MODELO MATEMÁTICO E HEURÍSTICA PARA O PROBLEMA DE CORTE COM SOBRAS APROVEITÁVEIS E VENDA DE RETALHOS

Adriana Cherri
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru
Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01, Vargem Limpa, Bauru, SP
adriana@fc.unesp.br
Douglas Nogueira do Nascimento
Departamento de Computação, Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru
Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01, Vargem Limpa, Bauru, SP
douglasnn@fc.unesp.br
Karen Rocha Coelho
Pós-graduação em Engenharia de Produção, Faculdade de Engenharia, UNESP, Bauru
Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01, Vargem Limpa, Bauru, SP
karenrc345@hotmail.com
Edméa Cassia Baptista
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru
Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01, Vargem Limpa, Bauru, SP
baptista@fc.unesp.br

RESUMO

No problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis (PCESA) um conjunto de objetos padronizados (comprados de fornecedores) ou retalhos (sobras de processos de corte), disponíveis em estoque devem ser cortados para produzir um conjunto de itens. O objetivo consiste em determinar a melhor forma de cortar os objetos de modo a otimizar uma função objetivo e considerando que retalhos podem ser gerados para estoque. A abordagem utilizada neste trabalho considera que os retalhos são gerados em quantidades e tamanhos previamente especificados e, além de serem estocados para atender demandas futuras, também podem ser vendidos a empresas que utilizam estes objetos como matéria-prima. Um modelo matemático proposto na literatura foi alterado para resolver esse problema e, para a obtenção de soluções inteiras, um procedimento heurístico que também considera o aproveitamento de sobras foi proposto. Testes computacionais foram realizados com problemas gerados aleatoriamente.

PALAVARAS CHAVE. Problema de corte e estoque com sobras aproveitáveis, Geração de colunas, Procedimento heurístico.

ABSTRACT

In the cutting stock problem with usable leftovers (CSPUL) a set of standard objects (bought from suppliers) or retails (leftovers of previous cutting processes) available in stock must be cut in order to produce a set of demanded items. The objective consists of to determine the best way to cut the objects in order to optimize an objective function and considering that retails can be generated to stock. The approach used in this work considers that retails are generated in quantities and sizes previously defined and return to stock to meet future demands or also be sold to companies that use these objects as raw material. A mathematical model proposed in the literature was modified to solve this problem and, to obtain integer solutions, a heuristic procedure that also considers the usable leftovers was developed. Computational tests were performed with randomly generated instances.

KEYWORDS. Cutting stock problem with usable leftovers, Column Generation, Heuristic procedure.

1. Introdução

Os problemas de corte de estoque (PCE) visam cortar um conjunto de objetos disponíveis em estoque em um conjunto de itens, cujas quantidades e tamanhos são especificados, com a finalidade de atender demandas de clientes ou compor estoque, buscando otimizar uma determinada função objetivo. São alguns exemplos de função objetivo: minimizar o custo de cortar objetos, maximizar o lucro, minimizar a perda, entre outras. Esse tipo de problema é encontrado em diferentes processos industriais como, por exemplo, o corte de bobinas de aço, peças de couro, chapas de vidro, bobinas de papel, peças de madeira e barras de ferro.

As diversas aplicações na indústria, sua importância econômica e a complexidade computacional para resolvê-los tornam os PCE problemas muito importantes da otimização combinatória. Uma solução para o PCE, também denominada de plano de corte, é gerada por um conjunto de padrões de corte (um padrão de corte define quantos e quais itens serão cortados de um objeto) e suas respectivas frequências, ou seja, quantos objetos em estoque devem ser cortados segundo cada padrão de corte, para produzir determinado subconjunto de itens.

Determinar, de forma ótima, a frequência com que cada padrão de corte deve ser utilizado é uma das grandes dificuldades na resolução destes problemas. A frequência de um padrão de corte deve ser um número inteiro e, mesmo para problemas com poucas variáveis, isso pode ser inviável. Desta forma, recorre-se a procedimentos heurísticos que, embora não forneçam uma solução ótima para o problema, de modo geral, apresentam soluções próximas da otimalidade.

As principais pesquisas sobre os PCE surgiram na década de 1960, com os trabalhos de Gilmore e Gomory (1961, 1963). Em 1961, os autores apresentaram um método pioneiro para a resolução de PCE, no qual utilizaram o método simplex com geração de colunas em um modelo de otimização linear, que resolveu, pela primeira vez, um problema real de corte de estoque unidimensional. Em Gilmore e Gomory (1963), foi apresentado um novo método para o problema da mochila, que é um subproblema a ser resolvido durante a resolução do PCE, fornecendo as novas colunas (padrões de corte) para o problema.

Haessler (1975) apresentou um procedimento heurístico para resolver problemas de corte de estoque unidimensionais, com custo fixo associado à troca de padrões de corte. Em Haessler (1980), foram propostas mudanças nos procedimentos de Gilmore e Gomory (1961, 1963), as quais indicaram que, controlar a geração dos padrões com limitações do número de itens, ajuda a reduzir problemas de arredondamento e mudanças de padrões de corte. Hinxman (1980) fez uma revisão dos problemas e métodos de resolução dos PCE e formalizou a heurística de repetição exaustiva, muito utilizada na prática, principalmente quando a demanda dos itens é baixa. Wascher e Gau (1996) reuniram vários procedimentos heurísticos para a resolução do PCE e realizaram um estudo computacional.

Vahrenkamp (1996) fez um estudo comparativo entre o algoritmo de Gilmore e Gomory (1961) para a solução do PCE e uma heurística baseada em algoritmos genéticos, relacionando a característica randômica dos algoritmos genéticos a uma escolha randômica de padrões de corte, visando minimizar a perda de material. Poldi e Arenales (2009) estudaram o problema de obtenção de uma solução inteira para o PCE, considerando baixas demandas e diferentes tamanhos de objetos em estoque.

Uma variação do PCE é o aproveitamento de sobras de objetos cortados, desde que estas sejam suficientemente grandes para retornar ao estoque e atender futuras demandas. Este problema denomina-se Problema de Corte de Estoque com Sobras Aproveitáveis (PCESA). No PCESA as sobras que retornam ao estoque são denominadas retalhos e não são computadas como perda. Neste problema, é interessante que os retalhos disponíveis em estoque tenham prioridade de uso, pois, além de ocuparem espaço físico, dependendo do material cortado, estes podem se tornar sucatas se não forem utilizados em um determinado período de tempo.

Brown (1971) foi o primeiro autor a mencionar o aproveitamento de sobras. Roodman (1986) propôs um procedimento heurístico para a geração de padrões para o PCE, tendo como objetivo minimizar a perda e a concentração das sobras em poucos padrões de corte. Essas sobras, desde que tivessem comprimento maior que um determinado parâmetro, retornariam ao estoque como retalho. O autor também considerou objetos em estoque com diferentes comprimentos e em quantidade limitada. Scheithauer (1991) apresentou um modelo matemático para resolver o PCESA, o qual foi resolvido utilizando a técnica de geração de colunas proposta por Gilmore e Gomory (1963). A estratégia para considerar o aproveitamento de sobras consiste em incluir itens extras aos demandados, sem haver demandas para serem atendidas. Estes itens extras estão disponíveis durante a geração de colunas, e são incluídos nos padrões de corte apenas para minimizar a perda.

Sinuany-Stern e Weiner (1994) consideraram o PCE com dois objetivos: minimizar a sobra gerada e acumular a máxima quantidade de sobras no último objeto a ser cortado, para que esta fosse maior que um determinado comprimento estabelecido e retornasse ao estoque para ser utilizada posteriormente. Gradisar et al. (1997) apresentaram um estudo sobre PCE em uma indústria de tecidos, que possuía em estoque objetos (rolos) com diferentes comprimentos. Foi proposto um modelo matemático para minimizar o número de itens cujas demandas não eram atendidas durante o processo de corte e a perda total de material, entretanto, este modelo não foi utilizado para resolver o problema. Os autores propuseram um procedimento heurístico (COLA), que também considera a possibilidade de sobras retornarem ao estoque para atender futuras demandas, caso tenham comprimento superior a um determinado parâmetro.

Koch et al. (2008) realizaram um estudo de caso, em uma indústria madeireira, e desenvolveram um modelo matemático para atender objetivos específicos da indústria, que possui o processo de corte interligado ao transporte e manipulação de material. Abuabara e Morabito (2009) utilizou o modelo matemático proposto por Gradisar et al. (1997) para resolver o PCESA. A pesquisa foi aplicada em uma empresa brasileira que corta tubos estruturais metálicos para a produção de aeronaves agrícolas. Cherri et al. (2009) realizaram alterações em heurísticas, construtivas e residuais, clássicas da literatura, para resolver o PCESA. Cui e Yang (2010) propuseram uma extensão do modelo de Scheithauer (1991), considerando que a quantidade de objetos em estoque é limitada e a quantidade de retalhos gerados nos padrões de corte pode ser controlada.

Cherri et al. (2013) modificaram as heurísticas propostas em Cherri et al. (2009) e, além de minimizar a perda, assume-se que retalhos em estoque devem ter prioridade de uso durante o processo de corte. Cherri et al. (2014) reuniram trabalhos da literatura que consideram o PCESA para o caso unidimensional. Neste *survey*, os autores apresentam as aplicações do PCESA, o modelo matemático (quando proposto), comentários dos resultados obtidos em cada trabalho e propostas para continuidades de estudos relacionados ao PCESA.

Neste trabalho, alterações são propostas em um modelo matemático recentemente proposto na literatura por Arenales et al. (2015), que considera o PCESA. Com as alterações realizadas, pretende-se maximizar o lucro das empresas, permitindo que retalhos sejam gerados para atender futuras demandas ou para venda a outras empresas, que utilizam estes objetos como matéria prima. Também será apresentado um procedimento heurístico residual para a obtenção de soluções inteiras. Embora vários procedimentos heurísticos tenham sido propostos na literatura para obtenção de soluções inteiras, esses procedimentos não consideram o aproveitamento de sobras.

Na Seção 2 o PCESA e venda de retalhos é apresentado juntamente com o modelo matemático. Na Seção 3 é descrito o procedimento heurístico para obtenção de soluções inteiras. Testes computacionais são apresentados na Seção 4. A Seção 5 destina-se às conclusões deste trabalho.

2. O PCESA com venda de retalhos

No PCESA com possibilidade de venda de retalhos, um conjunto de itens demandados deve ser produzido a partir de objetos padronizados ou retalhos. Similar ao PCE, são conhecidas as demandas dos itens e o estoque de objetos. As demandas devem ser atendidas cortando os objetos disponíveis, de modo a maximizar o lucro da empresa. Retalhos com comprimentos definidos previamente e em quantidades limitadas, para cada tipo, podem ser gerados para estoque e não são computados como perdas. Os retalhos disponíveis em estoque podem ser utilizados durante o processo de corte ou, se atrativo, podem ser vendidos para outras empresas que atendem seus pedidos a partir do corte desses objetos.

O modelo matemático apresentado a seguir foi obtido a partir de alterações no modelo proposto por Arenales et. al (2015) e considera essas possibilidades.

Dados para a modelagem do problema:

- S: número de tipos de objetos padronizados. Denotamos objetos tipo s, $s \in \{1, \ldots, S\}$;
- R: número de tipos de retalhos. Denotamos retalhos k, $k \in \{1, \ldots, R\}$;
- L_s: comprimento do objeto tipo s, $s = 1, \ldots, S$;
- L_k: comprimento do retalho tipo k, $k = 1, \ldots, R$;
- e_s: número de objetos tipo s em estoque, $s = 1, \ldots, S$;
- e_k: número de retalhos tipo k em estoque, $k = 1, \ldots, R$;
- m: número de tipos de itens demandados;
- ℓ_i : comprimento do item tipo i, $i = 1, \ldots, m$;
- d_i: demanda do item tipo i, $i = 1, \ldots, m$;
- J_s: conjunto de padrões de corte para o objeto tipo s, $s = 1, ..., S$;
- J_k: conjunto de padrões de corte para o retalho tipo k, $k = 1, ..., R$;
- $J_s(k)$: conjunto de padrões de corte para os objetos padronizados tipo s gerando retalho do tipo k, $k = 1, \ldots, R$, $s = 1, \ldots, S$;
- a_{ijs}: número de itens tipo i cortados de acordo com o padrão de corte j para o objeto s, $i = 1, ..., m$, $s = 1, ..., S$, $j \in J_s$;
- a_{ijsk}: número de itens tipo i cortados de acordo com o padrão de corte j para o objeto s e gerando retalho do tipo k, $i = 1, ..., m$, $k = 1, ...,R$, $s = 1, ..., S$, $j \in J_s(k)$;
- a_{ijk}: número de itens tipo i cortados de acordo com o padrão de corte j para o retalho do tipo k, $i = 1, ..., m$, $k = 1, ...R$, $j \in J_k$;
- c_{js}: lucro ao cortar o objeto s de acordo com o padrão de corte j, $s = 1, \ldots, S$, $j \in J_s$;
- c_{jsk}: lucro ao cortar o objeto s de acordo com o padrão de corte j e gerando um retalho do tipo k, $s = 1, \ldots, S$, $k = 1, \ldots, R$, $j \in J_s(k)$;
- c_{jk}: lucro ao cortar o retalho k de acordo com o padrão de corte j, $k = 1, \ldots, R$, $j \in J_k$;
- v_k: valor de venda do retalho do tipo k, $k = 1, \ldots, R$;
- U_k: número máximo permitido para cada tipo de retalho;
- α: parâmetro utilizado para estimular a geração de novos retalhos;
- α': parâmetro utilizado para estimular o uso de retalhos disponíveis em estoque;
- α'': parâmetro utilizado para estimular a venda de retalhos disponíveis em estoque.

Variáveis:

- x_{js}: número de objetos tipo s cortados segundo o padrão de corte j , $s = 1, \ldots, S$, $j \in J_s$;
- x_{jsk}: número de objetos tipo s cortados segundo o padrão de corte j e gerando um retalho do tipo k, $s = 1, \ldots, S$, $k = 1, \ldots, R$, $j \in J_s(k)$;
- x_{jk}: número de retalhos tipo k cortados segundo o padrão de corte j, $k = 1, \ldots, R$, $j \in J_k$;
- y_k: número de retalhos tipo k vendidos, $k = 1, \ldots, R$.

Modelo matemático

Maximizar $f(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{S} \sum_{j \in J_s} c_{js} x_{js} + \alpha \sum_{s=1}^{S} \sum_{k=1}^{R} \sum_{j \in J_s(k)} c_{jsk} x_{jsk} + \alpha' \sum_{k=1}^{R} \sum_{j \in J_k} c_{jk} x_{jk} + \alpha'' \sum_{k=1}^{R} v_k y_k$ (1)

Sujeito a:

$$\sum_{s=1}^{S} \sum_{j \in J_s} a_{ijs} x_{js} + \sum_{s=1}^{S} \sum_{k=1}^{R} \sum_{j \in J_s(k)} a_{ijsk} x_{jsk} + \sum_{k=1}^{R} \sum_{j \in J_k} a_{ijk} x_{jk} = d_i, \; i = 1, \ldots, m \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J_s} x_{js} + \sum_{k=1}^{R} \sum_{j \in J_s(k)} x_{jsk} \leq e_s, \; s = 1, \ldots, S \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J_k} x_{jk} + y_k \leq e_k, \; k = 1, \ldots, R \quad (4)$$

$$\sum_{s=1}^{S} \sum_{k=1}^{R} \sum_{j \in J_s(k)} x_{jsk} - \sum_{j \in J_k} x_{jk} - y_k \leq U_k - e_k, \; k = 1, \ldots, R \quad (5)$$

$x_{js} \geq 0$, $s = 1, \ldots, S, j \in J_s$; $x_{jsk} \geq 0$, $s = 1, \ldots, S$, $k = 1,\ldots, R$, $j \in J_s(k)$; $x_{jk} \geq 0$, $k = 1,\ldots, R$, $j \in J_k$; $y_k \geq 0$, $k = 1,\ldots, R$ e inteiros (6)

No modelo (1)-(6), a função objetivo (1) maximiza o lucro ao cortar objetos padronizados, retalhos, ou vender retalhos. Para calcular o lucro de cada padrão de corte, consideramos que os objetos disponíveis em estoque (padronizado ou retalhos) e os itens demandados possuem valores associados. Seja V_s o valor de cada objeto tipo s em estoque s = 1, ..., S, e v_i o valor de venda de cada item tipo i, i = 1, ..., m. O lucro de um padrão de corte gerado por um objeto padronizado é calculado por: $\sum_{i=1}^{m} (v_i * a_{ijs}) - V_s$. De modo análogo, obtém-se o lucro de um padrão de corte gerado por um retalho, porém, com um valor associado a cada retalho do tipo k em estoque, k = 1, ..., R. As restrições (2) asseguram que a quantidade de itens cortados atenda a demanda. O conjunto de restrições (3) garante que a quantidade de objetos padronizados utilizados durante o processo de corte não seja superior à quantidade disponível em estoque. As restrições (4) garantem que a quantidade de retalhos utilizada durante o processo, tanto para corte quanto para venda, não seja maior que a disponibilidade de retalhos em estoque. Estas restrições avaliam cada tipo de retalho individualmente. O conjunto de restrições (5) limita a quantidade de cada tipo de retalho que pode ser gerado durante o processo de corte. E as restrições (6) garantem a integralidade e não-negatividade das variáveis do problema.

De acordo com o modelo (1)-(6), um objeto padronizado pode ser completamente cortado ou parcialmente cortado. No segundo caso, dois objetos são gerados: um objeto reduzido que será cortado em itens e um retalho que retornará ao estoque para atender futuras demandas ou, caso seja mais lucrativo, ser vendido a outras empresas. A Figura 1 ilustra um objeto padronizado com um corte parcial.

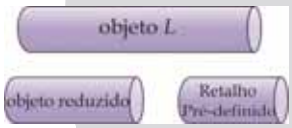

Figura 1: Objeto reduzido com retalho pré-definido.

Existem duas maneiras de considerar a venda de retalhos: gerar retalhos para vender ou vender retalhos que já estão em estoque. A possibilidade de gerar retalhos para vender não altera o modelo (1)-(6). Basta considerar que retalhos são itens demandados e incluí-los no processo de corte com ou sem demanda para ser atendida. Cui e Yang (2010) utilizaram essa abordagem, porém, com um modelo diferente.

Neste trabalho, consideramos a possibilidade de vender retalhos que já estão em estoque, desde que esta opção seja mais vantajosa que cortá-los em itens demandados. Para a venda de retalhos, podemos considerar duas situações: vender os retalhos durante o processo de corte, quando atrativo, e manter em estoque os que não forem vendidos (ou utilizados), ou então, após o processo de corte, vender todos os retalhos restantes em estoque.

Devido às condições de integralidade das variáveis em (6), é muito difícil resolver o modelo (1)-(6) na otimalidade. Neste caso, as condições de integralidade (6) são relaxadas e a técnica de geração de colunas (Gilmore e Gomory (1963)) é utilizada com algumas alterações para considerar o corte parcial dos objetos. Detalhes desse procedimento estão em Arenales et al. (2015).

3. Procedimento heurístico

Relaxando as condições de integralidade do modelo (1)-(6), obtemos soluções contínuas para o PCESA. Para obter soluções inteiras, um procedimento heurístico residual que também considera o aproveitamento de sobras é proposto. Este procedimento consiste em:

- Resolver o modelo (1)-(6) com as condições de integralidade relaxadas;
- Para cada padrão da solução contínua encontrada, arredonda-se o valor da frequência do padrão de corte para o número inteiro inferior ao fracionário obtido;
- Ordenar os padrões obtidos em ordem decrescente da frequência de cada padrão:
  - Para cada padrão, aumenta-se uma unidade da frequência e testa-se a factibilidade da nova solução (verificando as restrições de demanda e estoque). Caso a solução não seja factível, retorna-se a frequência ao valor anterior e o próximo padrão de corte é alterado e analisado;
- Verificar a restrição de retalhos gerados:
  - Se a restrição for violada (excesso de retalhos), ordenar os padrões que geram retalhos em ordem decrescente da perda gerada;
  - Seguindo a ordem estabelecida, diminuir a frequência do padrão em quantidade suficiente para respeitar a restrição. Se a frequência chegar a zero, descartar o padrão;
- Atualizar a demanda, o estoque de objetos padronizados e os retalhos.

Com o procedimento de arredondamento, muitos itens podem deixar de ser cortados, gerando um problema residual. Este problema residual é resolvido utilizando o modelo (1)-(6) e, em seguida, o procedimento heurístico. Este processo é repetido até que toda a demanda seja atendida.

Desenvolvemos toda a implementação do modelo (1)-(6) e do procedimento heurístico proposto utilizando a interface OPL do software CPLEX. Testes computacionais foram realizados, considerando períodos de tempo (Cherri et al. (2013)) para analisar o comportamento do modelo (1)-(6) e do procedimento heurístico, em função da variação da quantidade máxima permitida para novos retalhos (parâmetro U_k do modelo). Com o procedimento heurístico proposto, espera-se que as soluções inteiras apresentem o mesmo comportamento das soluções contínuas quando permitimos gerar mais retalhos para estoque. Os resultados, de alguns testes computacionais realizados com exemplos gerados aleatoriamente, são apresentados na Seção 4.

4. Testes computacionais

Os testes realizados simulam 5 períodos de tempo, representando uma semana de trabalho em uma indústria (segunda-feira a sexta-feira). Nesta simulação, os retalhos gerados em um período ficam disponíveis para o período seguinte, quando uma nova demanda de itens é gerada e deve ser atendida.

Classes de exemplos foram geradas aleatoriamente, combinando 2 categorias para o tamanho dos itens (médios e grandes) com 3 possíveis demandas (pequenas, médias e grandes). O intervalo no qual foram gerados os tamanhos e as demandas dos itens é apresentado na Tabela

1 (outros valores poderiam ser utilizados para definir as categorias). Itens pequenos não foram incluídos nos testes pelo fato de apresentarem boas soluções para o problema de corte, independente de haver aproveitamento de sobras.

Tabela 1: Intervalo de geração de valores para as categorias de itens e demandas.

Categoria	Tamanho	Demandas
Pequeno (P)	-	[1, 10]
Médio (M)	[140, 400]	[10, 50]
Grande (G)	[300, 700]	[50, 300]

No primeiro período de cada teste, o estoque foi composto por apenas um tipo de objeto padronizado, com dimensão 1200 e em quantidade suficiente para atender toda a demanda. Os períodos seguintes utilizam o estoque de retalhos originado da solução inteira do período anterior, e esse estoque também pode ser utilizado para a obtenção da solução contínua e inteira do período atual. Permitimos gerar retalhos de dimensão 400, 500 e 650, em quantidades variando entre U = 0, 3, 6 e 9 (outros valores poderiam ser utilizados para definir as dimensões dos retalhos e os valores de U). Com U = 3, pode ser gerado 1 retalho de cada tipo, ou seja, U_1 = 1, U_2 = 1 e U_3 = 1, com U = 6, 2 retalhos de cada tipo e, com U = 9, podem ser gerados 3 retalhos de cada tipo. Apenas a partir do segundo período retalhos podem estar disponíveis em estoque, caso eles tenham sido gerados no período anterior. Cada classe de exemplos possui 15 tipos de itens demandados.

Os valores associados aos itens demandados foram calculados por $1{,}1\ell_i$, i = 1, ..., m e o valor de venda para um retalho disponível em estoque é $1{,}05L_k$, k = 1, ..., R. Os valores associados aos objetos padronizados e retalhos foram definidos pelos seus respectivos comprimentos (outros valores poderiam ser utilizados). Nos testes realizados, assumimos $\alpha=\alpha'=\alpha''$ = 1. Entretanto, quando se atribui um valor menor ou maior que 1 a um dos parâmetros, α, α' ou α'', há estímulo ou penalidade para gerar, cortar ou vender retalhos.

A abordagem utilizada nos testes das Tabelas 2 e 3 foi a venda dos retalhos que restaram em estoque após o processo de corte. Essa venda ocorreu após a obtenção da solução contínua e antes da heurística de arredondamento. Além de melhorar diretamente a solução, com o lucro de venda de retalhos que não foram utilizados durante o processo de corte, esse procedimento permite que mais retalhos sejam gerados durante a resolução dos problemas residuais resultantes da execução da heurística.

Nas Tabelas 2 e 3 comparamos as médias de lucro para soluções contínuas e inteiras nas diferentes classes de exemplos, de acordo com a variação do parâmetro U_k, assim como a porcentagem de lucro que foi perdida da solução contínua para a solução inteira. As siglas MP, MM, MG, GP, GM e GG representam, respectivamente, classes de exemplos com itens médios e demandas pequenas, itens médios e demandas médias, itens médios e demandas grandes, itens grandes e demandas pequenas, itens grandes e demandas médias, e itens grandes e demandas grandes.

Tabela 2: Lucro para diferentes classes (Itens/Demanda), com U= 0 e U=3.

Solução	Classe	***U = 0***		***U = 3***	
		Lucro	***Perda de lucro (%)***	***Lucro***	***Perda de lucro (%)***
Contínua	**MP**	2394,33	56,38	2422,28	7,53
Inteira		1044,3		2239,8	

Contínua	**MM**	12422,17	3,62	12458,23	1,46
Inteira		11972,54		12276,04	
Contínua	**MG**	69351,23	0,47	69366,07	0,22
Inteira		69022,32		69216,82	
Contínua	**GP**	1618,58	33,36	1778,08	7,87
Inteira		1078,58		1638,08	
Contínua	**GM**	6737,66	4,51	6909,66	2,66
Inteira		6433,66		6725,66	
Contínua	**GG**	58877,98	0,87	59039,48	0,40
Inteira		58367,98		58804,48	

Tabela 3: Lucro para diferentes classes (Itens/Demanda), com U=6 e U=9.

Solução	**Classe**	***U = 6***		***U = 9***	
		Lucro	***Perda de lucro (%)***	***Lucro***	***Perda de lucro (%)***
Contínua	**MP**	2459,48	8,42	2459,8	4,55
Inteira		2252,3		2347,8	
Contínua	**MM**	12485,4	2,69	12511,33	1,72
Inteira		**12149,54**		12296,04	
Contínua	**MG**	69382,47	0,32	69384,97	0,25
Inteira		**69162,32**		69214,82	
Contínua	**GP**	1924,08	4,94	2047,08	9,53
Inteira		1829,08		1852,08	
Contínua	**GM**	7031,66	1,19	7240,16	3,45
Inteira		6947,66		6990,16	
Contínua	**GG**	59202,98	0,17	59337,98	0,14
Inteira		59102,98		59252,98	

Analisando os dados das Tabelas 2 e 3, verificamos a importância da geração de retalhos em quase todas as classes, tanto na solução contínua quanto na inteira. Na grande maioria dos testes, quanto maior a quantidade permitida de novos retalhos, maior o lucro obtido. Este aumento no lucro era esperado visto que a possiblidade de gerar retalhos melhora a qualidade dos padrões de corte. Aconteceram apenas duas exceções, nas soluções inteiras, destacadas em negrito.

Podemos observar o impacto da solução inteira, principalmente, na classe MP. Nesta classe, o lucro reduziu mais de 56% com a utilização da heurística quando U=0. Porém, quando foi permitido gerar até 9 novos retalhos (U=9) o lucro reduziu apenas 4,55%. De maneira geral, a heurística demonstrou um bom comportamento, visto que manteve o comportamento da solução contínua, principalmente nas classes com demandas grandes, em que o lucro diminuiu menos de 1% quando comparado à solução inteira com a solução contínua.

Para verificar a vantagem de vender os retalhos restantes em estoque após o processo de corte, as Tabelas 4 e 5 apresentam o lucro obtido para a solução inteira nas duas situações: vendendo e não vendendo os retalhos restantes. Quando é permitida a venda de retalhos (Sim) a solução é a mesma apresentada nas Tabelas 2 e 3. Nas Tabelas 4 e 5 não são apresentados os lucros para U = 0, uma vez que o primeiro período de testes se inicia com o estoque de retalhos nulo, além de não ser permitido gerar novos retalhos. Nessas tabelas, a coluna “Retalhos Ger./Vend.” refere-se as quantidades totais de retalhos gerados e vendidos durante todo o processo de corte.

Tabela 4: Lucros das soluções inteiras, com e sem venda de retalhos restantes, para U=3 e U=6.

Vendendo retalhos restantes?	Classe	*U = 3*			*U = 6*		
		Lucro	*Lucro com a Venda (%)*	*Retalhos Ger./Vend.*	*Lucro*	*Lucro com a Venda (%)*	*Retalhos Ger./Vend.*
Sim	**MP**	2239,8	4,98	6/5	2252,3	0,71	13/10
Não		2128,3		8/5	2236,3		11/7
Sim	**MM**	12276,04	1,59	10/7	12149,54	-0,54	15/11
Não		12080,54		10/5	12215,04		13/8
Sim	**MG**	69216,82	0,20	4/3	69162,32	0,12	9/6
Não		69079,32		8/5	69079,32		8/3
Sim	**GP**	1638,08	0,00	7/6	1829,08	0,36	14/12
Não		1638,08		7/6	1822,58		14/11
Sim	**GM**	6725,66	0,02	8/4	6947,66	0,47	12/6
Não		6724,16		6/2	6914,66		10/4
Sim	**GG**	58804,48	0,10	10/9	59102,98	-0,03	17/15
Não		58745,48		8/7	59122,48		15/13

Tabela 5: Lucros das soluções inteiras, com e sem venda de retalhos restantes, para U=9.

Vendendo retalhos restantes?	Classe	*U = 9*		
		Lucro	*Lucro com a Venda (%)*	*Retalhos Ger./Vend.*
Sim	**MP**	2347,8	8,20	11/9
Não		2155,3		11/8
Sim	**MM**	12296,04	0,17	21/17
Não		12275,54		20/13
Sim	**MG**	69214,82	0,00	10/7
Não		69214,82		11/6
Sim	**GP**	1852,08	-1,29	17/14
Não		1876,58		16/11
Sim	**GM**	6990,16	1,57	22/14
Não		6880,16		17/12
Sim	**GG**	59252,98	0,06	19/16
Não		59219,98		17/14

Como podemos observar nas Tabelas 4 e 5, o lucro obtido para a solução inteira foi maior vendendo os retalhos restantes após o processo de corte em 15 das 18 situações testadas, o que comprova as vantagens da abordagem utilizada. O aumento no lucro deve-se ao fato de que ao liberar o estoque com a venda dos retalhos, o modelo tem mais liberdade para gerar novos retalhos e, com isso, muitos padrões de corte podem ser melhorados. O valor negativo em algumas classes indica que, com a venda de retalhos restantes, não houve melhorias na qualidade da solução.

Os testes foram executados em um computador Intel Core i5, 4Gb de memória RAM. O tempo computacional para resolução dos problemas foi em torno de 20 segundos por período, considerado aceitável na prática.

5. Conclusão

Neste trabalho, abordamos o problema de corte de estoque unidimensional com sobras aproveitáveis (PCESA), com a possibilidade de uso e venda de retalhos em estoque. Para resolver este problema, realizamos uma pequena alteração em um modelo matemático proposto na literatura, com a finalidade de maximizar o lucro da empresa. Para considerar o aproveitamento de sobras, cortes parciais foram realizados nos objetos padronizados disponíveis em estoque, de modo a gerar retalhos com quantidades e tamanhos previamente definidos. O modelo proposto foi implementado utilizando a interface OPL do software CPLEX. Para obter soluções inteiras, um procedimento heurístico residual também foi proposto.

Para avaliar o desempenho da estratégia proposta, problemas foram gerados aleatoriamente, e períodos de tempo foram considerados, de modo que os retalhos gerados em um período possam ser utilizados ou vendidos no período seguinte. Os resultados obtidos mostraram um bom comportamento e desempenho do modelo matemático e da heurística proposta.

Como continuidade deste trabalho, outros testes devem ser realizados considerando a possibilidade de gerar mais variedades de retalhos. Outro procedimento heurístico também vem sendo investigado para a obtenção de soluções inteiras.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP – Proc.: 2013/18607-9).

Referências

Abuabara, A. e Morabito R. (2009), Cutting optimization of structural tubes to build agricultural light aircrafts, *Annals of Operations Research*, 149, 149-165.

Arenales, M.N., Cherri, A. C., Nascimento, D. N. e Vianna, **A. C. G.** (2015), A new mathematical model for the cutting stock/leftover problem. Notas do ICMC-USP: Série Computação, n.97, São Carlos: ICMC, 2015. 14p. Disponível em: <http://www.icmc.usp.br/CMS/Arquivos/arquivos_enviados/ESTAGIO-BIBLIO_171_Notas%20Serie %20Comp%2097.pdf>.

Brown, A. R. (1971), Optimum packing and depletion: the computer in space and resource usage proble. *New York: Macdonald - London and American Elsevier Inc*, 1971.

Cherri, A. C., Arenales, M. N. e Yanasse, H. H. (2009), The one-dimensional cutting stock problems with usable leftover: A heuristic approach, *European Journal of Operational Research*, 196, 897-908.

Cherri, A. C., Arenales, M. N. e Yanasse, H. H. (2013)**,** The usable leftover one-dimensional cutting stock problem — a priority-in-use heuristic, *International Transactions in Operational Research*, 20, 189-199.

Cherri, A. C., Arenales, M. N., Yanasse, H. H., Poldi, K. C. e Vianna, A. C. G. (2014), The one-dimensional cutting stock problem with usable leftovers - A Survey, *European Journal of Operational Research*, 236, 395-402.

Cui, Y. e Yang, Y. (2010), A heuristic for the one-dimensional cutting stock problem with usable leftover. *European Journal of Operational Research*, 204, 245-250.

Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. (1961)**,** A linear programming approach to the cutting stock problem, *Operations Research*, 9, 848-859.

Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. (1963), A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II, *Operations Research*, 11, 863-888.

Gradisar, M., Jesenko, J. e Resinovic, C. (1997), Optimization of roll cutting in clothing industry, *Computers & Operational Research*, 10, 945-953.

Haessler, R. W. (1975), Controlling cutting pattern changes in one-dimensional trim problems. *Operations Research*, 23, 483-493.
Haessler, R. W. (1980), A note on computational modifications to the Gilmore-Gomory cutting stock algorithm. *Operations Research*, 28, 1001-1005.
Hinxman, A. (1980), The trim-loss and assortment problems: a survey, *European Journal of Operational Research*, 5, 8-18.
Koch, S., König, S. e Wäscher, G. (2008), Linear programming for a cutting problem in the wood processing industry - a case study. *Working Paper* n° 14, FEMM.
Poldi, K. C. e Arenales, M. N. (2009), Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths, *Computers and Operations Research*, 36, 2074-2081.
Roodman, G. M. (1986), Near-optimal solutions to one-dimensional cutting stock problem, *Computers and Operations Research*, 13, 713-719.
Scheithauer, G. (1991), A note on handling residual length, *Optimization*, 22, 461 – 466.
Sinuany-Stern, Z. e Weiner, I. (1994), The one dimensional cutting stock problem using two objectives, *Journal of Operations Research Society*, 45, 231-236.
Vahrenkamp, R. (1996), Random search in the one-dimensional cutting stock problem. *European Journal of Operational Research*, 95, 191-200.
Wäscher, G. e Gau, T. (1996), Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: a computational study. *OR Specktrum*, 18, 131-144.