

LINEARIZAÇÃO DO PROCESSO DE COMPARAÇÃO E ANÁLISE DE CONSISTÊNCIA EM MATRIZES DE COMPARAÇÃO PAR A PAR

Giancarlo Ribeiro Vasconcelos

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária, 50670-901- Recife – PE
professorgnove@gmail.com

Caroline Maria de Miranda Mota

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária, 50670-901- Recife – PE
mota.cmm@gmail.com

RESUMO

A inconsistência das matrizes de comparação par a par causada pela exaustão de decisores que constantemente realizam centenas de comparações pode levar a desvios nos resultados obtidos. A linearização do processo de comparação torna a matriz de comparação par a par consistente do ponto de vista matemático, no entanto uma análise de consistência deve ser feita para verificar se a mesma reflete as preferências do decisor. Neste artigo será realizada uma revisão bibliográfica demonstrando a grande importância dada pelos pesquisadores a análise de consistência de matrizes de comparação par a par, também apresentaremos um algoritmo de avaliação da consistência baseado na escala fundamental de Saaty. O algoritmo propõe um processo interativo entre analista e decisor que conduz a matriz de comparação a se aproximar das preferências do decisor.

PALAVRAS CHAVE: Decisão Multicritério, análise de consistência, comparação par a par.

ABSTRACT

The inconsistency of the pairwise comparison matrices caused by exhaust decision makers to constantly carry hundreds of comparisons can lead to deviations in results. The linearization of the comparison process makes the pairwise comparison matrix consistent from a mathematical point of view, however a consistency analysis should be made to verify that it reflects the preferences of the decision maker. In this paper, we performed a literature review demonstrating the great importance given by researchers to analyze the pairwise comparison matrices consistency, also present an consistency evaluation algorithm based on the fundamental scale of Saaty. The algorithm proposes an interactive process between analyst and decision makers that conduct the comparison matrix to approach the preferences of the decision maker.

KEYWORDS: Multicriteria Decision, consistency analysis, pairwise comparison.

1. Introdução

Métodos de apoio a decisão multicritério (MCDA) tem sido aplicados em problemas complexos nas mais diversas áreas para ajudar na tomada de decisões importantes em grandes empresas (Roy, 2010; Keeney, 2004; Entani e Sugihara, 2012). Estes métodos consideram vários critérios e incorporam as preferências do decisor, algumas vezes de forma muito subjetiva, o que vem sendo um dos grandes desafios dos analistas de decisão (Entani e Sugihara, 2012). Neste sentido, a aplicação dos métodos MCDA vem recebendo muitas críticas quanto a maneira que as preferências do decisor é representada e quanto ao grande tempo gasto para realizar as interações com o mesmo (Roy, 2010).

Muitos métodos de apoio a decisão multicritério (MCDA) usam a comparação par a par para avaliar os critérios e as alternativas. Um dos mais conhecidos métodos é o AHP - *Analytic Hierarchy Process* (Saaty, 1977, 1990).

Um dos grandes motivos da inconsistência em matrizes de comparação par a par e a grande quantidade de comparações que o decisor deve realizar, este procedimento oneroso e exaustivo leva a problemas nas avaliações (Karelaia e Hogarth, 2008; Vasconcelos e Mota, 2014).

Um resultado conhecido das experiências e decisões da vida real, e a maior causa de inconsistências nas matrizes de comparação é o fato que, às vezes, os decisores têm preferências intransitivas, ou seja: dadas três alternativas possíveis A, B e C, A é preferível a B, B é preferível a C, mas C é preferível a A (Linares, 2009).

Ultimamente alguns pesquisadores buscam resolver o problema de inconsistência da matriz de comparação (Brunelli, Canal, e Fedrizzi, 2013), porem poucas pesquisas buscam resolver o problema em sua origem, ou seja, nas avaliações par a par, todos propõe métodos que gerem uma matriz consistente a partir de uma matriz inconsistente.

2. Consistência de matrizes de comparação

Esta seção apresenta propostas de outros autores que trabalham com a análise de consistência e procuram soluções para o problema, especialmente com matrizes de comparação par a par. Em sua grande maioria as pesquisas que vem sendo realizadas sobre o tema se preocupam com a obtenção de matrizes de comparação consistentes a partir de matrizes inconsistentes. Essa prática gera a necessidade da realização de cálculos para verificação da consistência. Só apos a comprovação da inconsistência é que se aplica um método para elimina-la. Muitas vezes estes cálculos são redundantes (Brunelli, Canal, et al., 2013).

O estudo de relações recíprocas vem sendo muito importantes na avaliação da consistência de matrizes de comparação. Os conceitos de relação recíproca incompleta, relação recíproca incompleta aditiva e relação recíproca incompleta multiplicativa são definidos por Xu (2004), que propôs dois modelos de programação objetiva, com base na relação recíproca incompleta aditiva consistente e na relação recíproca incompleta multiplicativa consistente, respectivamente, para a obtenção do vetor de prioridade de relação recíproca incompleta.

Uma técnica de linearização que retorna a matriz consistente mais próxima de uma matriz inconsistente usando uma projeção ortogonal de um espaço linear foi proposta por Benítez, Delgado-Galván, Gutiérrez, e Izquierdo (2011). Os autores propõem uma estrutura que permite um equilíbrio entre a consistência e a preferência do decisor, focando especificamente em um processo de linearização para agilizar o trade-off entre a confiabilidade e a consistência. Um algoritmo é projetado para ser facilmente integrado em um sistema de apoio à decisão. Este algoritmo segue um processo iterativo de realimentação que alcança um nível aceitável de consistência, com respeito a algumas das preferências do decisor (Benítez, Delgado-Galván, Izquierdo, e Pérez-García, 2012). Com base nos resultados, os autores continuaram suas pesquisas e propuzeram um método para atingir a consistência após a comparação par a par. Através de otimização a matriz de comparação é aproximada à matriz consistente mais próxima. Este método tem a vantagem de depender apenas das variáveis de decisão, sendo menos dispendioso do que outros métodos de otimização e pode ser facilmente implementado em quase todo o ambiente computacional (Benítez, Izquierdo, Pérez-García, e Ramos-Martínez, 2014).

Xia e Xu (2014) propõem métodos para derivar vetores intervalares de pesos de relações recíprocas para refletir a inconsistência quando os decisores fornecem preferências sobre

alternativas (ou critérios). Os autores apresentam modelos de programação para minimizar a inconsistência com base na consistência multiplicativa e aditiva, respectivamente.

Embora esse método realize um procedimento parecido com o proposto neste trabalho, a principal diferença da nossa proposta é o fato de nosso algoritmo ser adaptado a linearização do processo de comparação, que automaticamente gera uma matriz consistente. Nosso algoritmo não busca a inconsistência matemática na matriz recíproca, mas sim inconcistências da matriz em relação às preferências reais do decisor.

A teoria dos números fuzzy tem sido aplicada a métodos MCDA para interpretar melhor o julgamento dos decisores. O AHP é um método no qual números fuzzy podem ser utilizados, e também neste caso, a avaliação da consistência é objetivo de investigação. Um índice de inconsistência de matrizes de comparação par a par com entradas fuzzy que utiliza a distância Chebyshev foi apresentado por Ramík e Korviny, 2010. No entanto, Brunelli, 2011, mostra que a distância Chebyshev pode falhar para capturar inconsistência e deve, portanto, ser convenientemente substituída por alguma outra métrica. FAHP é um modelo AHP fuzzy genérico com controle de consistência da matriz de decisão para decisão em grupo (GF-AHP). O GF-AHP melhora o desempenho usando entradas numéricas diretas sem consultar o decisor. Na prática, alguns dos critérios podem ser facilmente calculados e a consulta ao decisor torna-se redundante (Bulut, Duru, Keçeci, e Yoshida, 2012).

Liu, Zhang, e Zhang, 2014, relatam que o estudo da consistência é muito importante para evitar recomendações erradas e, propõe uma definição de relações recíprocas de preferência com números fuzzy triangulares que podem ser usadas para verificar as matrizes fuzzy de comparação.

O método autovetor (EM) foi estendido para priorizar e definir a consistência multiplicativa para uma relação de priorização fuzzy incompleta (Y. Xu e Wang, 2013). Os autores apresentam uma abordagem para avaliar se essa relação é aceitável ou não, e desenvolvem uma razão de consistência para uma razão de priorização incompleta fuzzy semelhante a proposta por Saaty.

3. Linearização do processo de comparação

Procedimentos de comparação par a par usam a capacidade humana de utilizar seu conhecimento e sua experiência para comparar alternativas e/ou critérios e montar as matrizes de comparação (Toma e Asharif, 2003). A inconsistência surge quando algumas opiniões da matriz de comparação se contradizem com outras. É importante verificar a consistência das opiniões efetuando uma série de cálculos para se chegar ao valor da razão de consistência (RC), que indica a consistência ou não da matriz de comparação. Do ponto de vista do AHP, é desejável que a RC de qualquer matriz de comparação seja menor ou igual a 0,10. Uma matriz de comparação com RC igual a zero é o diagnóstico de um decisor totalmente consistente, essa matriz é chamada de matriz recíproca ou matriz consistente (Golany e M. Kress, 1993).

Tabela 1 - Matriz preenchida pelo procedimento de linearização do processo de comparação

	A1	A2	A3	...	An
A1	$I_{A1/A1}$	$I_{A1/A2}$	$I_{A1/A3}$...	$I_{A1/An}$
A2	$\frac{I_{A1/A1}}{I_{A1/A2}}$	$I_{A2/A2}$	$\frac{I_{A1/A3}}{I_{A1/A2}}$...	$\frac{I_{A1/An}}{I_{A1/A2}}$
A3	$\frac{I_{A1/A1}}{I_{A1/A3}}$	$\frac{I_{A1/A2}}{I_{A1/A3}}$	$I_{A3/A3}$...	$\frac{I_{A1/An}}{I_{A1/A3}}$
...
An	$\frac{I_{A1/A1}}{I_{A1/An}}$	$\frac{I_{A1/A2}}{I_{A1/An}}$	$\frac{I_{A1/A3}}{I_{A1/An}}$...	$I_{An/An}$

A linearização do processo de comparação exige que decisor apenas realize as comparações de uma das linhas da matriz de comparação, os demais valores são preenchidos normalmente obedecendo aos pressupostos matemáticos de uma matriz recíproca. A matriz de comparação resultante será consistente e baseada nas comparações que o decisor fez. A Tabela 1 apresenta a

matriz preenchida pelo procedimento de linearização do processo de comparação quando o decisor, neste exemplo específico, realiza apenas as comparações da primeira linha da matriz.

A princípio a escolha da linha na qual o decisor irá realizar as comparações poderia ser aleatória, porém, para o algoritmo de análise de consistência que iremos apresentar, é importante que a decisor sempre faça as comparações da linha em que encontra-se a melhor alternativa a luz do critério em questão.

Para provar que a matriz de comparações satisfaz o critério de consistência e reciprocidade, $I_{i,j} = I_{i,k} \times I_{k,j} = \frac{I_{k,j}}{I_{k,i}}$, realiza-se o seguinte teste.

$$I_{2,1} = \frac{I_{A1/A1}}{I_{A1/A2}} \text{ e } I_{1,3} = I_{A1/A3} \cdot \text{Logo } I_{2,3} = I_{2,1} \times I_{1,3} = \frac{I_{A1/A1}}{I_{A1/A2}} \times I_{A1/A3}$$

$$\text{Como } I_{A1/A1} = 1 \rightarrow I_{2,3} = \frac{I_{A1/A3}}{I_{A1/A2}}$$

Um dos grandes problemas do método de comparação par a par tradicional, de ordem de aplicabilidade, se encontra no uso do procedimento em situações em que o número de critérios e alternativas é muito grande (Millet e Harker, 1990). Em situações como essas a quantidade de comparações par a par feita pelo decisor cresce assustadoramente. O tempo em que analistas de decisão passam com os decisores é cada vez mais escasso e convencer um alto executivo a dispendar horas, quem sabe dias, fazendo comparações par a par, de alternativas e critérios, pode ser inviável.

A linearização do processo de comparação reduz sensivelmente o número de comparações realizadas pelo decisor. Consideremos um problema com sete critérios e oito alternativas. Utilizando procedimento de comparação tradicional o decisor realizará 217 comparações, enquanto utilizando a processo de linearização da matriz de comparação o número de comparações reduz para 55 (Vasconcelos e Mota, 2014). É grande a redução do esforço do decisor quando se utiliza a linearização da matriz de comparação, o que pode refletir numa avaliação mais cuidadosa das comparações par a par. Por outro lado, um erro (ou grande imprecisão) na avaliação de comparação par a par inicial pode inserir distorções no processo de decisão.

4. Análise de consistência do julgamento do decisor

Toda a pesquisa relacionada com a consistência das matrizes de comparação ocorre porque não é possível assegurar que o juízo de valor do decisor é consistente, quando ele faz a comparação par a par das alternativas e critérios.

Mesmo quando o decisor está preocupado com apenas uma linha de uma matriz de comparação, como sugerido pela linearização do processo de comparação, o decisor ainda pode ser inconsistente. Uma análise da consistência de cada matriz de comparação pode ser realizada para tentar evitar desvios na recomendação final. Uma maneira de realizar essa análise de consistência junto ao decisor é proposta a seguir.

A análise de consistência é baseada em perguntas feitas ao decisor que envolvem a comparação entre duas alternativas ou critérios. Estas duas alternativas ou critérios devem ser escolhidas de acordo com quatro regras:

- Índices de comparação da diagonal principal não devem ser escolhidos, tendo em vista que todos eles têm o valor 1.
- Índices de comparação da primeira linha e primeira coluna da matriz de comparação não podem ser escolhidos porque a primeira linha foi preenchida diretamente pelo decisor quando o mesmo fez a de comparação par a par e a primeira coluna é um resultado direto desta comparação.
- Escolha quantos índices de comparação forem necessários de modo a que todas as alternativas sejam usadas na avaliação
- Escolha índices de comparação maiores que zero.

A terceira regra apresentada foi introduzida para assegurar que um número mínimo de avaliações sejam feitas, uma vez que só assim haverá uma boa análise de consistência. No entanto, assegurar a consistência completa só seria possível se todos os índices de comparação fossem

avaliados. No entanto a avaliação de todos os índices de comparação tornaria o processo muito dispendioso, perdendo-se a vantagem de reduzir o número de comparações par a par.

Do ponto de vista metodológico, é interessante saber quantas avaliações devem ser realizadas. Há duas situações possíveis.

- Uma matriz de comparação com um número par de n alternativas ou critérios: Uma vez que as avaliações com índices de comparação da primeira linha e da primeira coluna não será realizada, haverá um número ímpar de elementos a avaliar. Como não é possível formar pares com um número ímpar de elementos sem repetir algum deles, seriam necessárias $n/2 + 1$ avaliações.
- Uma matriz de comparação com o número ímpar de n alternativas ou critérios: Novamente, como as avaliações com índices de comparação da primeira linha e da primeira coluna não será realizada, haverá um número par de elementos a avaliar. Por conseguinte, seriam necessárias $n/2$ avaliações.

Em um primeiro momento a análise de consistência pode parecer dispendiosa e a realização das avaliações parece ser tão onerosa quanto o processo de comparação tradicional, porem mostraremos que isto não é verdade. A solução do problema com 8 critérios e 8 alternativas usando linearização do processo de comparação usaria 99 avaliações, 63 comparações par a par e 36 avaliações de consistência, enquanto que no procedimento usando o processo de comparação tradicional, haveria 252 comparações par a par.

Tabela 2 - Proposta de padrão perguntas para avaliar a consistência

	Pergunta
$1 \leq I_{i,j} \leq 1,5$	Considerando o critério C_k , as alternativas A_i e A_j contribuem igualmente para o objetivo?
$1,5 < I_{i,j} \leq 2,5$	O decisor deve ficar indeciso entre qual das perguntas adjacentes tem a resposta positiva.
$2,5 < I_{i,j} \leq 3,5$	Considerando o critério C_k , a experiência e o julgamento favorecem levemente a alternativa A_i em relação a alternativas A_j ?
$3,5 < I_{i,j} \leq 4,5$	O decisor deve ficar indeciso entre qual das perguntas adjacentes tem a resposta positiva.
$4,5 < I_{i,j} \leq 5,5$	Considerando o critério C_k , a experiência e o julgamento favorecem fortemente a alternativa A_i em relação a alternativas A_j ?
$5,5 < I_{i,j} \leq 6,5$	O decisor deve ficar indeciso entre qual das perguntas adjacentes tem a resposta positiva.
$6,5 < I_{i,j} \leq 7,5$	Considerando o critério C_k , a alternativa A_i é muito fortemente favorecida em relação a alternativas A_j , sua dominação de importância é demonstrada na prática?
$7,5 < I_{i,j} \leq 8,5$	O decisor deve ficar indeciso entre qual das perguntas adjacentes tem a resposta positiva.
$8,5 < I_{i,j} \leq 9$	Considerando o critério C_k , a evidência favorece a alternativa A_i em relação a alternativas A_j com o mais alto grau de certeza?

Considerando que as comparações feitas pelo decisor são baseadas na interpretação da escala fundamental de Saaty, a análise de consistência também será baseada nesta escala. Um conjunto padrão de perguntas com base na escala fundamental de Saaty é proposta na Tabela 2. As questões são apresentadas apenas para os índices de comparação maiores do que zero. A quarta regra apresentada anteriormente existe para isso, e tem como objetivo fazer a análise de consistência mais simples.

Anteriormente, informamos que o decisor deve sempre fazer as comparações na linha do critério mais importante ou da melhor alternativa. Isto é importante para assegurar que índices $I_{i,j}$ nunca serão maiores que 9, nunca extrapolando a escala fundamental de Saaty e, conseqüentemente, os índices de comparação da Tabela 2.

O procedimento é simples. No entanto, é importante que um analista acompanhe o decisor na análise. Veja o seguinte exemplo de aplicação das perguntas. Considere $I_{i,j} = 5$, o analista deve fazer a seguinte pergunta ao decisor: Considerando o critério C_k , a experiência e o julgamento favorecem fortemente a alternativa A_i em relação a alternativas A_j ?

4.1. Algoritmo da análise de consistência

O analista pode fazer quantas perguntas considerar necessário para avaliar a consistência, no entanto, é importante formalizar todo o processo, para tanto criamos um algoritmo padrão que estrutura todas as etapas da análise. O algoritmo é descrito por seis etapas apresentadas a seguir.

Etapa 1. Identificar e ordenar os índices de comparação que serão avaliados: Seja n o número de alternativas. Uma regra que pode ser usada para identificar os índices de comparação é a seguinte:

- O primeiro índice de comparação a ser avaliado é sempre o índice $I_{i,j}$ maior que zero que compara as alternativas A_2 e A_3 , será $I_{2,3}$ ou $I_{3,2}$.
- O segundo índice de comparação a ser avaliado é sempre o índice $I_{i,j}$ maior que zero que compara as alternativas A_4 e A_5 .

Repete-se esse procedimento até a n -ésima alternativa. Caso n for positivo o último índice de comparação representará necessariamente a comparação entre A_{n-1} e A_n , mesmo A_{n-1} já tendo sido avaliado anteriormente. (Tabela 3)

Etapa 2. Laço de repetição: Após a ordenação dos índices de comparação que serão avaliados iniciasse o processo de avaliação de forma ordenada até o último índice de comparação ser avaliado, quando se encerra o procedimento.

Etapa 3. Verificação do intervalo: O início da avaliação ocorre verificando a qual intervalo da Tabela 2 está o índice de comparação que será avaliado.

Etapa 4. Pergunta: Faz a pergunta ao decisor conforme Tabela 2.

- Se a resposta for positiva volta-se a etapa 2 para iniciar a próxima avaliação.
- Se a resposta for negativa segue para etapa 5.

Etapa 5. Reavaliação dos índices de primeira linha: o decisor deve reavaliar os índices $I_{1,j}$ e $I_{i,1}$, e a matriz de comparação é atualizada.

Etapa 6. Verificar se houve mudança de intervalo: Verifica-se se $I_{i,j}$ mudou de intervalo conforme Tabela 2.

- Se não houve mudança de intervalo consideramos que foi dada ao decisor a oportunidade para reavaliar os índices de comparação da primeira linha e que apesar de sua resposta negativa na etapa 4 o mesmo não fez alterações suficientes para mudar o panorama da avaliação inicial. Retorna-se a etapa 2 para iniciar a avaliação do próximo índice de comparação.
- Se houve mudança de intervalo retorna-se para a etapa 3 para realizar uma nova avaliação do mesmo índice.

O nosso procedimento fornece um algoritmo mais simples e menos dispendioso de realizar a análise de consistência. Trata-se de um processo de *feedback* interativo entre o decisor e o analista que leva a um nível aceitável de consistência da matriz de comparação, representando mais fielmente as preferências do decisor. Tão importante quanto reduzir o esforço do decisor, o procedimento dá a possibilidade para o mesmo realizar comparações par a par com mais cuidado, alternando entre especificação e confirmação, refletindo as preferências do decisor.

Tabela 3 - Representação dos índices de comparação que serão avaliadas

(a)		(b)	
n ímpar		n par	
Alternativas	Índices de comparação avaliados	Alternativas	Índices de comparação avaliados
A_2	$I_{2,3}$ ou $I_{3,2}$	A_2	$I_{2,3}$ ou $I_{3,2}$
A_3		A_3	
A_{n-3}	$I_{n-3,n-2}$ ou $I_{n-2,n-3}$	A_{n-2}	$I_{n-2,n-1}$ ou $I_{n-1,n-2}$
A_{n-2}		A_{n-1}	
A_{n-1}	$I_{n-1,n}$ ou $I_{n,n-1}$	A_{n-1}	$I_{n-1,n}$ ou $I_{n,n-1}$
A_n		A_n	

5. Conclusão

A linearização do processo de comparação reduz o esforço que o decisor precisa fazer para conduzir comparação entre as alternativas, embora também possa ser utilizada na comparação par a par de critérios, dando suporte para qualquer método de decisão multicritério baseado em comparação de alternativas e/ou critérios.

A redução significativa do esforço exigido do decisor é baseada na construção de uma matriz de comparação recíproca, o que significa fazer avaliações totalmente consistentes.

A questão mais importante diz respeito a mensuração de desvios que podem acontecer quando as inconsistências são permitidas. A simulação realizada em Vasconcelos e Mota (2014) mostra evidências claras de que quando é permitido inconsistências nas matrizes de comparação podemos nos desviar dos resultados que seriam obtidos quando temos avaliações matematicamente consistentes.

O ponto chave nessa discussão é verificar a consistência do resultado da avaliação, ou seja, verificar junto ao decisor se o vetor de prioridades reflete seu julgamento. Se a resposta for negativa, a reavaliação deve ser feita. Atualmente, essa reavaliação já é prevista em praticamente todos os métodos MCDA. No entanto, depois de realizar todo processo de comparação par a par tradicional para muitas alternativas o esforço extra do decisor para realizar uma reavaliação de todo procedimento seria muito grande, e dificilmente os resultados esperados seriam alcançados.

Não há garantia de que os julgamentos de valor do decisor são consistentes, quando este faz uma comparação par a par de apenas uma linha de uma matriz de comparação, como sugerido pela linearização do processo de comparação. Uma análise da consistência de cada matriz de comparação deve ser realizada para evitar desvios que esta inconsistência causaria para a avaliação final. Uma maneira de realizar a análise de consistência diretamente com o decisor, que visa tornar o processo muito menos dispendioso, foi apresentado neste artigo. Um algoritmo foi criado e estruturado para facilitar a aplicação da análise de consistência.

Apesar da análise de consistência ainda estar longe de garantir a eficácia da linearização do processo de comparação este é um ponto de partida para uma série de outros estudos que têm, em conjunto, este objetivo.

Referências Bibliográficas

Benítez, J., Delgado-Galván, X., Gutiérrez, J. a., e Izquierdo, J. (2011). Balancing consistency and expert judgment in AHP. *Mathematical and Computer Modelling*, 54(7-8), 1785–1790. doi:10.1016/j.mcm.2010.12.023.

Benítez, J., Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., e Pérez-García, R. (2012). Improving consistency in AHP decision-making processes. *Applied Mathematics and Computation*, 219(5), 2432–2441. doi:10.1016/j.amc.2012.08.079.

Benítez, J., Izquierdo, J., Pérez-García, R., e Ramos-Martínez, E. (2014). A simple formula to find the closest consistent matrix to a reciprocal matrix. *Applied Mathematical Modelling*, 38(15-16), 3968–3974. doi:10.1016/j.apm.2014.01.007.

Brunelli, M. (2011). A note on the article “Inconsistency of pair-wise comparison matrix with fuzzy elements based on geometric mean” [Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 1604–1613]. *Fuzzy Sets and Systems*, 176(1), 76–78. doi:10.1016/j.fss.2011.03.013.

Brunelli, M., Canal, L., e Fedrizzi, M. (2013). Inconsistency indices for pairwise comparison matrices: a numerical study. *Annals of Operations Research*, 211(1), 493–509. doi:10.1007/s10479-013-1329-0.

Brunelli, M., Critch, A., e Fedrizzi, M. (2013). A note on the proportionality between some consistency indices in the AHP. *Applied Mathematics and Computation*, 219(14), 7901–7906. doi:10.1016/j.amc.2013.01.036.

Bulut, E., Duru, O., Keçeci, T., e Yoshida, S. (2012). Use of consistency index, expert prioritization and direct numerical inputs for generic fuzzy-AHP modeling: A process model for

shipping asset management. *Expert Systems with Applications*, 39(2), 1911–1923. doi:10.1016/j.eswa.2011.08.056.

Entani, T., e Sugihara, K. (2012). Uncertainty index based interval assignment by Interval AHP. *European Journal of Operational Research*, 219(2), 379–385. doi:10.1016/j.ejor.2012.01.010.

Golany, B., e M. Kress. (1993). Theory and Methodology A multicriteria evaluation of methods for obtaining weights from ratio-scale matrices *. *European Journal of Operational Research*, 69, 210–220.

Karelaia, N., e Hogarth, R. M. (2008). Determinants of linear judgment: a meta-analysis of lens model studies. *Psychological Bulletin*, 134(3), 404–26. doi:10.1037/0033-2909.134.3.404.

Keeney, R. L. (2004). Making Better Decision Makers. *Decision Analysis*, 1(4), 193–204. doi:10.1287/deca.1040.0009.

Linares, P. (2009). Are inconsistent decisions better? An experiment with pairwise comparisons. *European Journal of Operational Research*, 193(2), 492–498. doi:10.1016/j.ejor.2007.11.030.

Liu, F., Zhang, W.-G., e Zhang, L.-H. (2014). Consistency analysis of triangular fuzzy reciprocal preference relations. *European Journal of Operational Research*, 235(3), 718–726. doi:10.1016/j.ejor.2013.10.039.

Millet, I e Harker, P. T., (1990), Globally effective questioning in the Analytic Hierarchy Process, *European Journal of Operational Research*, 48(1), pg.88-97.

Ramík, J., e Korviny, P. (2010). Inconsistency of pair-wise comparison matrix with fuzzy elements based on geometric mean. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(11), 1604–1613. doi:10.1016/j.fss.2009.10.011.

Roy, B. (2010). Robustness in operational research and decision aiding: A multi-faceted issue. *European Journal of Operational Research*, 200(3), 629–638. doi:10.1016/j.ejor.2008.12.036.

Saaty, T. (1977). A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology*, 281, 234–281. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022249677900335>.

Saaty, T. (1990). How to make a decision: the analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, 1(December), 19–43. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221790900571>.

Toma, T., e Asharif, M. R. (2003). AHP coefficients optimization technique based on GA. Department of Information Engineering of University of Ryukyus, Japão.

Vasconcelos, G., e Mota, C. (2014). Modelo multicritério de comparação par a par baseado no AHP: proposta de linearização do processo de comparação. In XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Salvador. Retrieved from <http://www.sbp2014.iltc.br/pdf/127396.pdf>.

Xia, M., e Xu, Z. (2014). Interval weight generation approaches for reciprocal relations. *Applied Mathematical Modelling*, 38(3), 828–838. doi:10.1016/j.apm.2013.07.018.

Xu, Z. S. (2004). Goal programming models for obtaining the priority vector of incomplete fuzzy preference relation. *International Journal of Approximate Reasoning*, 36(3), 261–270. doi:10.1016/j.ijar.2003.10.011.

Xu, Y., e Wang, H. (2013). Eigenvector method, consistency test and inconsistency repairing for an incomplete fuzzy preference relation. *Applied Mathematical Modelling*, 37(7), 5171–5183. doi:10.1016/j.apm.2012.10.008.