

UMA NOVA ABORDAGEM PARA O PROBLEMA DE DETERMINAÇÃO DO CAMINHO DE CORTE

Everton Fernandes Silva

ICMC - USP

Av. Trabalhador São-carlense, 13566-590, São Carlos - SP, Brasil

everton.fernandes@usp.br

Larissa Tebaldi de Oliveira, Franklina Maria Bragion Toledo

ICMC - USP

Av. Trabalhador São-carlense, 13566-590, São Carlos - SP, Brasil

(ltdo, fran)@icmc.usp.br

RESUMO

Em diferentes processos de produção nos deparamos com problemas de corte e empacotamento. Seu objetivo mais frequente é a minimização do desperdício de matéria-prima. No entanto, em várias situações, o problema de determinação do caminho de corte (CPDP) é fundamental para eficiência do processo produtivo. Basicamente, o CPDP consiste em determinar uma trajetória de corte que minimize, por exemplo, o tempo total de corte de um plano de corte previamente estabelecido. Há poucos modelos propostos na literatura para sua solução. Neste trabalho propomos a abordagem do CPDP como um problema do caixeiro viajante. Instâncias clássicas foram utilizadas para avaliar a abordagem proposta. Os resultados obtidos mostraram que a modelagem utilizada é mais eficiente que a anteriormente proposta na literatura.

PALAVRAS CHAVE. Caminho de corte, Modelo matemático, Corte e empacotamento.

Área Principal: Programação Matemática

ABSTRACT

In different production processes we come across with cutting and packing problems. Its most common objective is the minimization of the raw material waste. However, in many situations, the cutting path determination problem (CPDP) is fundamental to the efficiency of the productive process. Basically, the CPDP consists in determining a cutting trajectory that minimizes, for example, the total cutting time of a cutting plane previously established. There are a few mathematical models proposed to its solution. In this article we propose an approach for the CPDP as a traveling salesman problem. Classic instances were used to evaluate the proposed approach. Obtained results showed that the model used is more efficient than the model previously proposed in the literature.

KEYWORDS. Cutting path, Mathematical model, Cutting and packing.

Main Area: Mathematical Programming

1. Introdução

O problema de reduzir a perda de material durante a etapa de corte surge em diferentes processos produtivos, como na produção de roupas, de calçados, de peças metálicas e de móveis. Frequentemente, a necessidade de reduzir a perda de material é modelada como um problema de corte e empacotamento, que consiste em dada uma superfície a ser cortada determinar o posicionamento das peças que serão originadas do corte desta superfície. Um objetivo muito frequente é minimizar a perda de material resultante do corte da superfície. A busca por bons planos de corte, isto é, boas soluções do problema de corte e empacotamento, é o foco de muitas pesquisas. Para uma revisão sugerimos os artigos de Dyckhoff e Finke (1992), Wäscher, Haußner e Schumann (2007) e Bennell e Oliveira (2009).

Uma vez resolvido o problema de corte e empacotamento, em muitas aplicações reais surge a necessidade de determinar o caminho de corte a ser seguido. A escolha do caminho tem influência significativa na eficiência do planejamento da produção, em especial em dois casos: a) quando a ferramenta de corte tem custo elevado e se desgasta ao longo do processo de corte (por exemplo, diamante artificial); e b) quando o tempo necessário para o corte é significativo, logo a escolha de um caminho de corte adequado pode aumentar o número de planos de corte concluídos ao longo de um dia de trabalho.

O problema de determinação do caminho de corte (*cutting path determination problem* - CPDP) consiste em definir a trajetória de uma ou mais ferramentas de corte de forma a cumprir um padrão de corte preestabelecido. As cabeças de corte podem possuir capacidade limitada e não devem cortar partes internas das peças demandadas. Este problema vem sendo estudado a algumas décadas. Diferentes abordagens foram utilizadas para representá-lo, dentre elas destacamos, Manber e Israni (1984), Han e Na (1999), Moreira et al. (2007), Rodrigues e Ferreira (2011) e Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011).

Devido a sua dificuldade de solução, diversos métodos heurísticos foram propostos, por exemplo, Han e Na (1999), Lee e Kwon (2006), Moreira et al. (2007), Rodrigues e Ferreira (2011), Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011) e Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2014). Apesar do avanço dos computadores e dos softwares de otimização, até o momento, apenas Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011) e sua recente extensão Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2014) propuseram um modelo matemático linear para o CPDP. Nestes trabalhos, testes computacionais com os modelos não geraram resultados satisfatórios para instâncias reais, logo os autores propuseram uma heurística para resolver o problema.

Nosso objetivo é abordar o CPDP como um problema do caixeiro viajante. No entanto, para tornar o trabalho autocontido, também apresentamos o modelo de Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011) adaptado para o problema estudado e comparamos o desempenho das duas propostas utilizando instâncias clássicas da literatura para o problema de corte e empacotamento (*nesting*).

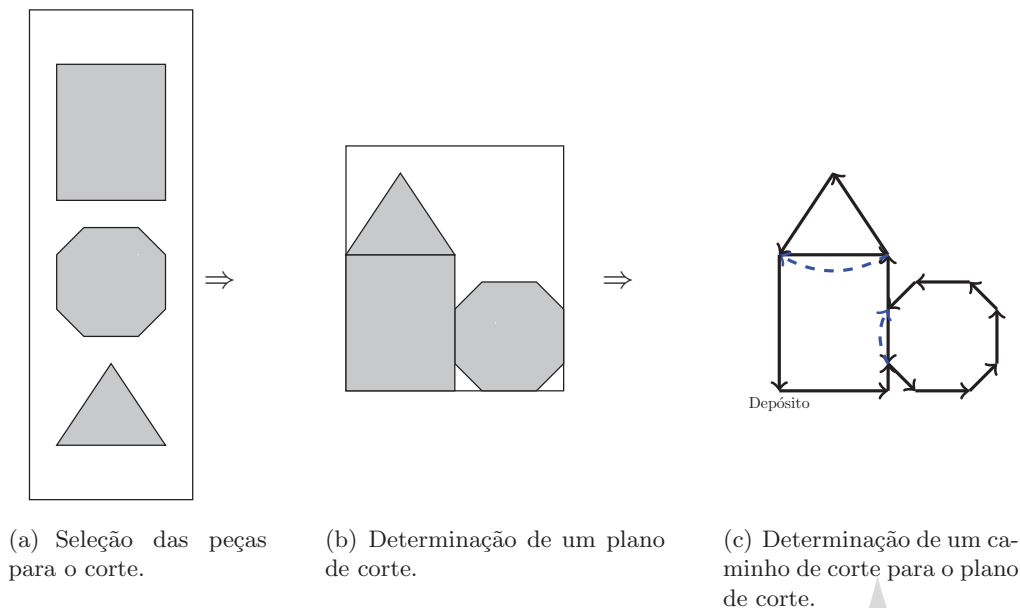
O artigo está estruturado como segue. Na Seção 2 definimos as características do problema estudado. Já nas Seções 3 e 4 apresentamos o modelo da literatura e a abordagem proposta, respectivamente. Testes computacionais utilizando o software de otimização ILOG CPLEX são reportados na Seção 5. Considerações finais sobre o trabalho e perspectivas de trabalho futuros são apresentadas na Seção 6.

2. Definição do problema

O problema de determinação do caminho de corte (CPDP) tem por objetivo escolher o trajeto mínimo que uma ou mais ferramentas devem percorrer a fim de cumprir um plano de corte previamente definido. A união do CPDP com o problema de empacotamento compõem o que é conhecido como plano de produção, ilustrado na Figura 1.

Existem diversas características que combinadas definem diferentes CPDP, tais como, os tipos de corte possíveis, o tipo de ferramenta e da placa utilizada, entre outros. O problema estudado aborda o corte a laser de chapas finas cujas características foram

Figura 1: Fases de um plano de produção.



definidas com base em casos reais. Para a ferramenta de corte consideramos: a) a ferramenta de corte não se desgasta ao longo do corte, ou seja, a capacidade da ferramenta é ilimitada e b) a ferramenta possui somente uma cabeça de corte. São considerados três estados possíveis para a ferramenta: desligada (se locomovendo longe da placa), ligada cortando e ligada perfurando. Além disso, o diâmetro da ferramenta é pequeno, ou seja, não há espaço para que a peça ao ser cortada se desloque na placa. A cabeça de corte sempre inicia o corte a partir de uma origem predefinida (depósito) e ao finalizar o caminho de corte retorna ao depósito.

Com relação às características da placa e dos objetos a serem cortados, é considerado que: a) não há sentido obrigatório para o corte de partes da placa; b) a placa possui espessura fina, portanto o tempo de perfuração pode ser desconsiderado; c) a placa não é superaquecida pelo calor gerado durante o processo de corte, logo não se deforma durante o processo; d) o corte das peças pode ser realizado em etapas, ou seja, não é necessário que a peça inteira seja cortada em uma vez; e) caso necessário, as peças são aproximadas por polígonos.

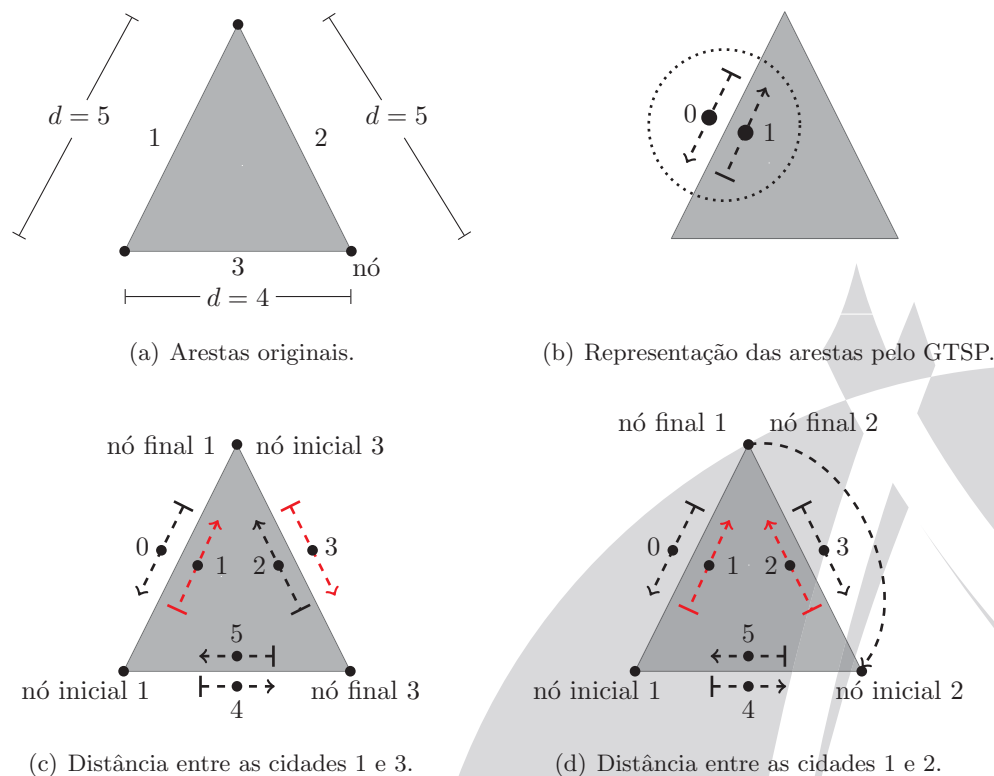
3. Modelo da literatura

Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011) analisam o problema de corte de peças irregulares posicionadas em uma superfície de metal. Além das características do problema aqui estudado, os autores consideram que quando um contorno é completamente cortado, o pedaço da placa correspondente a peça cortada se separa do restante da placa. Isso torna impossíveis novos cortes de elementos ou peças na parte separada, obrigando a existência de restrições de precedência entre o corte de peças que estejam juntas ou que sejam posicionadas no interior de outra peça. Pelo mesmo motivo é preciso tratar de forma especial peças que possuem arestas em comum. Neste caso, os elementos em comum devem ser cortados antes que as peças conectadas por eles sejam completamente cortados.

Para a modelagem matemática, os autores utilizaram a abordagem do problema do caixeiro viajante generalizado (*generalized traveling salesman problem - GTSP*), considerando cada aresta que compõe as peças como um distrito com duas cidades, sendo cada cidade um sentido possível de corte da aresta, conforme ilustrado na Figura 2(b). Para

representar as cidades de cada aresta, os autores enumeraram as arestas de forma que a aresta e é composta pelas cidades $2e - 2$ e $2e - 1$. Para o cálculo de distância entre duas cidades i e j , é calculada a distância percorrida para viajar do nó final da aresta representada pela cidade i até o nó inicial da aresta representada pela cidade j . A distância para percorrer uma aresta, considerada pelos autores, corresponde ao tempo que a ferramenta de corte leva para atravessar a respectiva aresta. Nas Figuras 2(c) e 2(d) são ilustrados, respectivamente, a distância entre as cidades 1 e 3, que é igual a zero, e a distância entre as cidades 1 e 2, que é igual a 5.

Figura 2: Exemplo de abordagem do GTSP.



Com exceção das restrições de precedência, as demais características que compõem o problema proposto pelos autores se assemelham com as características do problema definidas na Seção 2, ou seja, as placas de corte consideradas são de espessura fina, portanto o tempo gasto durante o processo de perfuração é desconsiderado, as peças são tratadas por arestas, sem a necessidade de que as arestas que formam a peça sejam cortadas em sequência, existe somente uma cabeça de corte e a placa não é afetada pelo calor durante o processo de corte.

Considerando apenas as características do problema estudado, ou seja, que o corte de uma peça não implica que ela se mova, escrevemos a seguir o modelo de Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011) simplificado.

Parâmetros:

- d_{ij} - distância para atravessar da cidade i até a cidade j ;
- a - quantidade de cidades (sentido de corte numa aresta) no grafo;
- e - índice identificador da cidade;
- n - quantidade de arestas no grafo.

Variáveis:

x_{ij} - recebe valor 1 se o trajeto possui um movimento indo da cidade i para a cidade j ;

y_{de} - recebe valor 1 quando a aresta d precede (não necessariamente de forma imediata) a aresta e .

$$\min \sum_i \sum_j d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$s.a : \sum_{i=1}^a (x_{2e-2,i} + x_{2e-1,i}) = 1, \quad \forall e = 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^a (x_{i,2e-2} + x_{i,2e-1}) = 1, \quad \forall e = 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^a x_{ij} = \sum_{k=1}^a x_{jk}, \quad \forall j = 1, \dots, a, \quad (4)$$

$$y_{de} \geq x_{2d-2,2e-2} + x_{2d-2,2e-1} + x_{2d-1,2e-2} + x_{2d-1,2e-1}, \quad \forall d, e = 2, \dots, n | d \neq e, \quad (5)$$

$$y_{de} + y_{ed} = 1, \quad \forall d, e = 2, \dots, n | d \neq e, \quad (6)$$

$$y_{de} + y_{ef} + y_{fd} + (x_{2e-2,2d-2} + x_{2e-2,2d-1} + x_{2e-1,2d-2} + x_{2e-1,2d-1}) \leq 2, \quad \forall d, e, f = 2, \dots, n | d \neq e \neq f, \quad (7)$$

$$y_{1e} = 1, \quad \forall e = 2, \dots, n, \quad (8)$$

$$y_{de} \geq 0, \quad \forall d, e = 2, \dots, n, \quad (9)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j = 1, \dots, a | i \neq j. \quad (10)$$

A função objetivo (1) minimiza a distância total percorrida. As restrições (2) e (3) garantem que cada aresta é visitada exatamente uma vez. As restrições (4) definem a continuidade do percurso, enquanto que as restrições (5), (6), (7) e (8) impõem a eliminação de subciclos ilegais. Por fim, as restrições (9) e (10) definem o domínio das variáveis.

4. Abordagem proposta

Após um levantamento dos trabalhos da literatura que tratam o CPDP, optou-se por utilizar a abordagem do problema de roteamento de arcos capacitado (*capacitated arc routing problem* - CARP) apresentada em Usberti, França e França (2011). Neste trabalho, os autores apresentam uma conversão na qual é possível adaptar o modelo CARP para o CPDP. O CARP é definido da seguinte forma, dado um grafo $G = (V, A)$, um subconjunto de arestas obrigatórias $R \subseteq A$ em que cada aresta possui uma demanda específica, e de um conjunto de veículos idênticos com capacidade limitada q saindo de um depósito, encontrar um conjunto de circuitos com custo mínimo que atenda toda a demanda das arestas sem exceder a capacidade de cada veículo.

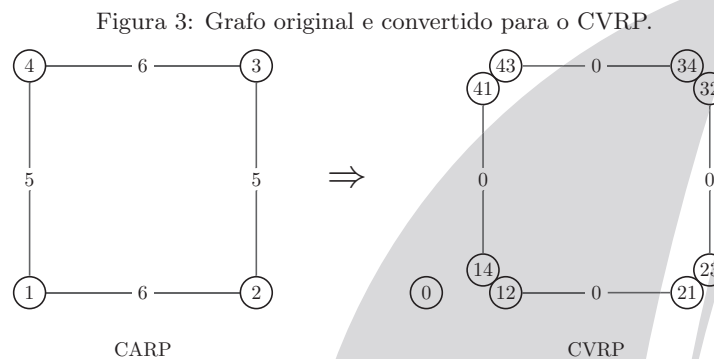
Na literatura, encontramos diversos trabalhos que propõem conversões do CARP para o problema de roteamento de veículos capacitados (*capacitated vehicle routing problem* - CVRP). O CVRP possui o objetivo de, dada um frota de veículos idênticos e um conjunto de vértices demandados (clientes), definir rotas com início e fim num depósito preestabelecido que atendam toda a demanda dos vértices sem exceder a capacidade de cada veículo e minimizando o custo da travessia.

Pearn, Assad e Golden (1987) propuseram o primeiro modelo de conversão do CARP para o CVRP, transformando um grafo com R arestas obrigatórias do CARP num

grafo com $3R + 1$ vértices a serem atendidos no CVRP. Longo, Aragão e Uchoa (2006) e Baldacci e Maniezzo (2006) apresentam melhorias nos modelos de conversão, gerando grafos com $2R + 1$ vértices para o CVRP. Mais recentemente, Foulds, Longo e Martins (2014) desenvolveram um modelo de conversão que gera um grafo do CVRP com apenas $R + 1$ vértices.

Analisando as instâncias em comum resolvidas pelos autores, além da própria simplicidade de cada modelo, observou-se que o trabalho de Baldacci e Maniezzo (2006) apresentou melhor desempenho. A ideia de conversão proposta transforma cada extremo da aresta demandada em um vértice, desta forma obtém-se um grafo completamente conectado com $2R$ vértices, além do vértice depósito. A criação de um grafo deste tipo é feita para que seja possível seguir de uma aresta para qualquer outra diretamente, sem a necessidade de percorrer outras arestas intermediárias.

A Figura 3 ilustra um exemplo de conversão de um grafo do CARP para o CVRP. A imagem a esquerda representa o grafo original com seus respectivos vértices e as arestas obrigatórias, enquanto que a imagem a direita representa o mesmo grafo convertido para o CVRP com $2R + 1$ vértices. Por exemplo, a aresta $(1, 4)$ é transformada em dois nós 14 e 41, representando, respectivamente, seus extremos nos nós 1 e 4. O grafo convertido é um grafo completamente conectado, no entanto, para facilitar a visualização, as arestas não obrigatórias foram omitidas na figura. O depósito (Vértice 0) utilizado no CVRP corresponde a qualquer um dos vértices no grafo original que seria utilizado como ponto de início.



Uma vez que o custo de travessia de cada aresta também deve ser convertido, uma vez que os vértices do CVRP não são os mesmos vértices do CARP. Dado que um vértice i que faz parte de uma aresta (i, k) no CARP é representado pelo vértice s_{ik} no CVRP e uma aresta (i, j) no CARP é representada por (s_{ij}, s_{ji}) no CVRP, o cálculo dos novos custos se dá da seguinte forma:

$$\hat{c}_{s_{ij}s_{kl}} = \begin{cases} 0, & \text{se } (s_{ij}, s_{kl}) \in \hat{R}, \\ \frac{1}{2}c_{ij} + \text{dist}(i, k) + \frac{1}{2}c_{kl}, & \text{c.c.}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\hat{c}_{0s_{ij}} = \text{dist}(0, i) + \frac{1}{2}c_{ij}, \quad (12)$$

onde:

$\hat{c}_{s_{ij}s_{kl}}$ - custo da aresta (ij, kl) no CVRP;

c_{ij} - custo da aresta (i, j) no CARP;

$\text{dist}(i, k)$ - caminho mais curto entre os vértice i e k no CARP;

\hat{R} - conjunto das arestas obrigatórias do CARP.

A função (11) favorece a travessia nas arestas obrigatórias, consideradas nulas, enquanto que para as demais arestas o custo no grafo original é dividido em duas partes, sendo cada metade atribuída para cada vértice que compõe a aresta, pois todos os vértices tem que ser visitados. Neste caso, o custo de travessia na aresta $\hat{c}_{s_{ij}s_{kl}}$ tem valor igual a metade do custo de ir da aresta i para a aresta j no grafo original mais a distância entre os vértices i e k e mais metade do custo da aresta que liga os nós k e l no grafo original. Em (12) calcula-se o custo das arestas não demandadas que saem do depósito, garantindo que, se o mesmo trajeto for percorrido tanto no grafo CARP quanto no grafo CVRP, o custo dos dois trajetos deve ser igual.

A demanda das arestas também deve ser convertida seguindo o mesmo raciocínio do custo. Neste caso, a demanda da aresta é dividida entre os dois vértices que a formam, não sendo necessária uma divisão exata, contanto que a soma das demandas dos dois vértices seja igual a demanda original da aresta formada por eles:

$$\hat{q}_{s_{ij}} = \hat{q}_{s_{ji}} = \frac{1}{2}q_{ij}, \quad \forall (s_{ij}, s_{ji}) \in \hat{R}, \quad (13)$$

onde:

$\hat{q}_{s_{ij}}$ - demanda do vértice s_{ij} no CVRP;
 q_{ij} - demanda da aresta (i, j) no CARP.

Uma vez convertidos todos os custos e as demandas, os autores propõem um modelo matemático para solução do CVRP, chamado de *Edge CVRP* (ECVRP), cujos parâmetros e variáveis são:

Parâmetros:

$\hat{G}(\hat{V}, \hat{E})$ - grafo \hat{G} composto pelo conjunto de vértices \hat{V} e pelo conjunto de arestas \hat{E} ;

\hat{c}_{ij} - custo da aresta (i, j) ;

m - quantidade total de veículos;

V' - conjunto de vértices que compõem o grafo com exceção do vértice depósito.

Variáveis:

x_{ij} - variável que recebe valor 1 se a aresta (i, j) foi percorrida;

$r(S)$ - número mínimo de veículos necessários para percorrer o subconjunto de arestas S sem que um subciclo ilegal seja formado.

O modelo proposto por Baldacci e Maniezzo (2006) é dado por (14) - (19):

$$\min \sum_{(i,j) \in \hat{E}} \hat{c}_{ij} x_{ij} \quad (14)$$

$$s.a : \sum_{\substack{j \in \hat{V} \\ i < j}} x_{ij} + \sum_{\substack{j \in \hat{V} \\ i > j}} x_{ji} = 2, \quad \forall i \in V', \quad (15)$$

$$\sum_{\substack{i \in S \\ i < j}} \sum_{\substack{j \in S \\ i < j}} x_{ij} + \sum_{\substack{i \in S \\ i < j}} \sum_{\substack{j \in S \\ i < j}} x_{ji} \geq 2r(S), \quad \forall S \in \mathcal{S}, \quad (16)$$

$$\sum_{j \in V'} x_{0j} + x_{j0} = 2m, \quad (17)$$

$$x_{ij} = 1, \quad \forall (i, j) \in \hat{R}, \quad (18)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in \hat{E}. \quad (19)$$

A função objetivo (14) minimiza o custo de atender os vértices do grafo. As restrições (15) garantem a continuidade do trajeto, obrigando que cada vértice possua uma aresta incidindo e uma saindo durante o percurso, enquanto que as restrições (16) são responsáveis pela eliminação de subciclos ilegais, impondo que, para cada subconjunto de vértices S , é necessária uma quantidade mínima de arestas sendo percorridas neste subconjunto para garantir que um subciclo ilegal não seja formado. A restrição (17) define a quantidade de veículos necessários para atender todos os circuitos enquanto que as restrições (18) garantem a travessia em todas as arestas obrigatórias. Por fim, as restrições (19) definem o domínio das variáveis.

Devido ao alto custo computacional das restrições (16), propomos a utilização de um outro conjunto de restrições que apresentam o mesmo resultado, porém com menor custo computacional, as restrições de eliminação de subtour propostas por Miller, Tucker e Zemlin (1960) (MTZ). Estas restrições fazem uso de uma variável para representar a ordem na qual os vértices são visitados no percurso. Desta forma, as restrições de eliminação de subciclo são reescritas como:

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2, \quad i, j = 2, \dots, n, \quad (20)$$

$$1 \leq u_i \leq n - 1, \quad i = 2, \dots, n, \quad (21)$$

onde:

n - número de vértices do grafo,

u_i - posição em que o vértice i foi visitado durante o percurso.

Adaptando o CVRP para o CPDP com as características abordadas neste trabalho, observa-se que ao utilizar uma ferramenta de corte com capacidade ilimitada a abordagem não possui restrições de capacidade, tornando o CVRP num problema de roteamento de veículos (*vehicle routing problem* - VRP) e ao utilizar somente uma ferramenta de corte (um veículo), a abordagem passa a ter as características que definem um problema do caixeiro viajante (*traveling salesman problem* - TSP). O TSP consiste em, dado um grafo $G = (V, A)$, encontrar o circuito mínimo que percorra todos os vértices de G .

Portanto, além do uso da formulação MTZ, optou-se por utilizar restrições de continuidade de trajeto próprias do TSP (23) - (24) ao invés das restrições (15). É importante também ressaltar que ao considerar somente uma cabeça de corte a restrição (17) se torna desnecessária. Portanto, a abordagem do CPDP como um TSP é dada pelo modelo:

$$\min \sum_{(i,j) \in \hat{E}} \hat{c}_{ij} x_{ij} \quad (22)$$

$$s.a : \sum_{j \in \hat{V}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \hat{V}, \quad (23)$$

$$\sum_{j \in \hat{V}} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in \hat{V}, \quad (24)$$

$$u_i - u_j + (2|\hat{R}| - 1)x_{ij} \leq 2|\hat{R}| - 2, \quad i, j = 1, \dots, 2|\hat{R}|, \quad (25)$$

$$1 \leq u_i \leq 2|\hat{R}| - 1, \quad i = 1, \dots, 2|\hat{R}|, \quad (26)$$

$$x_{ij} + x_{ji} = 1, \quad \forall (i, j) \in \hat{R}, \quad (27)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in \hat{E}, \quad (28)$$

$$u_i \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i \in \hat{V}, \quad (29)$$

onde:

u_i - variável que indica a ordem na qual o vértice i é visitado no percurso.

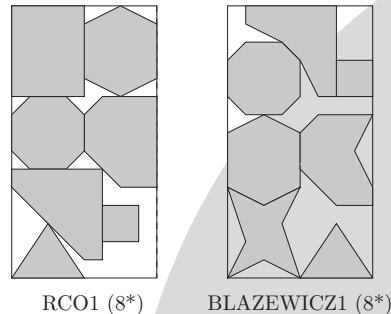
5. Experimentos computacionais

Testes computacionais foram realizados para comparar o desempenho da abordagem proposta com o modelo existente da literatura adaptado para o problema estudado. Os experimentos foram realizados num computador com processador Intel Xeon (2,00GHz), sistema operacional Linux e 64GB de memória RAM.

5.1. Instâncias

Para realização dos testes computacionais foram utilizados planos de cortes propostos para as instâncias RCO e BLAZEWICZ, clássicas da literatura de cortes e empacotamento de peças irregulares. A instância BLAZEWICZ representa as peças originais, enquanto que a RCO é formada pela envoltória convexa das mesmas peças. Cada conjunto de testes possui 5 exemplos, sendo que o exemplo RCO1 (BLAZ1) consiste na alocação de 7 peças diferentes na placa. Para os demais exemplos, a quantidade de cada tipo de peça é multiplicado pelo número da instância, ou seja, RCO2 e BLAZ2 possuem duas peças de cada tipo alocadas na placa. Os planos de corte, isto é, o posicionamento das peças na placa, são as soluções do problema de empacotamento de Rodrigues (2015). A Figura 4 ilustra dois planos de cortes, respectivamente, para as instâncias RCO1 e BLAZEWICZ1.

Figura 4: Planos de corte obtidos por Rodrigues (2015).



5.2. Resultados

Os testes foram realizados utilizando o software de otimização ILOG CPLEX 12.6, sendo que cada teste teve seu tempo de execução limitado em 1 hora (TL - 3600s). As Tabelas 1 e 2 apresentam a performance do modelo proposto (TSP) e do modelo da literatura (GTSP) de Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011) para as instâncias RCO e BLAZEWICZ, respectivamente. A primeira coluna das tabelas descreve as instâncias e as demais colunas apresentam, respectivamente, a melhor solução obtida a partir de cada um dos modelos, a porcentagem de desvio para a solução ótima ($GAP = (\text{melhor solução} - \text{limitante inferior}) / \text{melhor solução} * 100$) e os tempos para encontrar a solução obtida, TL indica que o tempo limite foi atingido.

Analisando a Tabela 1, podemos observar que o modelo proposto consegue soluções ótimas para 4 das 5 instâncias em no máximo 758s. Já o modelo de Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011) atinge o tempo limite para todas as instâncias.

O mesmo comportamento pode ser observado na Tabela 2, onde o modelo proposto obtém soluções ótimas para 3 das 5 instâncias, enquanto que o modelo da literatura não encontra a solução ótima para nenhuma delas.

Tabela 1: Performance dos modelos para as instâncias RCO.

Instância	Melhor Solução Obtida		Gap(%)		Tempo(s)	
	TSP	GTSP	TSP	GTSP	TSP	GTSP
RCO1	99,7	99,7	0,0	2,6	3,0	TL
RCO2	192,8	925,6	0,0	82,0	15,9	TL
RCO3	281,0	1413,0	0,0	82,5	134,7	TL
RCO4	373,3	2799,4	0,0	88,5	757,4	TL
RCO5	471,4	4069,7	0,4	90,3	TL	TL

Tabela 2: Performance dos modelos para as instâncias BLAZEWICZ.

Instância	Melhor Solução Obtida		Gap(%)		Tempo(s)	
	TSP	GTSP	TSP	GTSP	TSP	GTSP
BLAZ1	103,7	106,2	0,0	5,6	3,1	TL
BLAZ2	200,1	890,9	0,0	80,1	23,4	TL
BLAZ3	297,3	1978,0	0,0	86,6	216,7	TL
BLAZ4	401,3	3324,7	2,0	89,4	TL	TL
BLAZ5	491,1	4643,9	1,2	90,4	TL	TL

6. Considerações finais

Neste trabalho o problema de determinação do caminho de corte (CPDP) foi abordado como problema do caixeiro viajante (TSP). Comparando os resultados obtidos com o modelo da literatura concluímos que a abordagem proposta é mais eficiente.

Pretendemos avaliar essa abordagem proposta utilizando instâncias maiores e em outras situações como um CPDP que possua características como a utilização de placas com espessura mais grossa, tornando o tempo de perfuração na placa considerável ou o uso de uma cabeça de corte de diâmetro relevante, possibilitando que as peças totalmente cortadas se desloquem na placa.

Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPESP (2013/27162-0, 2013/25743-6 e 2010/10133-0) e o CNPq (306918/2014-5). Eles também agradecem ao Laboratório de Otimização do ICMC/USP (LOt - www.otm.icmc.usp.br).

Referências

- BALDACCI, R.; MANIEZZO, V. Exact methods based on node-routing formulations for undirected arc-routing problems. *Networks*, v. 47, p. 52 – 60, 2006.
- BENNEL, J. A.; OLIVEIRA, J. F. A tutorial in irregular shape packing problems. *Journal of the Operational Research Society*, v. 60, p. 93 – 105, 2009.
- DEWIL, R.; VANSTEENWEGEN, P.; CATTRYSSSE, D. Cutting path optimization using tabu search. *Key Engineering Materials*, v. 473, p. 739 – 748, 2011.
- DEWIL, R.; VANSTEENWEGEN, P.; CATTRYSSSE, D. Construction heuristics for generating tool path for laser cutters. *International Journal of Production Research*, v. 52, p. 5965 – 5984, 2014.
- DYCKHOFF, H.; FINKE, U. *Cutting and packing in production and distribution: Typology and bibliography*. [S.l.]: Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.

FOULDS, L.; LONGO, H.; MARTINS, J. A compact transformation of arc routing problems into node routing problems. *Annals of Operations Research*, p. 1 – 24, 2014. (Online).

HAN, G.-C.; NA, S.-J. A study on torch path planning in laser cutting processes part 2: cutting path optimization using simulated annealing. *Journal of Manufacturing Processes*, v. 1, p. 62 – 70, 1999.

LEE, M. K.; KWON, K. B. Cutting path optimization in cnc cutting processes using a two-step genetic algorithm. *International Journal of Production Research*, v. 44, p. 5307 – 5326, 2006.

LONGO, H.; ARAGÃO, M. P. de; UCHOA, E. Solving capacitated arc routing problems using a transformation to the cvrp. *Computers & Operations Research*, v. 33, p. 1823 – 1837, 2006.

MANBER, U.; ISRANI, S. Pierce point minimization and optimal torch path determination in flame cutting. *Journal of Manufacturing Systems*, v. 3, p. 81 – 89, 1984.

MILLER, C. E.; TUCKER, A. W.; ZEMLIN, R. A. Integer programming formulations of traveling salesman problems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, v. 7, p. 326–329, 1960.

MOREIRA, L. M. et al. Heuristics for a dynamic rural postman problem. *Computers & Operations Research*, v. 34, p. 3281 – 3294, 2007.

PEARN, W.-L.; ASSAD, A.; GOLDEN, B. L. Transforming arc routing into node routing problems. *Computers & Operations Research*, v. 14, p. 285 – 288, 1987.

RODRIGUES, A. M.; FERREIRA, J. S. Cutting path as a rural postman problem: solutions by memetic algorithms. *International Journal of Combinatorial Optimization Problems and Informatics*, v. 3, p. 31 – 46, 2011.

RODRIGUES, M. O. *Modelos matemáticos para o problema de empacotamento em faixas de peças irregulares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

USBERTI, F. L.; FRANÇA, P. M.; FRANÇA, A. L. M. The open capacitated arc routing problem. *Computers & Operations Research*, v. 38, p. 1543 – 1555, 2011.

WÄSCHER, G.; HAUßNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 183, p. 1109 – 1130, 2007.