Proposta da incorporação do Problema da Barganha de Nash nos modelos DEA para realocação de recursos: uma abordagem no setor de energia.

Marco Aurélio Reis dos Santos - marco.santos@ufpr.br
Universidade Federal do Paraná - UFPR
Rua Dr. João Maximiniano, 426, CEP 86900-000 - Jandaia do Sul - PR
Fernando Augusto Silva Marins - fmarins@feg.unesp.br
Universidade Estadual Paulista - UNESP
Av. Ariberto Pereira da Cunha, 333 CEP:12516-410 –Guaratinguetá - SP
Aneirson Francisco da Silva - aneirson@yahoo.com.br
Universidade Estadual Paulista - UNESP
Av. Ariberto Pereira da Cunha, 333, CEP 12516-410 - Guaratinguetá - SP
Rodrigo Clemente Thom de Souzan - thom@ufpr.br
Universidade Federal do Paraná – UFPR
Rua Dr. João Maximiniano, 426, CEP 86900-000 - Jandaia do Sul - PR

RESUMO

Neste artigo, apresenta-se a formulação da DEA baseado no Jogo da Barganha de Nash para a situação onde DMUs podem negociar a melhoria de todos os seus níveis de *outputs* por meio do corte de gastos em unidades que trabalham em um nível de escala ineficiente para realocar tais recursos às demais DMUs. Para este trabalho, a potencialidade de aplicação do modelo desenvolvido foi explorada por meio da análise de dados de uma empresa do setor energético do Brasil. Observe-se que o nível de qualidade dos serviços oferecidos por esta empresa tem grande valor para a sua imagem. Os alvos obtidos com a aplicação do modelo proposto demonstraram coerência com a realidade da empresa analisada, mostrando o grande potencial do modelo em fornecer metas que proporcionem o aumento do faturamento ao mesmo tempo em que se reduz o número de peças entregues atrasadas ao cliente.

PALAVRAS CHAVES. Análise por Envoltória de Dados, Jogo da Barganha de Nash, Setor Energético.

ABTRACT

This paper presents the DEA model formulation based on the Nash Bargain Game for the situation where production units may negotiate the improvement of all levels of outputs by cutting spending units working at a level of scale inefficient to reallocate these resources to other DMUs. For this work, the model application potential developed here is explored through performance analysis using data from an energy company in Brazil, whose economic sector is on the rise in the country. Observe that the quality of the service level offered by this enterprise aggregates great value to your company image. Estimates for the targets obtained with the application of the model to be consistent with reality demonstrate the company studied, showing the great potential of the model provide targets that provide, for example, increased revenue while it reduces the number of parts produced delivered late as the date of contract delivery.

KEYWORDS. Data Envelopment Analysis. Nash Bargain Game. Energy Sector.

1. Introdução

Este artigo propõe um novo modelo DEA (*Data Envelopment Analysis*) para realocação de recursos, baseado no modelo da Barganha de Nash (NASH, 1950;1953). Este modelo pode ser aplicado para uma situação onde unidades produtivas representadas pelas DMUs (*Decision Making Units*) passam a competir por recursos (*inputs*), com a finalidade de melhorar os seus níveis de produção (*outputs*). Nesta situação, tais unidades podem, por meio de coalisões, negociar a melhoria de todos os seus níveis de *outputs* (tanto desejáveis como indesejáveis) por meio do corte de gastos em unidades que trabalham em um nível de escala ineficiente para realocar tais recursos às demais DMUs. Assim, à medida que as unidades recebem um aditivo de recursos para melhoria de seus níveis de produção (aumentando os *outputs* desejáveis e diminuindo os *inputs* indesejáveis), as unidades eficientes passam a fornecer suporte estratégico para as entidades ineficientes melhorarem a sua eficiência, aumentando também, consequentemente, para as DMUs ineficientes, os seus *outputs* desejáveis e diminuindo os *outputs* indesejáveis.

Segundo Cook e Seiford (2009), excelentes aplicações com a DEA (CHARNES, COOPER e RHODES, 1978) têm sido conduzidas com respeito à medida de desempenho nas mais diversas situações, como por exemplo, aplicações em indústria, hospitais, escolas, universidades, cadeia de suprimentos, restaurantes, bancos, etc. Liu *et al.* (2013) realizaram um levantamento interessante, enumerando artigos com aplicações do método DEA em várias áreas. Neste levantamento, em primeiro lugar estão as aplicações no setor bancário, com cerca de 320 aplicações, além destas há 271 na área de saúde, 258 no setor agrícola, 249 no setor de transportes, 184 no setor da educação, 156 no setor energético, e 146 no setor de manufatura, entre outros.

Para Cooper, Seiford e Tone (2000), um dos principais objetivos da aplicação do método DEA é a estimação de alvos (metas) para os *inputs* e *outputs*, por meio da projeção das DMUs ineficientes sobre uma fronteira de eficiência. Os alvos apontam quais os níveis de *outputs* e *inputs* são adequados para o desempenho eficiente de uma unidade produtiva.

Neste trabalho, a potencialidade de aplicação do novo modelo proposto foi explorada numa aplicação da análise de desempenho uma empresa do setor energético do Brasil, cujo segmento econômico está em ascensão no país. Tal cenário de crescimento na área de energia impulsiona as empresas prestadoras de serviços e produtos na realização de investimentos produtivos. Sendo assim, o nível de qualidade oferecido por uma empresa de grande porte é de grande valor para a sua imagem.

As estimativas para os alvos obtidos com a aplicação do modelo proposto demonstraram ser coerentes à realidade da empresa analisada, mostrando o grande potencial do modelo em fornecer metas que proporcionem, por exemplo, o aumento do faturamento ao mesmo tempo em que se reduz o número de peças produzidas entregue atrasadas conforme a data de entrega contratual.

Porém, devido a possível ocorrência da natureza conflitante entre os níveis de *outputs* (*trade-offs*), o modelo precisaria ser calibrado por meio de atribuições de pesos aos níveis de *outputs* adotando-se um modelo de Programação Linear (PL). Entretanto, nem sempre é possível garantir uma boa relação de compromisso entre os alvos alcançados, uma vez que os resultados ótimos de um modelo de PL são soluções básicas viáveis, ou seja, são pontos extremos de uma Região Viável. Para este caso, o argumento da utilização da função arbitragem de Nash (NASH, 1953) se torna conveniente para a obtenção de resultados mais equilibrados entre os alvos a serem estimados pelo modelo.

Abordagens que envolvem o Problema da Barganha de Nash e DEA não são novidades na literatura. Cita-se, por exemplo, recentemente o trabalho de Wang e Li (2014) que fizeram uso da abordagem inicialmente proposta por Wu *et al.* (2009) para avaliar o desempenho de dezoito fornecedores com a finalidade de selecioná-los; isto é, utilizaram a função arbitragem de Nash para obter uma classificação de eficiência Pareto Ótima por meio da negociação entre a classificação obtida pelo Modelo DEA-CCR e o Modelo de Eficiência Cruzada.

Este artigo está organizado como se segue: na Seção 2 apresenta-se o referencial teórico sobre o Jogo da Barganha de Nash; a Seção 3 trata da Análise por Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA); a Seção 4 descreve o modelo aqui proposto, denominado DEA-GAME na realocação de recursos; na Seção 5 descreve-se uma aplicação do modelo DEA GAME ao problema de uma empresa de energia; na Seção 6 estão as considerações finais e sugestões de continuidade da pesquisa seguidas das referências bibliográficas citadas no texto.

2. O Jogo da Barganha de Nash

O Modelo do Jogo da Barganha de Nash (1950; 1953) pode ser classificado como um Jogo Cooperativo que admite estratégias mistas. Ele trata uma situação de negociação ou barganha entre jogadores racionais que:

- Supostamente sem qualquer empatia entre si (ou de justiça ou de equidade), verbalizam as suas exigências mínimas de ganhos (*payoff*) no começo da negociação.

- Tentam maximizar seus ganhos buscando combiná-las as estratégias de forma conjunta até chegar a um acordo justo de ganhos, por ambas as partes, que seja pelo menos maior do que as exigências de *payoffs* expostas no começo do Jogo.

- Pressupõem que as negociações não continuarão infinitamente e que pelo menos há dois agentes que tenham a possibilidade de aumentar o seu estado de satisfação caso chegue a um acordo entre eles.

- Caso os agentes não cheguem a um acordo entre eles, as exigências mínimas de ganho no começo da negociação são mantidas, sendo o vetor de *payoffs* para estas exigências denominado ponto de desacordo (*breakdown point* ou *disagreement point*).

Formalizando-se matematicamente esta situação tem-se:

- Sejam n jogadores, associados ao conjunto $N = \{1, 2,..., n\}$, e um vetor de *payoffs* representando os pagamentos (ou as recompensas) de cada jogador, dado por (u_1, u_2,..., u_n), e definido como um elemento no espaço Euclidiano R^n.

- Seja um conjunto S definido como um subconjunto factível de *payoffs*, representando o conjunto finito de estratégias cooperativas para ambos os jogadores.

- Seja um ponto d, chamado de ponto de desacordo, um elemento pertencente ao conjunto factível de *payoffs* e um limitante inferior para conjunto de estratégias cooperativas S.

A formulação sugerida por Nash (1953) requer que o conjunto S seja convexo e compacto. Além disto, cada elemento do vetor *payoff* pertencente a S seja maior ou igual aos níveis de *payoffs* em que se encontram ambos os jogadores, antes de estabelecerem um acordo (a partir de um ponto de desacordo).

A solução proposta por Nash (1953), como resultado da negociação, é aquela encontrada pela função arbitragem $f(N, S, d)$:

$$f(N,S,d) = \underset{u\in S,u\geq d}{\mathrm{Max}} \prod_{i=1}^{n} (u_i - d_i), \tag{1}$$

sendo u o vetor de *payoffs*, d o vetor de pontos de desacordo, u_i o *payoff* associado ao Jogador i e d_i o ponto de desacordo do Jogador i.

A solução proposta por Nash satisfaz quatro axiomas: Ótimo de Pareto, Simetria, Independência e Invariância. Com a finalidade de ilustrar estes axiomas, eles estão dispostos a seguir:

- Ótimo de Pareto - Na solução encontrada, nenhum dos jogadores pode aumentar o seu nível de *payoff* sem que do seu adversário diminua, ou seja, ambos os jogadores já alcançaram o máximo de benefício sem prejudicar o outro. Isto significa encontrar uma solução de *payoffs* em S que sejam justas para ambos.

- Simetria - Não importa a ordem em que os jogadores aplicam os seus lances no processo de negociação ou barganha, pois mesmo que inverta a ordem dos fatores que representa a função de arbitragem de Nash, a solução encontrada deverá ser sempre uma solução equivalente à solução original.

- Independência das alternativas irrelevantes- Este axioma indica que a solução não deve ser influenciada pela escolha de alternativas irrelevantes no processo de negociação.

- Invariância por transformações lineares - $\forall(S, d)$, $a_i > 0$, $S' = \{s_i' \mid s_i' = a_i s_i + b_i, \forall i \in N\}$ e $d_i = a_i d_i + b_i$, $\forall i \in N \Rightarrow f(S', d') = a_i f(S,d) + b_i$, $\forall i \in N$. Tal axioma reflete a ideia de que a solução do Jogo da Barganha deve ser independente de qualquer escala de medida utilizada.

Ressalte-se que o último axioma torna interessante o argumento de utilização da função arbitragem de Nash em conjunto com modelos da DEA, uma vez que as projeções dos alvos no modelo DEA com Retorno Variável de Escala (*Variable Returns to Scale* - VRS) não podem ser influenciadas pelas unidades de escala de medida dos *inputs* e o*utputs* (BANKER, CHARNES, e COOPER, 1984). As demonstrações destes axiomas estão em Nash (1953, p.136).

3. Modelo DEA para realocação de recursos.

Neste tópico é apresentado o modelo DEA para a realocação de recursos. Para esta situação, considera-se que algumas DMUs ineficientes possam reduzir os seus *inputs* ao mesmo tempo em que possam aumentar os seus *outputs* desejáveis e reduzir outros *outputs* indesejáveis. Desta forma, eliminam-se os desperdícios e aumenta-se o grau de eficiência da DMU. Do mesmo modo, aloca-se todo montante das parcelas economizadas na redução dos *inputs* em DMUs consideradas, a princípio, ineficientes, para as demais DMUs. Com isto, as DMUs beneficiadas com os acréscimos nos níveis de *inputs* podem obter um resultado melhor, em termos de níveis de produção (*outputs*), do que se obteria, simplesmente, com a utilização dos níveis de recursos disponíveis antes da realocação.

Para este modelo DEA para a realocação de recursos considerou-se, simplesmente, que os *outputs* indesejáveis fossem tratados como *inputs*, conforme a orientação de Dyson *et al*. (2001):

$$\text{Max } z = \sum_{l=1}^{n}\left[\sum_{J}\left(w_{jl}^{+}\sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_{kl}\right) - \sum_{I \notin R}\left(w_{il}^{-}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_{kl}\right)\right] \quad (2)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_{kl} \geq d_{jl}, \quad \forall j, \forall l; \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_{kl} \leq d_{il}, \quad \forall i \notin R, \forall l; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_{kl} \geq d_{il}, \quad \forall i \in R, \forall l; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_{kl} \geq y_{jl}, \quad \forall j, \forall l; \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_{kl} \leq x_{il}, \quad \forall i \notin R, \forall l; \quad (7)$$

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_{kl} \leq \sum_{k=1}^{n} x_{ik}, \quad \forall i \in R; \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kl} = 1, \forall l; \quad (9)$$

$$\lambda_{kl} \geq 0, \forall l, \forall k. \quad (10)$$

Segue a definição dos conjuntos, índices, variáveis e parâmetros envolvidos:

Conjuntos

R	Conjunto dos *inputs* que podem ser realocados
J	Conjunto dos *outputs*
I	Conjunto dos *inputs*

Índices

i	Relacionado com a variável ou parâmetro associado a um determinado *input*;
j	Relacionado com a variável ou parâmetro associado a um determinado *output*;
k	Relacionado com a variável ou parâmetro associado a uma determinada DMU;
l	Relacionado com a variável ou parâmetro associado a uma determinada DMU sob avaliação;

Parâmetros

x_{ik}	Valor do nível de *input i* associado à DMU *k*;
y_{jk}	Valor do nível de *output j* associado à DMU *k*;
y_{jl}	Valor do nível de *output j* associado à DMU *l* sob avaliação;
x_{il}	Valor do nível de *input j* associado à DMU *l* sob avaliação;
w^{+}_{jl}	Peso de importância para o alvo do *output j* da DMU *l* sob avaliação;
w^{-}_{il}	Peso de importância para o alvo do *input i* da DMU *l* sob avaliação;
d_{jl}	Nível mínimo de *output j*, que é desejável ser aumentado, associado à DMU *l* sob avaliação;
d_{il}	Valor mínimo que o *input i* pode ser reduzido (caso seja possa ser realocado), ou o limite superior desejável que pode ser reduzido (caso não possa ser realocado), associado à DMU *l* sob avaliação;
n	Número total de DMUs;
m	Número total de *outputs*;
R	Número total de *inputs*;

Variáveis de decisão

λ_{kl}	Indica o grau de importância relativa da DMU *k* como *benchmark* para DMU *l* sob avaliação.

Variável auxiliar

z	Indica o valor da função objetivo.

4. Modelo DEA GAME para realocação de recursos.

O modelo DEA GAME, aqui descrito, baseia-se no Jogo da Barganha de Nash numa situação onde unidades produtivas podem, por meio de coalizões, negociar a melhoria de todos os seus níveis de *outputs* (tanto os desejáveis como os indesejáveis) por meio do corte de gastos em unidades que trabalham em um nível de escala ineficiente para realocar tais recursos às demais DMUs. No estado inicial do Jogo, cada jogador (DMU) estabelece níveis mínimos de *outputs* desejáveis e máximos de *outputs* indesejáveis, prometidos ou exigidos por cada jogador, antes chegarem a um acordo cooperativo.

Da mesma forma, cada jogador, estabelece como restrição, o valor mínimo de *input* que pode ser reduzido para que a parcela economizada seja realocada as demais unidades (DMUs), se estas forem consideradas ineficientes. Os níveis mínimos de *outputs* desejáveis e máximos de *outputs* indesejáveis definirão o ponto de desacordo (*breakdown point*), que não necessariamente precisam ser os níveis atuais observados, porém outros valores superiores podem ser atribuídos, desde que satisfaçam as condições impostas pela definição do conjunto de possibilidades de produção. Desta forma, os pontos de desacordo passam a ser definidos com base nas condições mínimas que garantem a eficácia de cada uma das DMUs, desde que estes valores sejam factíveis.

Tal solução pode ser encontrada resolvendo-se:

$$\text{Max } z = \prod_{l=1}^{n}\left[\prod_{J}\left(\sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_{kl} - d_{jl} + e^{-M}\right)\prod_{I \notin R}\left(d_{il} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_{kl} + e^{-M}\right)\right] \quad (11)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_{kl} \geq d_{jl}, \quad \forall j, \forall l; \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_{kl} \leq d_{il}, \quad \forall i \notin R, \forall l; \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_{kl} \geq d_{il}, \quad \forall i \in R, \forall l; \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_{kl} \geq y_{jl}, \quad \forall j, \forall l; \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_{kl} \leq x_{il}, \quad \forall i \notin R, \forall l; \quad (16)$$

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_{kl} \leq \sum_{k=1}^{n} x_{ik}, \quad \forall i \in R; \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kl} = 1, \forall l; \quad (18)$$

$$\lambda_{kl} \geq 0, \forall l, \forall k. \quad (19)$$

A definição dos conjuntos, índices, parâmetros e variáveis são similares àquelas do dado do modelo dado por (2) - (10), sendo M um número suficientemente grande (*Big M*) e $e \cong 2{,}72$ (número neperiano).

Ressalte-se que a parcela e^{-M} na função objetivo (11) tende ao valor zero. Tal artifício foi utilizado neste modelo para que se evite que pelo menos um dos fatores do produtório em (11) seja zero, o que comprometeria a otimização do modelo. Por outro lado, o modelo dado por (11)-(19) não se enquadra em um problema típico de otimização convexa dificultando sua resolução, ou seja, não se pode garantir que uma determinada solução encontrada seja uma solução ótima global ao invés de apenas um ótimo local.

Já no caso de um problema de otimização convexa, toda solução ótima local é também uma solução ótima global (LUENBERGER; YE, 2008; HILLIER; LIEBERMAN, 2013). Portanto, se o modelo dado por (11) - (19) fosse um problema de otimização convexa, o método Gradiente Reduzido Generalizado (GRG), disponível no SOLVER do Excel™, seria eficaz para a sua resolução. Neste sentido, adota-se a aplicação da função logaritmo à função objetivo do modelo (11) – (19) para ser obtido um modelo equivalente de otimização convexa:

$$\text{Max } \ln(z) = \ln\left\{\prod_{l=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_{kl} - d_{jl} + e^{-M}\right)\prod_{i \in R}\left(d_{il} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_{kl} + e^{-M}\right)\right]\right\} \quad (20)$$

A medida de eficiência pode ser obtida utilizando-se (21):

$$E_l = \frac{Max\left(\dfrac{y_{jl}}{\sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_{kl}}\right)}{Min\left(\dfrac{x_{il}}{\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_{kl}}\right)}, \quad \forall i \notin R; \tag{21}$$

5. Aplicação do modelo DEA GAME para realocação de recursos numa empresa da área de energia.

Para ilustrar o uso e potencial do modelo DEA GAME, foram utilizados dados de uma empresa do setor de energia que produz peças galvanizadas para equipamentos elétricos de baixa, média e alta tensão. Por motivos de confidencialidade, todos os dados foram alterados convenientemente, mantendo-se seus valores relativos, por meio de uma transformação linear de escala, sendo importante destacar que tal procedimento não altera os resultados obtidos por meio da função arbitragem de Nash, pois este modelo é invariante quanto às transformações lineares.

Na Tabela 1, são apresentados os dados da empresa em questão coletados no período de 01/06/2011 até 30/06/2012. Todos os valores foram alterados por meio de transformações lineares, pelos motivos de confidencialidade já comentados. Na primeira coluna da Tabela 1 estão definidas as DMUs, que são os 30 produtos mais vendidos no período. O *input* que pode ser realocado no modelo é definido como o recurso gasto para custear o custo total de matéria prima. Na segunda coluna da Tabela 1 está o custo total (matéria prima, manutenção de estoques e o custo de encomendas, dentre outros). Na terceira coluna da Tabela 1, estão os dados acerca da frequência com que as peças produzidas foram entregues atrasadas, conforme as datas de entregas definidas em contratos. Tais dados foram considerados como *outputs* indesejáveis (quando menor melhor), pois são indicadores do nível de qualidade de serviço. Assim, o parâmetro “Atraso”, no modelo, por ser um *output* indesejável, foi tratado como um parâmetro de *input*. Os dados dispostos na quarta e quinta colunas da Tabela 1 são respectivamente definidos como níveis de produção e de faturamento da empresa (*outputs* desejáveis).

Tabela 1 – Dados de *Input* e *Output*

DMU	*Input*		*Output*	
	Custo	Atraso	Produção	Faturamento
D1	70,01	39	9.146	124.994,54
D2	395,00	81	7.568	169.250,75
D3	45,02	45	6.305	108.899,84
D4	45,02	75	4.835	111.233,03
D5	57,50	21	4.748	109.286,00
D6	169,85	43	4.736	129.447,83
D7	45,02	27	4.541	683.44,52
D8	45,02	27	4.376	47.767,70
D9	45,02	15	3.083	32.861,18
D10	45,02	31	2.753	32.249,00
D11	45,02	13	2.246	42.800,00
D12	57,50	35	2.237	50.864,48
D13	45,02	15	2.201	22.167,32
D14	70,01	15	2.099	35.779,25
D15	45,02	3	1.793	51.053,00

D16	520,10	37	1.646	43.949,69
D17	45,02	35	1.616	45.193,55
D18	35,00	33	1.568	109.298,00
D19	7.276,85	9	1.529	39.426,68
D20	95,00	3	1.493	44.693,00
D21	45,02	23	1.481	15.408,08
D22	1.825,40	19	1.418	577.935,65
D23	6.475,40	7	1.367	103.684,76
D24	5.875,40	1	1.238	948.710,00
D25	35,00	55	1.163	64.312,94
D26	3.850,40	7	1.064	205.050,50
D27	219,80	13	980	21.332,63
D28	50,42	3	869	74.453,00
D29	1.487,90	23	848	191.793,23
D30	3.625,40	15	722	509.179,67
Total	32.687,16	768	81.669	4.131.419,82
Máximo	7.276,85	81	9.146	948.710,00
Mínimo	35,00	1	722	15.408,08
Coef. Var.	1,93	0,78	0,78	1,45

Na primeira etapa do trabalho, de modo ilustrativo, foi aplicado de forma preliminar o modelo DEA para realocação recursos no modelo formulado em (2) – (10). Para modelagem e otimização, foi utilizado o *software The General Algebric Modeling System* (GAMS) versão 23.6.5 em computador com processador Intel (Core *i5*) 1,6 GHz até 2,3 GHz, com 8 GHz de memória RAM e sistema operacional da Microsoft™ (Windows 8) na plataforma 64 bits. O tempo de resolução foi menor do que 2 segundos e os resultados são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Alvos apontados pelo DEA para realocação de recursos

DMU	*Input*		*Output*	
	Custo	Atraso	Produção	Faturamento
D1	70,01	39	9.146	124.994,54
D2	428,45	35	7.568	217.481,74
D3	715,33	32	6.305	291.506,66
D4	1.049,24	28	4.835	377.663,94
D5	57,50	21	4.748	109.286
D6	1.071,73	28	4.736	383.466,37
D7	1.103,44	27	4.541	391.494,58
D8	1.153,50	27	4.376	404.566,11
D9	282,10	15	3.083	158.308,82
D10	1.522,16	22	2.753	499.690,78
D11	529,01	13	2.246	220.614,09
D12	1.639,37	21	2.237	529.933,74
D13	820,21	15	2.201	302.069,64
D14	882,44	15	2.099	318.695,04
D15	45,02	3	1.793	51.053
D16	1.773,61	20	1.646	564.572,48
D17	1.780,42	20	1.616	566.330,79
D18	1.791,33	19	1.568	569.144,09
D19	438,97	9	1.529	189.239,28
D20	46,77	3	1.493	58.650,40
D21	1.811,09	19	1.481	574.243,20
D22	1.825,40	19	1.418	577.935,65
D23	274,07	7	1.367	141.523,53
D24	5.875,40	1	1.238	948.710
D25	381,51	35	7.775	205.369,30
D26	533,31	7	1.064	205.050,50

D27	1.159,78	13	1.212	389.129,66
D28	50,42	3	869	74.453
D29	1.825,40	19	1.418	577.935,65
D30	1.750,16	15	1.307	509.179,67
Total	32.687,16	549	89.668	10.532.292,26
Máximo	5.875,40	39	9.146	948.710,00
Mínimo	45,02	1	869	51.053,00
Coef. Var.	1,02	0,55	0,76	0,60

Na Tabela 2 estão quais deveriam ser os alvos (metas) para que todas as DMUs se tornassem eficientes. Note-se que, na Tabela 2, o valor do custo total que poderia ser gasto em uma escala eficiente de produção é o mesmo valor anteriormente gasto (32.687,16). De fato, só houve uma realocação de recursos entre as unidades produzidas que melhorou os resultados para os demais indicadores de produção. Assim, o modelo DEA GAME aponta que o total de atrasos poderia diminuir de 768 para 549, o total de peças produzidas aumentaria de 81.669 para 89.668 e o faturamento total aumentaria de 4.131.419,82 para 10.532.292,26, caso todas as 30 unidades produtivas avaliadas tivessem trabalhado de modo eficiente.

Observe-se que, no modelo tradicional DEA, não há garantias de que estas melhorias, apontadas pelos valores dos alvos, poderiam ser alcançadas e tivessem a melhor relação de compromisso. Já com o DEA GAME, para realocação de recursos com a função arbitragem de Nash incorporada, é possível obter um resultado mais equilibrado, utilizando-se os mesmos valores de *inputs* e *outputs* considerados na definição dos pontos de desacordo. Os resultados obtidos por meio do modelo DEA GAME para realocação de recursos estão na Tabela 3.

Tabela 3 – Alvos apontados pelo DEA GAME para realocação de recursos

DMU	*Input*		*Output*	
	Custo	Atraso	Produção	Faturamento
D1	70,01	39	9.146	124.994,54
D2	713,56	35	8.269	216.306,99
D3	734,26	35	8.241	219.243,38
D4	415,50	35	7.625	214.140,29
D5	994,01	19	5.102	229.556,26
D6	573,98	33	6.927	255.034,57
D7	726,08	22	5.653	193.316,07
D8	598,87	22	5.580	172.912,19
D9	606,04	12	3.670	155.820,90
D10	325,31	21	5.017	163.690,14
D11	715,49	9	3.056	166.927,32
D12	429,74	23	5.131	195.830,17
D13	574,65	10	3.255	147.013,72
D14	666,27	10	3.207	160.742,24
D15	45,02	3	1.793	51.053,00
D16	438,50	23	5.102	198.178,06
D17	438,95	22	4.853	196.058,11
D18	642,84	21	4.360	252.325,06
D19	739,70	5	2.286	163.337,19
D20	1.188,70	3	1.684	227.136,40
D21	297,41	14	3.570	142.291,28
D22	4.167,07	11	3.306	703.851,40
D23	1.168,31	4	1.989	226.883,21
D24	5.875,40	1	1.238	948.710,00
D25	529,56	33	6.993	242.397,24
D26	1.837,24	3	1.836	329.026,13
D27	621,76	6	2.477	146.893,20
D28	1.616,77	2	1.643	293.043,22

D29	1.166,65	14	2.905	317.821,27
D30	3.769,50	7	2.547	635.048,53
Total	32.687,16	500	128.465	7.689.582,08
Máximo	5.875,40	39	9.146	948.710,00
Mínimo	45,02	1	1.238	51.053,00
Coef. Var.	1,18	0,70	0,52	0,73

Note-se que, agora, na Tabela 3, o total de atrasos foi 500 e o total de peças produzidas foi 128.465, que são, respectivamente, menor e maior que os valores que constam na Tabela 2 (atraso = 549 e produção = 89.668). Contudo, em decorrência da melhoria das estimativas dos alvos para o Atraso e Produção, o faturamento total que poderia ser alcançado, caso todas as unidades produtivas fossem eficientes, seria menor na Tabela 3 (7.689.582,02) do que o da Tabela 2 (10.532.292,26). Isto pode ocorrer, pois para que se tenha uma maior garantia de atendimento de serviço (pouca ou nenhuma ocorrência de atrasos), deve-se ter uma maior quantidade de peças disponíveis em estoque, o que consequentemente exigiria um aumento maior da produção. Por outro lado, nem sempre o aumento da produção de um determinado produto é acompanhado na mesma proporção com o aumento de vendas. Observe-se que, uma informação importante da abordagem pelo DEA GAME oferecida aos gestores da empresa estudada, seria que, apesar do faturamento ser maior na situação anterior (Tabela 2), a imagem da empresa estava sendo prejudicada pelo maior valor dos atrasos constatados, o que teria reflexos, no longo prazo, nas margens de lucro da empresa em decorrência da perda do seu *Market share*. Na Figura 1 estão os graus de Eficiência de todas as DMUs.

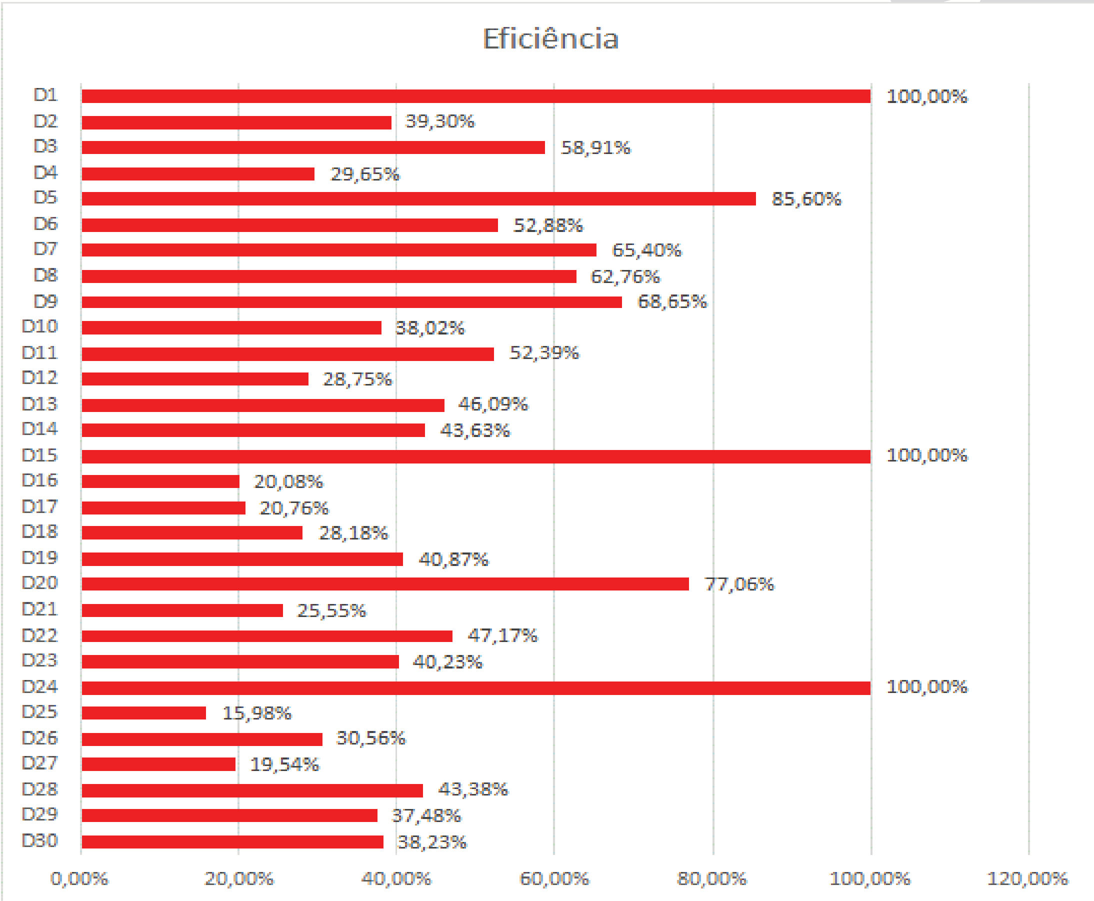

Figura 1- Graus de Eficiências das DMUs.

É possível notar na Figura 1 que apenas as DMUs D1, D15 e D24 foram consideradas eficientes, não havendo a identificação de melhorias nos níveis de *outputs* e *inputs* para estas DMUs. Na Figura 2 estão os *Benchmarks*, indicados pelo modelo DEA GAME para a alocação de recursos e que correspondem aos valores de λ_{kl} . Segundo os conceitos da Teoria dos Jogos, a combinação linear das melhores práticas (*Benchmarks*) constitui o conjunto de estratégias puras e mistas. As estratégias a serem adotadas para reduzir as ocorrências de atraso, melhorar o nível de produção e aumentar o valor do faturamento, estão associadas ao conjunto de *benchmarks* (D1, D15, D22 e D24), conforme indicado na Figura 2.

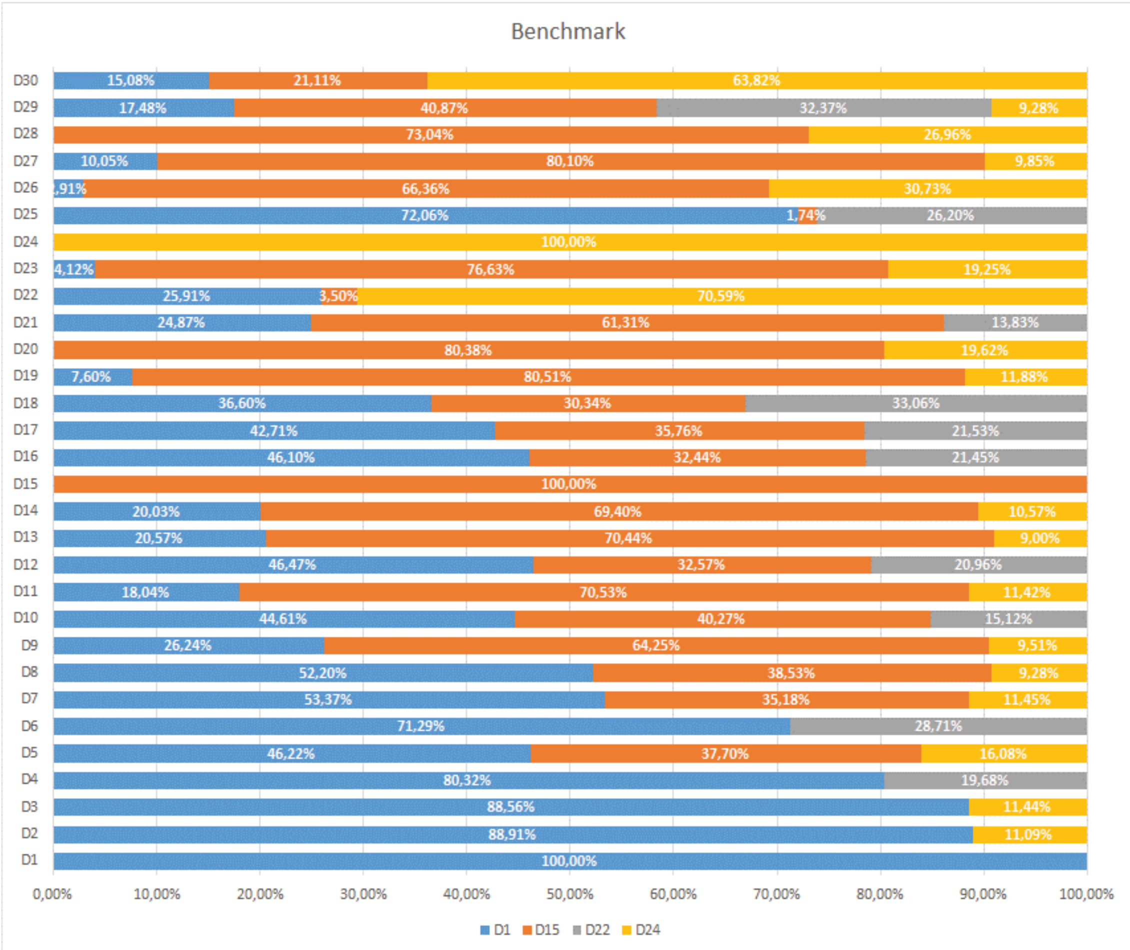

Figura 2- Relação de *Benchmarks* pelo modelo DEA GAME.

6. Considerações Finais

Este artigo apresentou o modelo DEA GAME para realocação de recursos incorporando aspectos da Teoria dos Jogos, sendo mais especificamente baseado no Jogo da Barganha de Nash. O emprego de diferentes pontos de negociação (barganha) entre as DMUs permite possibilitar a identificação de metas de redução para realocação de *inputs* e melhoria dos *outputs*, favorecendo um melhor entendimento sobre as possíveis estratégias de vendas que podem ser adotadas na fabricação e comercialização de cada produto.

A otimização feita por meio do *software* GAMS demonstrou-se ser rápida, com um tempo computacional próximo de 2 segundos. Os modelos DEA GAME para realocação de recurso têm alto potencial de aplicação na Gestão Pública, onde não é usual cortar recursos que já são escassos. Desta forma, para os serviços Públicos, torna-se interessante negociar melhorias em unidades ineficientes, cortando gastos excessivos em algumas entidades ineficientes para reaplica-los nas demais unidades tomadoras de decisão. Por outro lado, aumenta-se a qualidade dos serviços oferecidos, conforme uma demanda mínima de serviços exigida pela população. Portanto, como sugestão de trabalho futuro, espera-se ter a oportunidade de aplicar o modelo DEA GAME em problemas associados às Escolas, Hospitais, Postos de Saúde, por exemplo.

Agradecimentos: CNPq, CAPES e FAPESP.

Referências

Banker, R. D., Charnes, A. e Cooper, W. W. (1984),. Some models for estimating technical and sccale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, *30*(9), 1078–1092.

Charnes, A., Cooper, W. W. e Rhodes, E. (1978),. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, *2*(6), 429–444.

Cook, W. D. e Seiford, L. M. (2009), Data envelopment analysis (DEA) – Thirty years on, *European Journal of Operational Research*, *192*(1), 1–17.

Cooper, W. W., Seiford, L. M. e Tone, K., *Data Envelopment Analysis : a comprehensive text with models, applications, references and DEA and DEA - solver software*, Kluwer Academic Publisher, Massachusetts, 2000.

Dyson, R. G., Allen, R., Camanho, A. S., Podinovski, V. V., Sarrico, C. S. e Shale, E. A. (2001),. Pitfalls and protocols in DEA. *European Journal of Operational Research*, *132*(2), 245–259.

Hillier, F. S. e Lieberman, G. J.,. *Introduction to Operations Research* (9th ed.). McGraw-Hill, 2013.

Liu, J. S., Lu, L. Y. Y., Lu, W.-M. e Lin, B. J. Y. (2013),. Data envelopment analysis 1978–2010: A citation-based literature survey. *Omega*, *41*(1), 3–15.

Luenberger, D. G. e Ye, Y.,. *Linear and Nonlinear Programming* (3rd ed.),. Springer Science, 2008.

Nash, J. (1953),. Two-Person Cooperative Games. *Econometrica*, *21*(1), 128–140.

Nash, J. F. J. (1950),. The Bargaining Problem. *Econometrica*, *18*(2), 155–162.

Wang, M. e Li, Y. (2014),. Supplier evaluation based on Nash bargaining game model. *Expert Systems with Applications*, *41*(9), 4181–4185.

Wu, J., Liang, L., Yang, F. e Yan, H. (2009),. Bargaining game model in the evaluation of decision making units. *Expert Systems with Applications*, *36*, 4357–4362.