

## **Composição de carteiras de investimentos através da otimização combinatória do modelo CVaR multiobjetivo restrito**

**Gustavo Peixoto Hanaoka**

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais  
Av. Amazonas, 7675, Nova Gameleira, Belo Horizonte - MG  
gustavopph@gmail.com

**Rodrigo Tomás Nogueira Cardoso**

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais  
Av. Amazonas, 7675, Nova Gameleira, Belo Horizonte - MG  
rodrigoc@des.cefetmg.br

**Felipe Dias Paiva**

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais  
Av. Amazonas, 7675, Nova Gameleira, Belo Horizonte - MG  
fpaiva@dcsa.cefetmg.br

### **RESUMO**

Este trabalho apresenta uma metodologia para auxiliar na composição de carteiras de investimentos composta por ações que participaram da carteira teórica do Ibovespa no ano de 2012. Foi utilizado um modelo de otimização combinatória multiobjetivo restrito e foram propostos dois algoritmos multiobjetivos baseados no algoritmo NSGA-II e no algoritmo de evolução diferencial para busca das melhores soluções para o modelo. Como resultados foram apresentadas a análise gráfica das soluções não dominadas, a análise de duas medidas de desempenho em relação a diversidade das soluções e da cobertura do espaço de objetivos, e um estudo de caso consistindo na análise do comportamento das carteiras de menor risco e maior retorno obtidas, em comparação com o Ibovespa no ano de 2012.

**PALAVRAS CHAVE.** Otimização Multiobjetivo, Modelo CVaR, Algoritmos Evolutivos.

**Área Principal:** (indique, em ordem de prioridade a área de conhecimento de seu artigo pois o sistema JEMS coloca em ordem alfabética)

### **ABSTRACT**

This paper presents a methodology to assist in the composition of portfolio investments comprised of assets that participated in the theoretical portfolio of the Ibovespa in 2012. It was used a constrained combinatorial multi-objective model and were proposed two multiobjective algorithms based on the algorithm NSGA-II and the differential evolution algorithm for finding the best solutions for the model. The results were presented through graphical analysis of non dominated solutions, analysis of two performance measures for the diversity of solutions and objective space coverage, and a case study consisting in analyzing the behavior of lower risk portfolios and higher return obtained, compared to the Ibovespa in 2012.

**KEYWORDS.** Multi-objective optimization, CVaR Model, Evolutionary Algorithms.

**Main Area:** (inform by priority the area of the article because JEMS system makes the classification alphabetically)

## 1. Introdução

Ao compor uma carteira de investimentos, é necessário que o investidor possua uma medida de risco que o auxilie nessa escolha, resguardando-o de certos níveis de perdas de seu capital. Dessa forma, além de levar em consideração o quanto se deseja ganhar ao final de um certo período, também é necessário levar em consideração qual é a perda máxima aceitável desse investimento. Logo o investidor deve atentar-se para as restrições que as operações no mercado financeiro o impõem.

Nesse trabalho foi considerado um modelo multiobjetivo para composição de carteiras de investimentos que tem como medida de risco o valor em risco condicional (CVaR- *Conditional Value-at-risk*), descrito em Rockafellar & Uryasev (2000), e tem como medida de retorno a média dos retornos passados ponderados pela quantidade de ações em cada empresa, descrito em Markowitz (1952). Já as restrições, baseadas nos trabalhos de Chang et al. (2000), Soleimani et al. (2009), Anagnostopoulos & Mamanis (2010), Anagnostopoulos & Mamanis (2011), entre outros, foram definidas como a *restrição de cardinalidade*, que define o tamanho da carteira, a *restrição de mínimo de investimento*, que define uma quantidade mínima de ações em cada empresa, e a *restrição de orçamento*, que estipula que a carteira custa menos que um valor estipulado que compreende os custos operacionais.

Para a otimização do modelo foram propostos dois algoritmos evolutivos multiobjetivos, baseados nos algoritmos NSGA-II (*Nondominated Sorting Genetic Algorithm II*), apresentado em Deb et al. (2002) e no algoritmo de evolução diferencial DE (*Differential Evolution*), proposto por Price et al. (2006). Foram utilizadas duas formas multiobjetivos do DE, o algoritmo DEMO (*Differential Evolution for Multiobjective Optimization*, descrito em Robič & Filipič (2005), e o algoritmo PDEA (*Pareto Differential Evolution Approach*), descrito em Madavan (2002).

Através da otimização do modelo utilizando os algoritmos propostos, foi feita uma análise das soluções obtidas em relação a diversidade e cobertura do espaço de objetivos, e um estudo de caso analisando a eficiência dos resultados através de uma simulação de investimento no mercado financeiro.

As ações disponíveis para investimentos na otimização do modelo foram aquelas que faziam parte da carteira teórica do índice Bovespa (Ibovespa) em Dezembro de 2012, encontradas em BMF&BOVESPA (2012).

## 2. O Modelo

O modelo proposto é um modelo combinatório multiobjetivo restrito, que busca as melhores ações disponíveis para compor uma carteira de investimentos, com suas devidas quantidades de lotes, através da maximização do retorno e da minimização do risco.

Tomando a definição de Rockafellar & Uryasev (2002), seja  $f(w, r)$  uma função de perda associada ao vetor  $w \subset W \in \mathbb{R}^k$ , que representa as proporções de investimento de uma carteira e um vetor aleatório  $r \in \mathbb{R}^T$ , que representa os valores de retorno dos ativos na carteira. Para cada  $w$ , a perda  $f(w, r)$  tem uma distribuição de probabilidade em  $\mathbb{R}$  induzida por  $r$ , que por conveniência será chamada de  $p(r)$ . Logo a probabilidade de  $f(w, r)$  não exceder um certo valor  $\zeta$  é dado por  $\Psi(w, \zeta) = \int_{f(w,r) \leq \zeta} p(r) dr$ .

Fixando um certo  $w$ , tem-se que, em função de  $\zeta$ ,  $\Psi(w, \zeta)$  é uma função de distribuição acumulada das perdas associadas a  $w$ . A função  $\Psi(w, \zeta)$  é não decrescente em relação a  $\zeta$  e supõe-se que também seja contínua em relação a  $\zeta$  por uma questão de simplificação, sendo esta continuidade resultante da função de perda  $\Psi(w, \zeta)$  e da densidade de probabilidade  $p(r)$ .

Os valores de  $\alpha$ -VaR e  $\alpha$ -CVaR para uma variável aleatória representando a perda relacionada a  $w$ , dado um nível de confiança  $\alpha \in (0, 1)$ , são denotados por  $\zeta_\alpha(w)$  e  $\phi_\alpha(w)$  respectivamente, sendo  $\zeta_\alpha(w) = \min\{\zeta \in \mathbb{R} : \Psi(w, \zeta) \geq \alpha\}$  e  $\phi_\alpha(w) = (1-\alpha)^{-1} \int_{f(w,r) \geq \zeta_\alpha(w)} f(w, r)p(r) dy$ .

Utilizando essa medida de risco, pode-se formular o seguinte modelo:

$$\min_{x_1, \dots, x_N} \zeta + (1 - \alpha)^{-1} \sum_{j=1}^J \pi_j [f(x, y_j) - \zeta]^+ \quad (1)$$

$$\max_{x_1, \dots, x_N} \sum_{i=1}^N w_i \mu_i \quad (2)$$

$$s.a. : \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N z_i = k \\ \sum_{i=1}^N m_i c_i x_i \leq C - ct \\ x_i, m_i \geq 1, \forall i \mid x_i z_i = 1, i = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (3a)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i c_i x_i \leq C - ct \quad (3b)$$

$$x_i, m_i \geq 1, \forall i \mid x_i z_i = 1, i = 1, \dots, N \quad (3c)$$

em que  $w_i = \frac{m_i c_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i c_i x_i}, i = 1, \dots, N$ .

Como variáveis e parâmetros tem-se que  $\zeta$  é o VaR da carteira,  $\alpha$  é o nível de confiança estipulado,  $\pi_j$  é a probabilidade de ocorrer certo cenário, que no caso é considerada igual para todos,  $f(x, y_j)$  é a função de perda,  $w_i$  representa a proporção do investimento aplicado no ativo  $i$ ,  $\sigma_{ij}$  é a covariância entre os ativos  $i$  e  $j$ ,  $\mu_i$  é a média histórica de retorno do ativo  $i$ ,  $z_i$  é uma variável binária, que sendo 0 indica que o ativo  $i$  não está na carteira, e sendo 1 indica que o ativo  $i$  faz parte da carteira,  $x_i$  é a *variável de decisão* que representa a quantidade de lotes do ativo  $i$  a ser otimizado pelo modelo,  $m_i$  é o mínimo de ações que devem ser consideradas para cada ativo  $i$ ,  $c_i$  é o custo do lote mínimo do ativo  $i$ ,  $C$  é o capital disponível para ser aplicado na carteira e  $ct$  é o custo da operação da carteira no mercado financeiro, que leva em consideração a corretagem, valor cobrado para realizar operação de compra e venda, os emolumentos, que são encargos cobrados pela bolsa de valores, e a custódia, que é o valor cobrado pela posse das ações.

As funções objetivo são descritas pela expressão 1 referente a minimização do *risco*, que neste caso é o CVaR, e pela expressão 2, referente a maximização do *retorno* da carteira, calculada como a média do retorno ponderada pelas proporções de investimento, encontrada no trabalho de Markowitz (Markowitz (1952)). A expressão 3a descreve a *restrição de cardinalidade* da carteira, em que o somatório dos valores da variável  $z$  deve ser igual ao tamanho  $k$  estipulado. A *restrição de número mínimo de lotes* da expressão 3c garante que o número de lotes da carteira e o número de lotes do ativo  $i$  sejam maiores ou iguais a 1. Na expressão 3b tem-se a *restrição de orçamento* que garante que o valor da carteira é menor que o valor disponível para investimento. As *proporções de investimentos* nos ativo  $i$ ,  $w_i$ , são calculadas a partir da proporção de investimento em cada ativo, em relação ao custo total da carteira.

### 3. Algoritmos Propostos

Dois algoritmos evolutivos foram propostos para otimizar o modelo de composição de carteiras de investimentos, que tem como variável de decisão uma variável inteira. Ambos os algoritmos realizam as mesmas operações de *geração da população inicial*, *mutação* e *cruzamento*, diferenciando-se na forma em que fazem a *seleção* dos indivíduos. A seleção do **algoritmo 1** é baseada no algoritmo DEMO (Rubič & Filipič (2005)), enquanto a seleção do **algoritmo 2** é baseada no algoritmo PDEA (Madavan (2002)). Como o modelo tem variável de decisão inteira, foram utilizados métodos para reparação das soluções, caso essas se tornassem infactíveis.

Cada indivíduo, que nos algoritmos evolutivos é considerado como possível solução, é codificado através de uma estrutura que contém os campos: *vetor de ativos*, *vetor de número de lotes de cada ativo*, *variável real retorno*, *variável real risco*.

A **geração da população inicial** é feita através do preenchimento do vetor de ativos com números inteiros que os representam. Cada ativo recebe uma quantidade inteira aleatória de lotes de ações, de forma que a quantidade total de lotes da carteira não exceda o valor disponível para investimento.

Na **mutação**, o campo dos ativos de cada indivíduo é diversificado e este processo é feito conforme a mutação no algoritmo DE (*DE/rand/1/bin*), que faz com que o indivíduo mutado seja gerado a partir da diferença entre dois indivíduos distintos aleatórios, somada a um terceiro indivíduo aleatório. Como a diferença entre valores inteiros (que representam os ativos) pode se tornar infactível, a função  $mod^1$ , é aplicada a este vetor de ativos, com  $N$  sendo o número de ativos disponíveis para investimentos. Dessa forma, os números reais gerados a partir da mutação se tornam números inteiros. Caso algum número se repita, é feita a reparação através do sorteio de um número inteiro que não está no vetor, ou seja, ao final desse processo a carteira do indivíduo mutado possui  $k$  números distintos entre si representando os ativos, sendo  $k$  o número de ativos que compõe a carteira. Após esse processo são geradas quantidades aleatórias de lotes para cada ativo na carteira, de forma que o valor final da carteira não ultrapasse o valor disponível para investimento.

No **cruzamento**, cada indivíduo da população corrente é comparado com um indivíduo gerado a partir da mutação. Nesse processo é gerado, a partir dessa comparação, um indivíduo que possui um vetor de ativos que contém ativos do indivíduo da população corrente ou do indivíduo mutado. Após esse processo, assim como na mutação, são atribuídas aleatoriamente quantidades de lotes para cada ativo na carteira sem que o valor da carteira ultrapasse o valor disponível para investimento.

No **algoritmo 1**, se os indivíduos gerados a partir do cruzamento forem melhores que os indivíduos que os geraram, os indivíduos gerados substituem na população corrente os indivíduos que o geraram. Já no **algoritmo 2**, todos os indivíduos gerados a partir do cruzamento e da população corrente são submetidos a seleção. Considerando  $N_p$  indivíduos iniciais, durante o processo de seleção, o algoritmo 1 possui de  $N_p$  a  $2N_p$  indivíduos para selecionar  $N_p$  como os melhores, enquanto o algoritmo 2 possui obrigatoriamente sempre  $2N_p$  para realizar a seleção de  $N_p$ .

### 3.1. Medidas de desempenho

Para avaliar os resultados dos algoritmos foram utilizadas duas medidas de desempenho, a medida *Spacing* (SP), descrita em Schott (1995), para avaliar o quanto as soluções são diversificadas, ou seja, o quanto se distribuem no espaço de soluções, e a medida *Average Size of Space Covered* (ASSC), descrita em Baños et al. (2007), para avaliar o quanto as soluções cobriram o espaço de objetivos.

A medida SP é definida pela equação 4:

$$SP(X) = \sqrt{\frac{1}{|X|} \sum_{i=1}^{|X|} (d_i - \bar{d})^2} \quad (4)$$

em que  $d_i = \min_{k \in X, k \neq i} \sum_{k=1}^K |f_k^i - f_k^x|$  e  $\bar{d} = \frac{1}{|X|} \sum_{i=1}^{|X|-1} d_i$ .

Quanto menor o valor da medida SP, menos espaçados estão as soluções no espaço de objetivos, logo, melhor diversificadas.

A medida ASSC é dada pela definição:

**Definição 3.1 (Average Size of Space Covered (ASSC))** Dado um conjunto de soluções  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , a função  $ASSC(X)$  retorna a média do volume coberto pela união dos polítopos  $p_1, p_2, p_k$  em que  $p_i$  é formado pela interseção dos hiperplanos decorrentes de  $x_i$  ao longo do eixo: para cada eixo no

<sup>1</sup>A função *mod* pode ser definida como em Oliveira (2013), sendo considerada neste trabalho da seguinte forma: dado  $a, N \in \mathbb{Z}$  a operação  $mod(a, N)$  retorna o resto da divisão de  $a$  por  $N$ .

espaço de objetivos há um hiperplano perpendicular passando entre os pontos  $(f_1(x_i), \dots, f_K(x_i))$ . Para o caso bidimensional, cada  $p_i$  representa um retângulo definido pelos pontos  $(0, 0)$  e  $(f_1, f_2)$ . A equação 5 a seguir descreve esta medida.

$$ASSC(X) = \frac{\sum_{i=1}^{|X|} (\prod_{k=1}^{|K|} \frac{f_k(x_i)}{\max(f_k(X))})}{|NP|} \quad (5)$$

em que  $|X|$  é o número de soluções não dominadas,  $|K|$  é o número de objetivos e  $|NP|$  é o número total de soluções.

Para o caso desse trabalho, quanto maior a média desses retângulos, maiores serão os indícios de que o conjunto de soluções não dominadas encontrado está próximo do Pareto-Ótimo não conhecido.

#### 4. Resultados

Para realizar a otimização, foi considerada uma série histórica das cotações de fechamento das ações que participavam do índice Bovespa BMF&BOVESPA (2012) em Dezembro de 2012. Foram utilizadas as cotações referentes a 3 anos (2007 a 2011) para realizar a otimização, totalizando 742 cotações de fechamento de 61 ações e, para os estudos de casos, foram utilizadas 242 cotações de fechamento das mesmas ações, referentes ao período de janeiro a dezembro do ano de 2012.

O retorno de cada dia, dado pela equação 6, foi calculado como a diferença logarítmica entre o valor de fechamento do dia pelo valor de fechamento do dia anterior.

$$r(t) = \ln(\text{fechamento}(t)) - \ln(\text{fechamento}(t - 1)) \quad (6)$$

Dessa forma, o retorno se torna uma taxa, suavizando assim a diferença entre preços exorbitantes possíveis no mercado financeiro.

Para os algoritmos, o fator de escala da mutação diferencial ( $F$ ) foi considerado como  $F = 0,5$  e como probabilidade de o indivíduo gerado pelo cruzamento herdar os ativos do indivíduo da população corrente ou da população mutada, foi considerada uma *probabilidade de cruzamento* com valor igual a 0,3, ou seja, mais provável que os indivíduos gerados herdem os ativos da carteira do indivíduo da população corrente. Foram utilizadas 100 indivíduos e 500 gerações durante as execuções dos algoritmos, sendo que cada algoritmo foi executado 30 vezes. Foi estipulado uma carteira de investimentos com 3 ativos ( $k = 3$ ), com capital investimento ( $C$ ) no valor de R\$ 30.000,00, sendo a quantidade mínima de investimento em cada empresa igual a 100 ações, ou seja, um lote padrão conforme dados da BMF&Bovespa. O custo de transação  $ct$  foi composto da corretagem R\$20,00, dos emolumentos 0,0345% e da custódia de R\$9,00 + taxa variável de 0,0130% mensal, com base no valor da carteira no último dia do mês.

A figura 1 apresenta as soluções não dominadas obtidas ao fim das 30 execuções do algoritmo 1, já a figura 2 apresenta as soluções não dominadas obtidas ao fim das 30 execuções do algoritmo 2. É possível perceber que ambos os conjuntos de soluções aparentam graficamente serem as mesmas. De fato, a solução de menor risco obtida pelo algoritmo 1 e pelo algoritmo 2 foi formada por 1 lotes do ativo AMBV4, 3 lotes do ativo NATU3 e 2 lotes do ativo TRPL4, com valor de risco igual a igual a 0.0285, enquanto que o retorno foi de 0.0011. A carteira de maior retorno encontrada foi formada por 9 lotes do ativo HGTX3, 1 lote do ativo LLXL3, 1 lote do ativo VAGR3, com valor de risco igual a 0.0835 e valor de retorno igual a 0.0035.

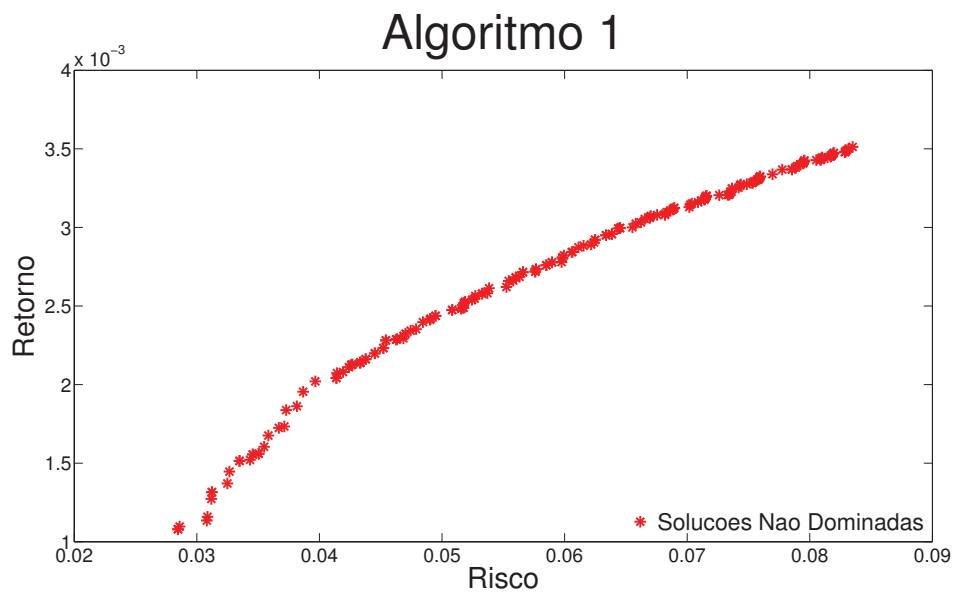


Figura 1: Conjunto de soluções não dominadas encontradas pelo Algoritmo 1 ao fim de 30 execuções.

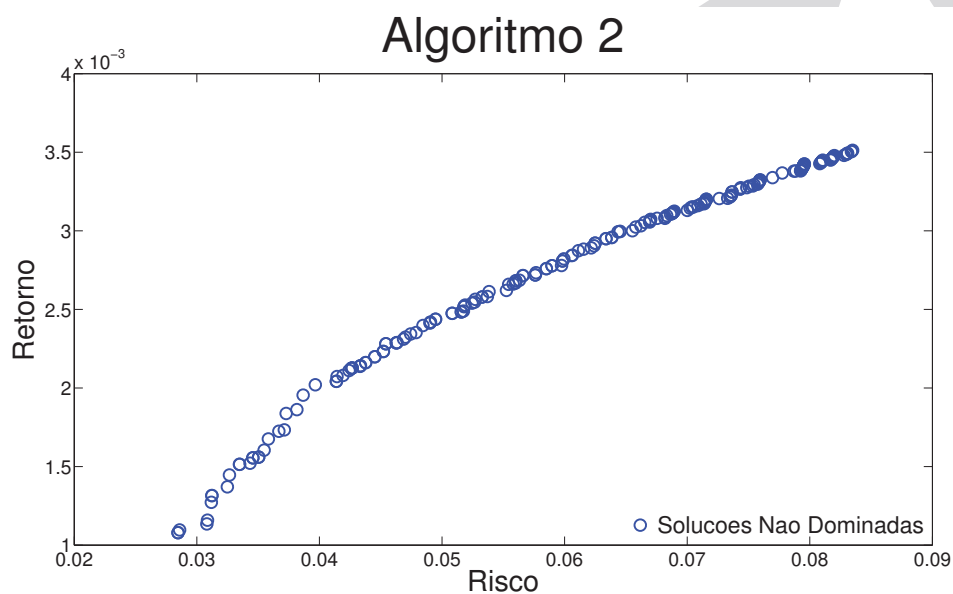


Figura 2: Conjunto de soluções não dominadas encontradas pelo Algoritmo 2 ao fim de 30 execuções.

Analisando os *boxplots* dos valores das medidas de desempenho calculadas ao final da execução em relação as 30 execuções, figuras 3 e 4, é possível avaliar a variabilidade dos valores das medidas de desempenho ao longo das gerações. Ambas as medidas aparentam obter as mesmas variações de valores em relação a ambas as medidas de desempenho, o que pode indicar que não há diferenças significativas entre os algoritmos durante as execuções.

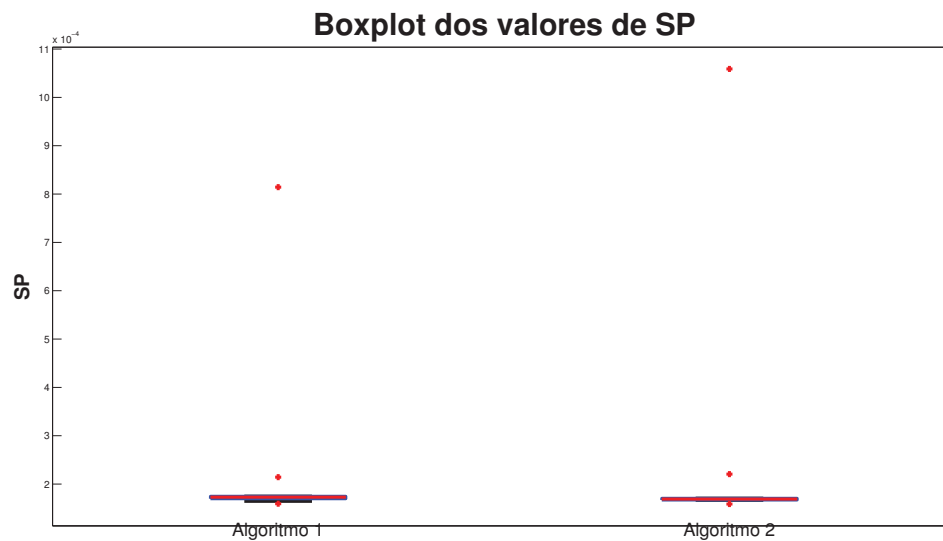


Figura 3: Comparação dos valores de SP ao longo das gerações.

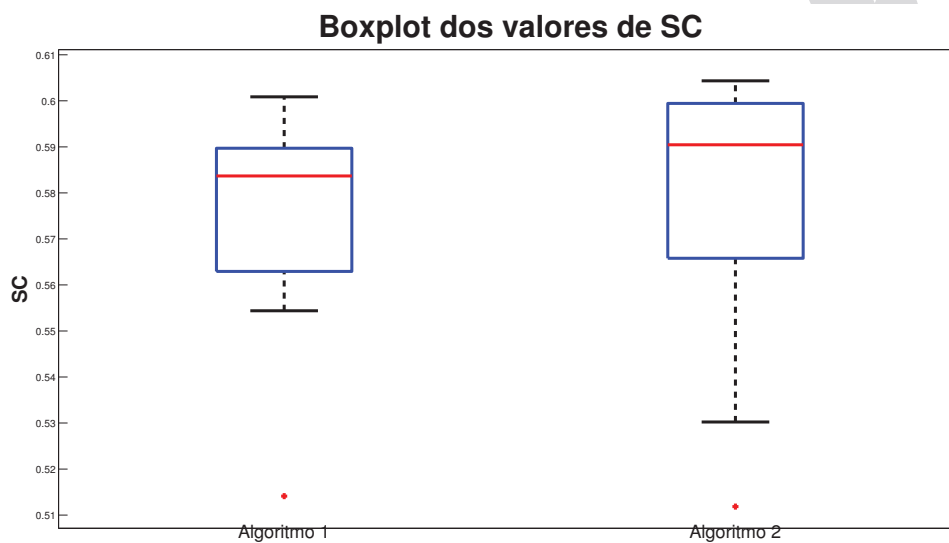


Figura 4: Comparação dos valores de SC ao longo das gerações.

Utilizando o teste *t-Student*, detalhado em Triola et al. (2005), é possível analisar os valores encontrados por ambos algoritmos em relação às medidas SP e ASSC, através de um teste de hipóteses. Seja a hipótese nula " $H_0$  : As médias das medidas em questão são iguais" e a hipótese alternativa " $H_A$  : A média das medidas em questão são diferentes", com um nível de significância de 5%, ou seja,  $\alpha = 0,05$ .

Para a medida SP, houve falha em rejeitar a hipótese nula com um *p*-valor igual a 0,8377, ou seja, não houveram indícios para não aceitar que as médias dessa medida ao longo das gerações obtidas pelos algoritmos 1 e 2 não são iguais. Dessa forma, não é possível dizer qual dos dois algoritmos possuiu a melhor diversidade de soluções.

Para a medida ASSC, também houve falha em rejeitar  $H_0$ , com um *p*-valor igual a 1.

Dessa forma, há indícios de que não há diferença significativa na cobertura do espaço de soluções por parte do algoritmo 1 ou do algoritmo 2.

Utilizando as carteiras obtidas pelas soluções extremas, ou seja, as soluções de menor risco e maior retorno, foi feito um estudo de caso de como seria o rendimento em relação ao investimento inicial, em porcentagem, caso houvesse a venda das ações no último dia cada mês do ano de 2012.

A figura 5 apresenta o rendimento das carteiras obtidas pela otimização do modelo estudado, juntamente com o rendimento do Ibovespa. É possível verificar que a solução de maior retorno obteve um ganho maior que o Ibovespa em todos os meses de 2012, sendo que esta obteve um ganho menor que a solução de menor risco apenas em um mês. Já a solução de menor risco obteve um ganho menor que o Ibovespa em três meses, mas obteve um ganho maior que o Ibovespa no restante dos meses.

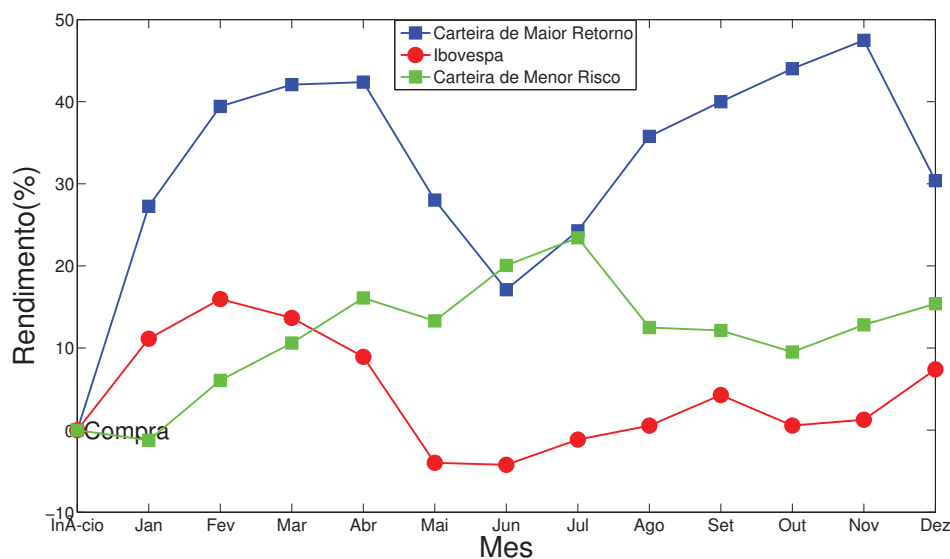


Figura 5: Desempenho das carteiras encontradas ao longo do ano de 2012.

## 5. Conclusão

Pode-se concluir que os algoritmos propostos foram robustos em relação a otimização do modelo estudado, uma vez que ambos obtiveram os mesmos resultados ao final de suas execuções, como também não houve indícios de diferença significativa ao longo das gerações, apresentadas pelos *boxplots* e pelo teste de hipóteses.

Em relação ao modelo, concluiu-se que as carteiras de investimentos obtidas das soluções encontradas, tanto aquela de menor risco como aquela de maior retorno, conseguiram obter melhores rendimentos que o Ibovespa, enfatizando o fato de que realmente a solução de maior retorno foi superior, em termos de rendimento, que a solução de menor risco e que o Ibovespa.

Dessa forma, houveram indícios de que a metodologia proposta conseguiu obter opções de carteiras de investimentos que poderiam, para o caso estudado, auxiliar um investidor a alcançar um rendimento favorável.



## Referências

- Anagnostopoulos, K. & Mamanis, G. (2010), 'A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables', *Computers & Operations Research* **37**(7), 1285–1297.
- Anagnostopoulos, K. & Mamanis, G. (2011), 'The mean–variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms', *Expert Systems with Applications* **38**(11), 14208–14217.
- Baños, R., Gil, C., Paechter, B. & Ortega, J. (2007), 'A hybrid meta-heuristic for multi-objective optimization: Mosats', *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms* **6**(2), 213–230.
- BMF&BOVESPA (2012), 'Ibovespa, url: <http://www.bmfbovespa.com.br> em 20/12/2012.'
- Chang, T.-J., Meade, N., Beasley, J. E. & Sharaiha, Y. M. (2000), 'Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation', *Computers & Operations Research* **27**(13), 1271–1302.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. & Meyarivan, T. (2002), 'A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii', *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on* **6**(2), 182–197.
- Madavan, N. K. (2002), Multiobjective optimization using a pareto differential evolution approach, in 'wcci', IEEE, pp. 1145–1150.
- Markowitz, H. (1952), 'Portfolio selection', *The journal of finance* **7**(1), 77–91.
- Oliveira, M. C. d. (2013), 'Aritmética: criptografia e outras aplicações de congruências'.
- Price, K., Storn, R. M. & Lampinen, J. A. (2006), *Differential evolution: a practical approach to global optimization*, Springer Science & Business Media.
- Robič, T. & Filipič, B. (2005), Demo: Differential evolution for multiobjective optimization, in 'Evolutionary Multi-Criterion Optimization', Springer, pp. 520–533.
- Rockafellar, R. T. & Uryasev, S. (2000), 'Optimization of conditional value-at-risk', *Journal of risk* **2**, 21–42.
- Rockafellar, R. T. & Uryasev, S. (2002), 'Conditional value-at-risk for general loss distributions', *Journal of banking & finance* **26**(7), 1443–1471.
- Schott, J. R. (1995), Fault tolerant design using single and multicriteria genetic algorithm optimization., Technical report, DTIC Document.
- Soleimani, H., Golmakani, H. & Salimi, M. (2009), 'Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm', *Expert Systems with Applications* **36**(3), 5058–5063.
- Triola, M. F. et al. (2005), *Introdução à estatística*, Vol. 9, Ltc Rio de Janeiro.