JOGOS VETORIAIS COMO FERRAMENTA DE AVALIAÇÃO ECONÔMICO-FINANCEIRA: UM ESTUDO MULTICRITÉRIO

Adriana Kroenke
Universidade Regional de Blumenau – FURB
Rua Antônio da Veiga, 140 – Blumenau- SC, CEP: 89012-900
didlen@terra.com.br

Nelson Hein
Universidade Regional de Blumenau – FURB
Rua Antônio da Veiga, 140 – Blumenau- SC, CEP: 89012-900
hein@furb.br

Volmir Eugênio Wilhelm
Universidade Federal do Paraná - UFPR
Jardim das Américas, 980 – Curitiba - PR
volmirw@gmail.com

RESUMO

O objetivo deste artigo é determinar o posicionamento contábil das empresas do setor de metalurgia e siderurgia listadas na BM&FBovespa por meio da teoria dos jogos vetoriais no período de 2009 a 2013. São usados quatro lotes de indicadores econômico-financeiros: liquidez, endividamento, rentabilidade e atividade. De cada grupo foram selecionados três indicadores de acordo com o que a literatura contábil apresenta. A leitura é feita usando as empresas como estratégias do jogador I e os indicadores econômico-financeiros como sendo as estratégias do jogador II. O posicionamento contábil obtido reflete os resultados que são percebidos em análise pormenorizada dos dados sob ótica contábil.

PALAVARAS CHAVE. Teoria dos Jogos, Jogos vetoriais, Indicadores contábeis.

ADM – Apoio à Decisão Multicritério

ABSTRACT

This paper aims to determine the placement of accounting companies in the iron and steel listed on the BM&FBovespa by means of vector games from 2009 to 2013. Use four lots of financial indicators: liquidity, debt, profitability and activity. From each group were selected three indicators according to the presents in the accounting literature. Reading is done using business strategies as player I and financial indicators as the strategies of player II. The positioning accounting reflects the results obtained are perceived in detailed analysis of the data under accounting perspective.

KEYWORDS. Game theory, Vector games, Financial indicators.

MCDA – Multicreria Decision Aid

1. Introdução

Os fundamentos da teoria dos jogos foram estabelecidos por John von Neumann em 1928 e expostos no livro *Theory of Games and Economic Behavior*, que publicou junto a Oskar Morgenstern em 1944. Esta teoria põe de manifesto que os acontecimentos das ciências sociais podem ser descritos mediante modelos de jogos de estratégia com uma maior riqueza de detalhes, pois os agentes atuam muitas vezes uns contra os outros para a consecução de seus objetivos.

A teoria dos jogos proporciona modelos de situações reais, pelos quais frequentemente, as conclusões que estes modelos fornecem são somente pautas gerais de comportamento, que proporcionam normas de atuação mais precisas tanto quanto o modelo reflita com mais perfeição a realidade. Tudo isso fez com que a teoria dos jogos crescesse dentro da Pesquisa Operacional, demonstrando possuir suficiente interesse e aplicabilidade para ser estudada como disciplina independente (DIMAND, 1996).

Dentro das organizações, quando se lida com problemas decisórios, é certo que serão enfrentadas situações de conflito de interesse (NISHIZAKI; SAKAWA, 2001), competição e cooperação parcial. Estas características são consideradas a essência dos problemas decisórios.

Jogadores, ao avaliarem alternativas, optam por aquelas que lhe tragam maiores ou melhores resultados. Maiores no caso do jogo ser não-cooperativo e melhor no caso cooperativo. Em ambos os casos é feito um *ranking* das alternativas, ordenando as mesmas frente aos objetivos naturais, ou seja, maximizar ganhos e minimizar perdas. Contabilmente seria, por exemplo, objetivar a melhor liquidez e um menor endividamento. Contudo, os resultados podem ser múltiplos e podem ser medidos de várias formas: unidades monetárias, índices, graus, números, etc., caracterizando múltiplos pagamentos. Caso todos os múltiplos pagamentos possam ser condensados em uma única medida, como por exemplo em uma métrica de utilidade, a alternativa com o maior grau de utilidade acaba sendo a escolhida, não sendo classificado como um problema de decisão, dada a trivialidade da situação (ZELENY, 1976). Zeleny (1976) afirma que caso não seja conhecida a medida de utilidade ou caso não se queira perder informação oferecida pelos múltiplos resultados, então só há um problema de tomada de decisão com múltiplos pagamentos (*Decision Making with Multiple Payoffs Problem*).

Tradicionalmente as ferramentas de tomada de decisão, assim como jogos contra a natureza ou jogos entre duas pessoas, são baseadas no conceito de um único pagamento (ganho, perdas, utilidade, etc.). Um jogo modelado na forma de soma-zero com um único pagamento não captura completamente a complexidade das situações em situações reais.

Quando dois oponentes elegem suas estratégias (alternativas), não só os resultados apresentam uma soma não-nula, mas ela também possui uma forma de um vetor ao invés de um escalar. Jogos reais entre dois personagens, devem ser entendidos como sequências de ganhos e perdas, em que não necessariamente o ganho de um é a perda do outro em cada movimento. Os jogadores não são imediatamente ganhadores ou perdedores. O uso de estratégias mistas ou randômicas nem sempre são adequadas e a cooperação muitas vezes substitui a concorrência.

A leitura de cada empresa segundo seus vetores formados por índices econômico-financeiros são o escopo desta pesquisa. Estes vetores serão obtidos das demonstrações contábeis, que nesta investigação são os indicadores de liquidez, endividamento, rentabilidade e atividade das empresas de metalurgia e siderurgia listadas na BM&FBovespa. A partir desses indicadores é possível estabelecer o posicionamento contábil dentro do seu setor, tomadas aqui como sendo suas concorrentes.

Diante do exposto, esta pesquisa busca responder a seguinte questão: Qual o posicionamento contábil das empresas de metalurgia e siderurgia listadas na BM&FBovespa nos últimos cinco anos avaliadas à luz da teoria dos jogos vetoriais? O objetivo consiste em determinar o posicionamento contábil das empresas do setor de metalurgia e siderurgia listadas na BM&FBovespa por meio da teoria dos jogos vetoriais no período de 2009 a 2013.

2. Jogos matriciais vetoriais

Os jogos nos quais os pagamentos que os jogadores recebem vem representados por vetores ao invés de escalares são denominados jogos vetoriais, jogos multicritério ou jogos com pagamentos múltiplos (ZELENY, 1982).

Nestes jogos, se não há cooperação entre os jogadores como ocorre nos jogos de soma nula, se acrescenta a dificuldade da não existência de uma ordem total entre os elementos da matriz de pagamentos. A valoração das estratégias e a comparação entre as mesmas é um problema adicional na teoria dos jogos, sendo o conceito de solução clássica difícil de ser desenvolvido. Por esta razão tem aparecido novos conceitos de solução (FERNÁNDEZ; MONROY, 2009).

Neste sentido o conceito de estratégia de segurança Pareto-Ótima é importante à solução de jogos com múltiplos pagamentos, utilizando conceitos de solução baseados nos níveis de segurança dos jogadores.

Ghose e Prassad (1989) definem pontos de equilíbrio com níveis de segurança Pareto-Ótimas e pontos de sela de Pareto. Para determinar o conjunto de estratégias de Pareto-Ótimas estabelecem dois jogos escalares, um para cada jogador e provam que as estratégias maximin e minimax destes jogos são estratégias de segurança Pareto-Ótimas para o jogador correspondente.

Ghose (1991) obteve as estratégias de segurança Pareto-Ótimas de um jogo vetorial de soma zero tranformando o jogo original em um jogo escalar. Ele demonstrou, por meio de um longo processo que uma extensão do conjunto formado pelos vetores de nível de segurança é um conjunto poliédrico. A partir deste resultado estabelece uma “escalarização” estritamente positiva em uma condição necessária e suficiente para obter uma estratégia de segurança Pareto-Ótima, para tais jogos.

Neste artigo utiliza-se a mesma “escalarização” como caso particular em um enfoque geral, realizado por meio de um procedimento alternativo que simplifica em boa medida as demonstrações estabelecidas por Ghose e Prassad. Por meio da programação linear multiobjetivo obtém-se as estratégias de segurança Pareto-Ótimas como soluções eficientes de problemas lineares multiobjetivo.

Dado um jogo bipessoal de soma-zero na sua forma típica. Seja $A = \left(a_{ij}\right); 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ a matriz de pagamentos do jogo. Cada elemento a_{ij} da matriz é um vetor de dimensão k:

$$a_{ij} = (a_{ij}(1), a_{ij}(2), \dots, a_{ij}(k)) \in \mathbb{R}^k$$

que determina k matrizes de ordem $m \times n$ na forma:

$$A(s) = \left(a_{ij}(s)\right) \quad 1 \leq s \leq k; \;\; 1 \leq i \leq n; \;\; 1 \leq j \leq m$$

As estratégias mistas nestes jogos se definem da mesma forma como em jogos escalares. Assim, os espaços das estratégias mistas para os jogadores I e II são respectivamente:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{j=1}^{m} y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, \dots, m\}$$

<u>Definição</u>: O pagamento esperado do jogo quando os jogadores elegem suas estratégias mistas $x \in X$ e $y \in Y$, respectivamente, é dado por:

$$v(x, y) = x^t A y = (v_1(x, y), \dots, v_k(x, y))$$

Onde:

$$v_s(x, y) = x^t A(s) y, s = 1, \dots, k$$

Dado que uma estratégia deve ser valorada por um conjunto de vetores, pode-se dar uma única valoração, ao considerar que o oponente pode atuar em cada coordenada da matriz A de modo independente e oferecer o vetor que assegura ao jogador para que realmente obtenha valores superiores.

Definição: Para cada estratégia $x \in X$ do jogador I, o vetor de nível de segurança para este jogador é o pagamento que lhe é garantido com esta estratégia, em cada jogo escalar induzido pelo jogo vetorial. O mesmo se aplica ao jogador II.

Os vetores de níveis de segurança dos jogadores são respectivamente:

$$\underline{v}(x) = (\ \underline{v}_1(x), \dots, \underline{v}_k(x))$$
$$\overline{v}(y) = (\ \overline{v}_1(y), \dots, \overline{v}_k(y))$$

Onde:

$$\underline{v}_s(x) = \min_{y \in Y} v_s(x,y) = \min_{y \in Y} x^t A(s) y$$
$$\overline{v}_s(y) = \max_{x \in X} v_s(x,y) = \max_{x \in X} x^t A(s) y$$

Observe-se que dada uma estratégia $x \in X$ do jogador I cada componente do vetor de nível de segurança $\underline{v}_s(x)$, $s = 1, \dots, k$ podem ser obtidas com distintas estratégias $y \in Y$ do jogador II. Ghose e Prassad (1989) estabelecem a definição de estratégia de segurança Pareto-Ótima como segue.

Definição: Uma estratégia $x^* \in X$ é uma estratégia de segurança Pareto-Ótima para o jogador I se não existe $x \in X$, tal que $\underline{v}(x^*) \leq \underline{v}(x)$, $\underline{v}(x^*) \neq \underline{v}(x)$. Uma estratégia $y^* \in Y$ é uma estratégia de segurança Pareto-Ótima para o jogador II se não existe $y \in Y$, tal que $\overline{v}(y^*) \geq \overline{v}(y)$, $\overline{v}(y^*) \neq \overline{v}(y)$.

Dada uma estratégia $x \in X$ o nível de segurança s-ésimo do jogador I é dado por:

$$\underline{v}(s) = \min_{y \in Y} v_s(x,y) = \min_{y \in Y} x^t A(s) y$$

O problema a ser resolvido é um problema linear escalar, portanto, possui uma solução ótima entre os pontos extremos de Y. Assim, $\underline{v}_s(x)$ é expressado:

$$\underline{v}_s(x) = \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} x_i\, a_{ij}(s)$$

Ou matricialmente:

$$\underline{v}(x) = \min x^t A(s)$$

Com efeito, para a pesquisa pretende-se como resultado a formulação de estratégias para o jogador I (empresas) frente as estratégias do jogador II (indicadores), o que se traduz na forma de um problema de programação linear multiobjetivo denominado de problema linear do jogo vetorial (PLJV).

Modelo:

$$\begin{aligned} \max\ & v_1, v_2, \ldots, v_k \\ s.a.\ & x^t A(s) \ge (v_1,\ldots,v_k);\ s=1,\ldots,k \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

<u>Teorema</u> (BILBAO; FERNANDEZ, 2002, p.31): Uma estratégia $x^* \in X$ é uma estratégia de segurança Pareto-Ótima e $\underline{v}^* = (v_1^*, \ldots, v_k^*)$ seu vetor de nível de segurança associado se, e somente se, (v^*, x^*) for uma solução eficiente do problema PLJM.

Demonstração:

Seja $x^* \in X$ uma estratégia de segurança Pareto-Ótimo então não existe outra estratégia $x \in X$ tal que $\underline{v}(x^*) \le \underline{v}(x)$, $\underline{v}(x^*) \ne \underline{v}(x)$, ou de forma equivalente:

$$(\min x^t A(1), \ldots, \min x^t A(k)) \ge (\min x^{*t} A(1), \ldots, \min x^{*t} A(k))$$
$$(\min x^t A(1), \ldots, \min x^t A(k)) \ne (\min x^{*t} A(1), \ldots, \min x^{*t} A(k))$$

Sendo $x \in X$ uma solução eficiente do problema:

$$\max_{x \in X} \ (\min\ x^t A(1), \ldots, \min x^t A(k))$$

E este problema é equivalente a:

$$\begin{aligned} \max\ & v_1, v_2, \ldots, v_k \\ s.a.\ & x^t A(s) \ge (v_s,\ldots,v_s);\ s=1,\ldots,k \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

De forma recíproca, supondo que uma solução eficiente (v^*, x^*), do problema PLJV não seja uma estratégia de segurança Pareto-Ótima, então existe $\bar{x} \in X$, tal que:

$$(\min \bar{x}^t A(1), \ldots, \min \bar{x}^t A(k)) \ge (\min x^{*t} A(1), \ldots, \min x^{*t} A(k))$$
$$(\min \bar{x}^t A(1), \ldots, \min \bar{x}^t A(k)) \ne (\min x^{*t} A(1), \ldots, \min x^{*t} A(k))$$

Seja $\bar{v} = (\bar{v}_{1,\ldots}, \bar{v}_k)$ onde $\bar{v}_s = \min \bar{x}^t A(s)$, $s = 1, \ldots, k$ o vetor $(\bar{v}, \bar{x})$ é uma solução do problema PLJV que domina (v^*, x^*), sendo uma solução eficiente do problema PLJV. $\square$

Este resultado é fundamental neste artigo e por várias razões. Põe de manifesto que de similar modo a programação linear utiliza-se para obter as estratégias ótimas e o valor dos jogos escalares bipessoais de soma-zero. Da mesma forma pode utilizar-se a programação linear multiobjetivo para resolver os jogos bipessoais de soma-zero com pagamentos vetoriais sempre que se considera o conceito de estratégia de segurança Pareto-Ótima como solução dos mesmos.

Em segundo lugar há de se notar que, como é usual em problemas lineares multiobjetivo, a partir das soluções eficientes extremas se obtém todas as estratégias de segurança Pareto-Ótimas.

3. Metodologia da Pesquisa

Diante do objetivo deste estudo, que consiste em determinar o posicionamento contábil das empresas do setor de metalurgia e siderurgia listadas na BM&FBovespa por meio da teoria dos jogos vetoriais no período de 2009 a 2013, esta pesquisa se classifica como descritiva.

Para atender o objetivo desta investigação fez-se necessário verificar indicadores contábeis apresentados na literatura, o que caracteriza uma pesquisa bibliográfica e o fato de utilizar demonstrações contábeis como fonte de coleta de dados torna esta pesquisa documental, pois, os dados ainda não receberam nenhuma forma de tratamento.

Quanto à abordagem do problema este estudo classifica-se como quantitativo. "O método quantitativo representa, em princípio, a intenção de garantir a precisão dos resultados, evitar distorções de análise e interpretação, possibilitando, consequentemente, uma margem de segurança quanto as inferências" (RICHARDSON, 1989, p. 29).

A população é definida como o conjunto de elementos que apresentam os atributos necessários para o desenvolvimento do estudo (SILVEIRA, 2004). No caso desta pesquisa, que apresenta os dados dos indicadores de liquidez, endividamento, rentabilidade e atividade. A população, nesta pesquisa, consiste nas 12 empresas de siderurgia e metalurgia listadas na BM&FBovespa.

A população foi definida intencionalmente, ou seja, consiste em uma população não probabilística e justifica-se pelo acesso às informações contábeis e seu grau de confiabilidade por se tratarem de empresas de capital aberto. As empresas do ramo de siderurgia e metalurgia utilizadas nesta investigação são apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1 – Empresas do setor de siderurgia e metalurgia listadas na BM&FBovespa

Empresa	Nome do pregão	Atuação
Paranapanema	PARANAPANEMA	Artefatos de cobre
Fibam Companhia Industrial	FIBAM	Artefatos de Ferro e Aço
Mangels Industrial S.A.	MANGELS INDL	Artefatos de Ferro e Aço
Metalúrgica Duque S.A.	MET DUQUE	Artefatos de Ferro e Aço
Panatlantica S.A.	PANATLANTICA	Artefatos de Ferro e Aço
Siderurgica J. L. Aliperti S.A.	ALIPERTI	Artefatos de Ferro e Aço
Tekno S.A. – Indústria e Comércio	TEKNO	Artefatos de Ferro e Aço
CIA Ferro Ligas da Bahia - FERBASA	FERBASA	Siderurgia
CIA Siderurgia Nacional	SID NACIONAL	Siderurgia
GERDAU S.A.	GERDAU	Siderurgia
Metalurgica Gerdau S.A	GERDAU MET	Siderurgia
Usinas SID de Minas Gerais S.A. - USIMINAS	USIMINAS	Siderurgia

Fonte: BM&FBovespa (www.bm&fbovespa.com.br).

Os dados foram obtidos das demonstrações contábeis consolidadas, Balanço Patrimonial e Demonstração do Resultado do Exercício por meio do ECONOMÁTICA©. Foram extraídos os indicadores econômico-financeiros de liquidez, endividamento, rentabilidade e atividade do período de 2009 a 2013. De cada grupo foram extraídos três indicadores formando um grupo de 12 indicadores analisados: (a) liquidez: liquidez seca, liquidez corrente, liquidez geral, (b) endividamento: imobilização do patrimônio líquido, participação de capital de terceiros, composição do endividamento, (c) rentabilidade: margem líquida, retorno sobre o ativo, retorno sobre o patrimônio líquido, (d) atividade: prazo médio de estoques, prazo médio de fornecedores e prazo médio de recebimento. Estes foram calculados conforme fórmulas extraídas de Matarazzo (2008). Todas as empresas disponibilizaram os dados necessários no período de 2009 a 2012, porém, em 2013 a empresa Duque não divulgou seus dados. Por isso, em 2013 são analisadas somente as demais (11) empresas.

4. Análise e Interpretação dos Resultados

A análise de dados referentes aos indicadores de liquidez, endividamento, rentabilidade e atividade acabam por formar a matriz de pagamentos do jogo multicriterial. Em linha, observa-se dados de cada uma das empresas, Paranapanema até Usiminas. Na coluna, os dados dos indicadores de cada grupo LG, LC, até PMR.

$$
\mathrm{P} = \begin{bmatrix}
(1.02, 1.10, 0.53) & (94.95, 186.42, 84.79) & (-5.12, -4.93, 14.13) & (124.64, 158.73, 40.23) \\
(1.02, 1.12, 0.54) & (94.64, 227.86, 57.28) & (-3.95, -5.64, 18.48) & (69.52, 17.59, 48.40) \\
(0.74, 1.16, 0.97) & (657.10, 2388.88, 46.66) & (31.39, 21.99, 547.40) & (52.77, 70.64, 41.02) \\
(0.41, 0.64, 0.58) & (143.29, 158.06, 61.41) & (0.17, 0.09, 0.24) & (18.29, 51.66, 20.10) \\
(1.55, 2.20, 1.68) & (44.96, 98.41, 68.79) & (4.13, 4.48, 8.89) & (66.68, 39.33, 69.19) \\
(0.76, 1.35, 0.93) & (114.15, 64.45, 46.20) & (16.58, 3.26, 5.36) & (240.57, 23.17, 29.85) \\
(5.84, 7.91, 6.66) & (36.19, 13.13, 70.24) & (14.51, 8.45, 9.56) & (86.38, 21.37, 65.95) \\
(5.59, 6.90, 4.39) & (42.98, 12.39, 63.28) & (12.09, 6.55, 7.36) & (149.13, 19.35, 60.31) \\
(0.63, 3.30, 2.74) & (226.57, 447.27, 15.91) & (-2.84, -0.97, -5.33) & (106.76, 58.38, 38.24) \\
(0.85, 2.10, 0.94) & (68.37, 84.36, 32.20) & (3.94, 2.82, 5.20) & (97.72, 33.14, 35.03) \\
(0.78, 1.80, 0.81) & (73.42, 99.01, 34.38) & (3.51, 2.50, 4.97) & (97.72, 33.14, 35.03) \\
(0.93, 1.99, 1.30) & (89.95, 77.03, 37.88) & (-4.18, -1.62, -2.87) & (112.95, 68.23, 44.42)
\end{bmatrix}
$$

Estes dados são referentes ao exercício 2012. Os valores são adimensionais, ou seja, não possuem uma unidade de medida em especial. Contudo, cada indicador é transformado por meio de uma contração de Lipschitz $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.

Basicamente a contração é feita usando o teorema de Tales, ou seja, em cada um dos 12 indicadores há um máximo $i_j^+; j = 1, \dots, 12$ e um mínimo $i_j^-; j = 1, \dots, 12$. Fazendo $f\left(i_j^-\right) = 0$ e $f\left(i_j^+\right) = 1$, assim $f\left(i_j\right) = \frac{i_j - i_j^-}{i_j^+ - i_j^-}$.

No caso dos indicadores de endividamento pretende-se quanto menor melhor, logo a formulação passa a ser $f\left(i_j\right) = 1 - \frac{i_j - i_j^-}{i_j^+ - i_j^-}$. Isto também é aplicado ao indicador PME (prazo médio de estoques) e PMR (prazo médio de recebimento).

Assim, a matriz de pagamentos fica definida:

$$
\overline{P} = \begin{bmatrix}
(0.11, 0.06, 0) & (0.91, 0.93, 0) & (0.55, 0.56, 0.96) & (0.52, 1, 0.59) \\
(0.11, 0.07, 0.00) & (0.91, 0.91, 0.40) & (0.57, 0.54, 0.95) & (0.77, 0, 0.42) \\
(0.06, 0.07, 0.07) & (0, 0, 0.55) & (0, 0, 0) & (0.84, 0.38, 0.57) \\
(0, 0, 0.01) & (0.83, 0.94, 0.34) & (0.66, 0.73, 0.98) & (1, 0.24, 1) \\
(0.21, 0.22, 0.19) & (0.99, 0.96, 0.23) & (0.74, 0.87, 1.00) & (0.78, 0.15, 0) \\
(0.06, 0.10, 0.07) & (0.87, 0.98, 0.56) & (1, 0.83, 0.99) & (0, 0.04, 0.80) \\
(1, 1, 1) & (1, 1, 0.21) & (0.96, 1, 1) & (0.69, 0.03, 0.07) \\
(0.95, 0.86, 0.63) & (0.99, 1, 0.31) & (0.91, 0.94, 1.00) & (0.41, 0.01, 0.18) \\
(0.04, 0.37, 0.36) & (0.69, 0.82, 1) & (0.60, 0.69, 0.97) & (0.60, 0.29, 0.63) \\
(0.08, 0.20, 0.07) & (0.95, 0.96, 0.76) & (0.74, 0.82, 0.99) & (0.64, 0.11, 0.70) \\
(0.07, 0.16, 0.05) & (0.94, 0.96, 0.73) & (0.73, 0.80, 0.99) & (0.64, 0.11, 0.70) \\
(0.10, 0.19, 0.13) & (0.91, 0.97, 0.68) & (0.57, 0.67, 0.98) & (0.57, 0.36, 0.50)
\end{bmatrix}
$$

A aplicação do modelo também não é imediata, pois como serão avaliados as ternas compostas por cada grupo de indicadores, ter-se-á:

$$
\begin{gathered}
\max v_1, \dots, v_k \\
s.a{:}\ x^t A(s) \geq (v_k, \dots, v_k)\ s = 1, \dots, k; k = 1, \dots, 4\ (grupo\ de\ indicadores) \\
\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
x \geq 0
\end{gathered}
$$

Logo sua construção resulta em:

$$\max \mathrm{Z} = Liquidez, Endividamento, Rentabilidade, Atividade$$

Denominando v_1: Liquidez; v_2: Endividamento; v_3: Rentabilidade e v_4: Atividade, tem-se como função objetivo múltipla:

$$\max \mathrm{Z} = v_1, v_2, v_3, v_4$$

Como os indicadores são independentes entre si e todos tomados na mesma escala:

$$
\begin{array}{l}
\max \mathrm{Z} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \\
\qquad \text{s.a:} \\
0{,}11x_1 + 0{,}11x_2 + 0{,}06x_3 + 0{,}21x_5 + 0{,}06x_6 + x_7 + 0{,}95x_8 + 0{,}04x_9 + 0{,}08x_{10} + 0{,}07x_{11} + 0{,}10x_{12} - v_1 \geq 0 \\
0{,}06x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}07x_3 + 0{,}22x_5 + 0{,}10x_6 + x_7 + 0{,}86x_8 + 0{,}37x_9 + 0{,}20x_{10} + 0{,}16x_{11} + 0{,}19x_{12} - v_1 \geq 0 \\
0{,}07x_3 + 0{,}01x_4 + 0{,}19x_5 + 0{,}07x_6 + x_7 + 0{,}63x_8 + 0{,}36x_9 + 0{,}07x_{10} + 0{,}05 + 0{,}13x_{12} - v_1 \geq 0 \\
0{,}91x_1 + 0{,}91x_2 + 0{,}83x_4 + 0{,}99x_5 + 0{,}87x_6 + x_7 + 0{,}99x_8 + 0{,}69x_9 + 0{,}95x_{10} + 0{,}94x_{11} + 0{,}01x_{12} - v_2 \geq 0 \\
0{,}93x_1 + 0{,}91x_2 + 0{,}94x_4 + 0{,}96x_5 + 0{,}98x_6 + x_7 + 1x_8 + 0{,}82x_9 + 0{,}96x_{10} + 0{,}96x_{11} + 0{,}97x_{12} - v_2 \geq 0 \\
040x_2 + 0{,}55x_3 + 0{,}34x_4 + 0{,}23x_5 + 0{,}56x_6 + 0{,}21x_7 + 0{,}31x_8 + 1x_9 + 0{,}76x_{10} + 0{,}73x_{11} + 0{,}68x_{12} - v_2 \geq 0 \\
0{,}55x_1 + 0{,}57x_2 + 0{,}66x_4 + 0{,}74x_5 + x_6 + 0{,}96x_7 + 0{,}91x_8 + 0{,}60x_9 + 0{,}74x_{10} + 0{,}73x_{11} + 0{,}57x_{12} - v_3 \geq 0 \\
0{,}56x_1 + 0{,}54x_2 + 0{,}73x_4 + 0{,}87x_5 + 0{,}83x_6 + x_7 + 0{,}94x_8 + 0{,}69x_9 + 0{,}82x_{10} + 0{,}80x_{11} + 0{,}67x_{12} - v_3 \geq 0 \\
0{,}96x_1 + 0{,}95x_2 + 0{,}98x_4 + x_5 + 0{,}99x_6 + x_7 + x_8 + 0{,}97x_9 + 0{,}99x_{10} + 0{,}99x_{11} + 0{,}98x_{12} - v_3 \geq 0 \\
0{,}52x_1 + 0{,}77x_2 + 0{,}84x_3 + x_4 + 0{,}78x_5 + 0{,}69x_7 + 0{,}41x_8 + 0{,}60x_9 + 0{,}64x_{10} + 0{,}64x_{11} + 0{,}57x_{12} - v_4 \geq 0 \\
x_1 + 0{,}38x_3 + 0{,}24x_4 + 0{,}15x_5 + 0{,}04x_6 + 0{,}03x_7 + 0{,}01x_8 + 0{,}29x_9 + 0{,}11x_{10} + 0{,}11x_{11} + 0{,}36x_{12} - v_4 \geq 0 \\
0{,}59x_1 + 0{,}42x_2 + 0{,}57x_3 + x_4 + 0{,}80x_6 + 0{,}07x_7 + 0{,}18x_8 + 0{,}63x_9 + 0{,}70x_{10} + 0{,}70x_{11} + 0{,}50x_{12} - v_4 \geq 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 1 \\
x_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, 12)
\end{array}
$$

Das 16 variáveis do PL, 12 representam cada uma das empresas, a saber: Paranapanema (x_1), Fibam (x_2), Mangels (x_3), Duque (x_4), Panatlântica (x_5), Aliperti (x_6), Tekno (x_7), Ferbasa (x_8), Siderurgia Nacional (x_9), Gerdau (x_{10}), Gerdau Met. (x_{11}) e Usiminas (x_{12}).

A solução do PPL traz o vetor de estratégias:

$$\underline{x}^* = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_{12}]^t$$

Cada um dos $x_i, i = 1, \dots, 12$ representa uma probabilidade de adoção da estratégia i. A análise é feita em ordem decrescente, ou seja, as probabilidades apontarão se o problema admite uma estratégia pura ($p_i = 1$) ou uma estratégia mista ($\sum_{i=1}^{12} x_i = 1$). Caso a solução for a estratégia pura, tem-se a empresa mais bem posicionada. O mesmo ocorre quando a solução apontada for mista, a estratégia mais bem avaliada, dará como retorno a empresa mais bem posicionada contabilmente na rodada, voltando as demais para a cesta de estratégias.

A adoção dessa forma de análise atende ao axioma da escolha (ZELENY, 1982, p. 156) "as alternativas que são mais próximas do ideal são preferidas àquelas que estão mais distantes (ou ausentes). Para ser tão perto quanto possível do ideal percebido, que é a base racional da escolha humana".

Por outro lado, não viola um axioma que reflete o curso de desenvolvimento tradicional da análise decisória (reversão de ordem), que Zeleny (1982, p. 145) propõe como "se uma alternativa A é não-ótima, então ela não poderá se tornar ótima com a adição de uma nova alternativa ao problema". Com efeito, a técnica proposta não inclui novas alternativas, mas sim remove as eleitas como sendo as melhores do cenário, da rodada".

Além disso Starr e Zeleny (1977) ilustraram a falácia desse axioma em um exemplo com um conjunto de probabilidades sobre espectativas de utilidades, similar ao caso desta pesquisa.

Assim, na presença de *n* empresas, haverá um total de (*n-1*) rodadas, ou seja, são resolvidos no caso do modelo um total de 11 PPL's, usando o software PLM 3.0 (Programação Linear e Mista v. 3.0).

A análise ainda inclui o valor da informação, onde o modelo é tranformado em:

$$P(\lambda)\text{: max Z} = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s\, v_s$$
$$s.a{:}\ x^t A(s) \geq (v_s, \dots, v_s);\ s = 1, \dots, k;\ k = 1, \dots, 4$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$

No modelo $\lambda \in \Lambda^0 = \{\lambda \in \mathbb{R}^k : \lambda_s > 0;\ \sum_{s=1}^{k} \lambda_s = 1\}$. Os valores de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\ e\ \lambda_4$ são obtidos por meio da entropia dos dados normalizados de cada bloco de indicadores.

Ao abordar de problemas decisórios em cenários complexos em que muitos critérios estão em tratamento, o peso da importância do atributo (λ_i), conferido ao *i-ésimo* atributo como medida de importância relativa em uma dada situação de decisão, é diretamente relacionada a quantidade de informação intrínseca gerada por um conjunto de possíveis alternativas de cada *i-ésimo* atributo e em paralelo, a subjetividade associada as importância, reflete a cultura, psicologia e meio em que vive o tomador de decisão (ZELENY, 1982).

A importância do atributo se torna operacional somente se a quantidade intrínseca da informação transmitida para o tomador de decisão do *i-ésimo* atributo pode ser mensurado. Pode-se ajustar uma medida de entropia para concordar com o propósito.

Quanto mais distintos e diferenciados forem os escores, ou seja, quanto maior for o contraste de intensidade entre os valores do *i-ésimo* atributo, maior é a soma da "informação decisória" contida nela e transmitida pelo atributo (ZELENY, 1982).

Seja $d_i = \left(d_i^1, d_i^2, \dots, d_i^m\right)$ os valores normalizados, onde: $d_i^k = \frac{x_i^k}{x_i^*}$, que caracteriza o conjunto D, em termos do *i-ésimo* atributo. Define-se $D_i = \sum_{k=1}^{m} d_i^k;\ i = 1,2, \dots, n$. A medida de entropia do contraste de intensidade para o *i-ésimo* atributo é calculado por $e(d_i) = -\alpha \sum_{k=1}^{m} \frac{d_i^k}{D_i} ln\left(\frac{d_i^k}{D_k}\right)$, onde $\alpha = \frac{1}{e_{max}} > 0$ e e_{max}=*ln*(m). Lembrando ainda que $0 \leq d_i^k \leq 1$ e $d_i^k \geq 0$. Caso todos os d_i^k forem iguais para um dado i, então $\frac{d_i^k}{D_i} = \frac{1}{n}$ e e(d_i) assume valor máximo, isto é, e_{max}=Ln(m). Ao se fixar $\alpha = \frac{1}{e_{max}}$, determina-se $0 \leq e(d_i) \leq 1$ para todos os d_i´s. Essa normalização é necessária para efeito comparativo. A entropia total de D é definida por: $E = \sum_{i=1}^{n} e(d_i)$.

Há duas observações a serem feitas, a primeira é a de que quanto maior for e(d_i), menor é a informação transmitida pelo *i-ésimo* atributo e a segunda é o caso e(d_i)=e_{max}=ln(m), então o *i-ésimo* atributo não transmite informação e pode ser removida da análise decisória. Devido ao peso λ_i ser inversamente relacionado a e(d_i), usa-se 1-e(d_i) ao invés de e(d_i) e normaliza-se para assegurar que $0 \leq \lambda_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Assim: $\lambda_i = \frac{1}{n-E}[1 - e(d_i)] = \frac{[1-e(d_i)]}{n-E}$.

A entropia associada a cada lote de indicadores é dado por:

e(liquidez)=0,8681069
e(endividamento)=0,960037
e(rentabilidade)=0,969933
e(atividade)=0,916057

A soma da entropias é dada por E=3,656717. Aplicando a fórmula $\lambda_i = \frac{[1-e(d_i)]}{n-E}$, tem-se o valor dos pesos da informação:

$$\lambda_1 = 0{,}55147\ \lambda_2 = 0{,}116415\ \lambda_3 = 0{,}087587\ \lambda_4 = 0{,}244529$$

Chega-se ao modelo ponderado:

$$\max Z = 0{,}55147v_1 + 0{,}116415v_2 + 0{,}087587v_3 + 0{,}244529v_4$$
s.a:
$$0{,}11x_1 + 0{,}11x_2 + 0{,}06x_3 + 0{,}21x_5 + 0{,}06x_6 + x_7 + 0{,}95x_8 + 0{,}04x_9 + 0{,}08x_{10} + 0{,}07x_{11} + 0{,}10x_{12} - v_1 \geq 0$$
$$0{,}06x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}07x_3 + 0{,}22x_5 + 0{,}10x_6 + x_7 + 0{,}86x_8 + 0{,}37x_9 + 0{,}20x_{10} + 0{,}16x_{11} + 0{,}19x_{12} - v_1 \geq 0$$
$$0{,}07x_3 + 0{,}01x_4 + 0{,}19x_5 + 0{,}07x_6 + x_7 + 0{,}63x_8 + 0{,}36x_9 + 0{,}07x_{10} + 0{,}05 + 0{,}13x_{12} - v_1 \geq 0$$
$$0{,}91x_1 + 0{,}91x_2 + 0{,}83x_4 + 0{,}99x_5 + 0{,}87x_6 + x_7 + 0{,}99x_8 + 0{,}69x_9 + 0{,}95x_{10} + 0{,}94x_{11} + 0{,}01x_{12} - v_2 \geq 0$$
$$0{,}93x_1 + 0{,}91x_2 + 0{,}94x_4 + 0{,}96x_5 + 0{,}98x_6 + x_7 + 1x_8 + 0{,}82x_9 + 0{,}96x_{10} + 0{,}96x_{11} + 0{,}97x_{12} - v_2 \geq 0$$
$$040x_2 + 0{,}55x_3 + 0{,}34x_4 + 0{,}23x_5 + 0{,}56x_6 + 0{,}21x_7 + 0{,}31x_8 + 1x_9 + 0{,}76x_{10} + 0{,}73x_{11} + 0{,}68x_{12} - v_2 \geq 0$$
$$0{,}55x_1 + 0{,}57x_2 + 0{,}66x_4 + 0{,}74x_5 + x_6 + 0{,}96x_7 + 0{,}91x_8 + 0{,}60x_9 + 0{,}74x_{10} + 0{,}73x_{11} + 0{,}57x_{12} - v_3 \geq 0$$
$$0{,}56x_1 + 0{,}54x_2 + 0{,}73x_4 + 0{,}87x_5 + 0{,}83x_6 + x_7 + 0{,}94x_8 + 0{,}69x_9 + 0{,}82x_{10} + 0{,}80x_{11} + 0{,}67x_{12} - v_3 \geq 0$$
$$0{,}96x_1 + 0{,}95x_2 + 0{,}98x_4 + x_5 + 0{,}99x_6 + x_7 + x_8 + 0{,}97x_9 + 0{,}99x_{10} + 0{,}99x_{11} + 0{,}98x_{12} - v_3 \geq 0$$
$$0{,}52x_1 + 0{,}77x_2 + 0{,}84x_3 + x_4 + 0{,}78x_5 + 0{,}69x_7 + 0{,}41x_8 + 0{,}60x_9 + 0{,}64x_{10} + 0{,}64x_{11} + 0{,}57x_{12} - v_4 \geq 0$$
$$x_1 + 0{,}38x_3 + 0{,}24x_4 + 0{,}15x_5 + 0{,}04x_6 + 0{,}03x_7 + 0{,}01x_8 + 0{,}29x_9 + 0{,}11x_{10} + 0{,}11x_{11} + 0{,}36x_{12} - v_4 \geq 0$$
$$0{,}59x_1 + 0{,}42x_2 + 0{,}57x_3 + x_4 + 0{,}80x_6 + 0{,}07x_7 + 0{,}18x_8 + 0{,}63x_9 + 0{,}70x_{10} + 0{,}70x_{11} + 0{,}50x_{12} - v_4 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 1$$
$$x_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, 12)$$

O *ranking* formado pelo modelo, sem o uso do valor da informação considerando os dados de 2012 como exemplo, levou ao seguinte posicionamento contábil das empresas investigadas.

Quadro 2 – Resultados de 2012 referentes a aplicação do modelo (pesos idênticos)

Posição	Empresa	Variável	Z*	Estratégia
1ª	Tekno	$x_7 = 1$	2,19	Pura
2ª	Siderúrgica Nacional	$x_9 = 0{,}502$	2,05	Mista
3ª	Ferbasa	$x_8 = 1$	1,86	Pura
4ª	Usiminas	$x_{12} = 1$	1,70	Pura
5ª	Gerdau	$x_{10} = 1$	1,67	Pura
6ª	Gerdau Met	$x_{11} = 0{,}689$	1,63	Mista
7ª	Paranapanema	$x_1 = 0{,}398$	1,50	Mista
8ª	Aliperti	$x_6 = 0{,}941$	1,49	Mista
9ª	Panatlântica	$x_5 = 0{,}831$	1,30	Mista
10ª	Duque	$x_4 = 1$	1,23	Pura
11ª	Fibam	$x_2 = 0{,}522$	0,97	Mista
12ª	Mangels	$x_3 = 1$	-	-

Fonte: Dados da pesquisa.

Da mesma forma foram determinados os posicionamentos para os anos de 2009, 2010, 2011 e 2013. Desta forma apresenta-se abaixo os *rankings* do período analisado.

Quadro 3 – Resultados gerais referentes a aplicação do modelo (pesos idênticos)

Posição	2009	2010	2011	2012	2013
1ª	Sid. Nacional	Sid. Nacional	Tekno	Tekno	Tekno
2ª	Gerdau Met	Tekno	Ferbasa	Sid. Nacional	Paranapanema
3ª	Gerdau	Usiminas	Paranapanema	Ferbasa	Usiminas
4ª	Usiminas	Gerdau Met	Panatlântica	Usiminas	Ferbasa
5ª	Tekno	Ferbasa	Gerdau	Gerdau	Panatlântica
6ª	Mangels	Gerdau	Gerdau Met	Gerdau Met	Gerdau
7ª	Fibam	Mangels	Usiminas	Paranapanema	Mangels
8ª	Ferbasa	Duque	Aliperti	Aliperti	Aliperti
9ª	Paranapanema	Panatlântica	Duque	Panatlântica	Sid. Nacional
10ª	Panatlântica	Aliperti	Sid. Nacional	Duque	Gerdau Met
11ª	Duque	Fibam	Fibam	Fibam	Fibam
12ª	Aliperti	Paranapanema	Mangels	Mangels	-

Fonte: Dados da pesquisa.

O mesmo modelo, com a inclusão do valor da informação, gerou o *ranking* (R_2), apresentado a seguir. O Quadro 4 apresenta somente o posicionamento referente ao ano de 2012 para exemplificar.

Quadro 4 – Resultados de 2012 referentes a aplicação do modelo (com uso do valor da informação)

Posição	Empresa	Variável	Z^*	Estratégia
1ª	Tekno	$x_7 = 1$	0,67	Pura
2ª	Ferbasa	$x_8 = 1$	0,47	Pura
3ª	Sid. Nacional	$x_9 = 0{,}526$	0,30	Mista
4ª	Usiminas	$x_{12} = 0{,}738$	0,29	Mista
5ª	Paranapanema	$x_1 = 0{,}534$	0,26	Mista
6ª	Panatlântica	$x_5 = 0{,}791$	0,23	Mista
7ª	Gerdau	$x_{10} = 1$	0,22	Pura
8ª	Gerdau Met	$x_{11} = 1$	0,20	Pura
9ª	Aliperti	$x_6 = 0{,}637$	0,18	Mista
10ª	Mangels	$x_3 = 0{,}470$	0,17	Mista
11ª	Duque	$x_4 = 1$	0,15	Pura
12ª	Fibam	$x_2 = 1$	-	-

Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida apresenta-se o quadro completo, ou seja, a análise realizada para todo o período.

Quadro 5 – Resultados gerais referentes a aplicação do modelo (com uso do valor da informação)

Posição	2009	2010	2011	2012	2013
1ª	Tekno	Tekno	Tekno	Tekno	Tekno
2ª	Ferbasa	Ferbasa	Ferbasa	Ferbasa	Ferbasa
3ª	Sid. Nacional	Panatlântica	Paranapanema	Sid. Nacional	Paranapanema
4ª	Gerdau	Usiminas	Panatlântica	Usiminas	Usiminas
5ª	Gerdau Met	Paranapanema	Usiminas	Paranapanema	Panatlântica
6ª	Fibam	Aliperi	Gerdau	Panatlântica	Gerdau
7ª	Paranapanema	Gerdau	Aliperti	Gerdau	Mangels
8ª	Usiminas	Gerdau Met	Gerdau Met	Gerdau Met	Sid. Nacional
9ª	Panatlântica	Fibam	Sid. Nacional	Aliperti	Aliperti
10ª	Aliperti	Sid. Nacional	Duque	Mangels	Gerdau Met
11ª	Duque	Duque	Fibam	Duque	Fibam
12ª	Mangels	Mangels	Mangels	Fibam	-

Fonte: Dados da pesquisa.

Analisando os Quadros 3 e 5, é possível verificar modificações no *ranking* de posicionamento das empresas, contudo, é normal que essas modificações ocorram considerando a alteração dos indicadores no período. Destaca-se a oscilação na posição da maioria das empresas pesquisadas e também, a posição da empresa Tekno, primeira classificada em todo o período analisado pelo modelo 1 com utilização do valor da informação.

5. Conclusão

A classificação das empresas por meio de indicadores econômico-financeiros pode sem dúvida ser elaborada por estudiosos da contabilidade, que por meio de seus métodos e técnicas levam a *rankings* semelhantes aos obtidos pela presente pesquisa. Entretanto, o incremento da cesta de indicadores, da amplicação do horizonte temporal e inclusão de mais empresas no conjunto em investigação fará com que o nível de dificuldade aumente em forma diretamente proporcional, inviabilizando a análise frente as limitações do raciocínio humano dada a complexidade do cenário em estudo. Daí a importância da elaboração de uma metodologia (conjunto de métodos) de auxílio à decisão.

Diante dos resultados desta pesquisa pode-se afirmar que o objetivo foi alcançado destacando-se de modo geral a empresa Tekno.

Destaca-se o fato do trabalho ser fortemente inspirado nos trabalhos de Milan Zeleny e por esta pesquisa atestar a possibilidade do uso da programação linear como ferramenta de classificação, em especial em cenários multicriteriais.

Referências

Bilbao, J. M.; Fernández, F. R. (2002). *Abstracts of the fifth spanish meeting on game theory and applications*. Universidad de Sevilla.

Dimand, M. A; Dimand, R. W. (1996). *The history of game theory, Volume I*: from the beginnings to 1945. London: Routledge.

Fernández, F. R.; Monroy, L. (2009). Multi-criteria simple games. *In:* V. Barichard et. al. Multiobjective programming and goal programming: theoretical results and practical applications. Berlin Heidelberg: Spring-Verlag.

Ghose, D. B. (1991). A necessary and sufficient condition for Pareto-optimal security strategies in multicriteria matrix games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, n. 68, p. 463-480.

Ghose, D. B.; Prasad, U. R. (1989). Solution concepts in two-person multicriteria games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 63, n. 2, p. 167-189.

Nishizaki, I.; Sakawa, M. (2001). *Fuzzy and multiobjective games for conflict resolution.* New York: Physica-Verlag.

Richardson, R. J. (1989) *Pesquisa social: métodos e técnicas*. 2. ed. São Paulo: Atlas.

Silveira, A. (Coord.). *Roteiro básico para apresentação e editoração de teses, dissertações e monografias.* 2. ed. rev., atual e ampl. Blumenau: Edifurb, 2004.

Zeleny, M. (1982). *Multiple criteria decision making*. New Yor: McGraw-Hill.

Zeleny, M. (1976). Games with multiple payoffs. *International Journal of Game Theory*, v. 4, n. 4, p. 179-191.