optimal bank liquidity: a multi-period stochastic model. *Journal of Quantitative Analytics*.
- Dupacová, J. and Polívka, J.** (2009). Asset-liability management for czech pension funds using stochastic programming. *Annals Operacional Resource*, 165:5–28.
- Eppen, G. D. and Fama, E. F.** (1968). Solutions for cash balance and simple dynamic portfolio problems. *Journal of Business*, 41:94–112.
- Eppen, G. D. and Fama, E. F.** (1971). Three asset cash balance and dynamic portfolio problems. *Management Science*, 17:311–319.
- Figueiredo, D. Z.** (2011). Tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão com plano de benefício do tipo benefício definido - uma abordagem via programação estocástica multiestágio linear. Master's thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Fombellida, R. J. and Zapatero, J. P. R.** (2012). Stochastic pension funding when the benefit and the risky asset follow jump diffusion processes. *European Journal of Operation Research*, 220:404–413.
- Gülpinar, N. and Pachamanova, D.** (2013). A robust optimization approach to asset-liability management under time-varying investment opportunities. *Journal of Banking and Finance*, 37:2031–2041.
- Hilli, P., Koivu, M., Pennanen, T., and Ranne, A.** (2004). A stochastic programming model for asset liability management of finnish pension company. *Kluwer Academic Publishers*.
- Hilli, P., Koivu, M., Pennanen, T., and Ranne, A.** (2007). A stochastic programming model for asset liability management of a finnish pension company. *Annals Operacional Research*, 152:115–119.
- Hull, J. C.** (2008). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson Education, 7 edition.
- Kouwenberg, R.** (2001). Scenario generation and stochastic programming models for asset liability management. *European Journal Operacional Research*, 134:279–292.
- Kusy, M. I. and Ziemba, W. T.** (1986). A bank asset and liability management model. *Operations Research*, 34:356–376.
- Lane, M. and Hutchinson, P.** (1980). A model for managing a certificate of deposit portfolio under uncertainty. In Dempster, M. A. H., editor, *Stochastic Programming*. Academic Press.
- Mukuddem-Petersen, J. and Petersen, M.** (2008). Optimization asset and capital adequacy management in banking. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 137:205–230.
- Murarka, N., Zverovich, V., Valente, C., Valle, C. A., and Mitra, G.** (2014). Ampldev user guide. Technical report, Optirisk Systems.

**Paixão, L. A., Pinheiro, R. P., and Chedeak, J. C. S.** (2005). Regulação dos investimentos nos fundos de pensão: evolução histórica, tendências recentes e desafios regulatórios. *Revista de Previdência*, 3:35–53.

**Previ** (2013). Regulamento do plano de benefícios 1 (vigente a partir de 22/04/13). [Online; accessed 14-Novembro-2014].

**Valladão, D. M.** (2008). Alocação ótima e medida de risco de um alm para fundo de pensão via programação estocástica multi-estágio e bootstrap. Master's thesis, Departamento de Atuária, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

**Valladão, D. M., Veiga, Á., and Veiga, G.** (2014). A multistage linear stochastic programming model for optimal corporate debt management. *European Journal of Operational Research*, 237:303–311.

**Wolf, C. R.** (1969). A model for selecting commercial bank government security portfolios. *Review of Economics and Statistics*, 1:40–52.

**Ziemba, W. T. and Fellow, N. V. S. R.** (2003). *The Stochastic Programming Approach to Asset, Liability and Wealth Management*. AIMR Publisher, Vancouver, Canada and Londres, Inglaterra.

