PROPRIEDADES E APLICAÇÕES DE GRAFOS DE CLIQUES CRÍTICAS

Lilian Markenzon
Núcleo de Computação Eletrônica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Av. Athos da Silveira, 274, CCMN, Cidade Universitária, 21941-611, RJ
markenzon@nce.ufrj.br

Christina F. E. M. Waga
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Rua São Francisco Xavier 524, Maracanã, 20559-900, RJ
waga@ime.uerj.br

RESUMO

Sendo G um grafo, uma clique crítica é aquela formada por vértices que possuam a mesma vizinhança fechada. Cliques críticas e o grafo de cliques críticas são conceitos que foram utilizados recentemente no reconhecimento de subclasses de grafos cordais. Neste trabalho apresentamos propriedades do grafo de cliques críticas de grafos cordais e mostramos como esta estrutura pode ser útil na solução de diversos problemas, dando como exemplos a determinação da folhagem mínima (*leafage*) e a determinação do número de dominação conexa dos grafos estritamente cordais.

PALAVRAS CHAVE. clique crítica, grafo estritamente cordal, folhagem mínima, dominação conexa.
Área Principal: Teoria e Algoritmos em Grafos

ABSTRACT

A clique such that all vertices has the same closed neighborhood is called a critical clique of a graph G. Recently, critical cliques and the graph of critical cliques were used in order to recognize subclasses of chordal graphs. In this work we present some properties of the graph of critical cliques of chordal graphs and we show how this structure can be helpful in the solution of several problems as, for instance, the determination of the leafage of the graph and the determination of connected domination number of a strictly chordal graph.

KEYWORDS. critical clique, strictly chordal graph, leafage, connected domination.
Main Area: Theory and Algorithms in Graphs

1. Introdução

Cliques críticas e o grafo de cliques críticas são noções introduzidas por Lin *et al.* (2000) que foram utilizadas por Dom *et al.* (2004) na definição da classe dos grafos *3-leaf-power*. Ainda pouco explorados, esses conceitos serão aqui utilizados na resolução eficiente de alguns problemas em grafos estritamente cordais.

Golumbic e Peled (2002) introduziram os *grafos bloco duplicados*, também denominados *grafos estritamente cordais* por Kennedy (2005) que apresentou uma definição baseada em propriedades de hipergrafos. Markenzon e Waga (2014) caracterizaram esses grafos via separadores minimais de vértices, o que permite o seu reconhecimento de forma simples e em tempo linear.

Neste trabalho mostramos primeiramente propriedades do grafo de cliques críticas para os grafos cordais e relacionamos esse grafo com o grafo de interseção de cliques. Em seguida, estudamos os parâmetros clássicos de dominação em grafos estritamente cordais. Também estendemos soluções conhecidas em grafos bloco para grafos estritamente cordais nos problemas de dominação conexa, conceito introduzido por Sampathkumar e Walikar (1979), e de determinação da folhagem mínima (*leafage*), definida por Lin *et al.* (1998).

2. Conceitos Básicos

Assume-se a familiaridade com os conceitos básicos de grafos cordais que podem ser encontrados em Blair e Peyton (1993) e Golumbic (2004). Nesta seção alguns conceitos são revistos.

Seja $G = (V(G), E(G))$, ou $G = (V, E)$, um grafo com *ordem* $|V| = n > 0$ e *tamanho* $|E| = m$. Neste trabalho todos os grafos considerados são conexos. A *vizinhança de um vértice* $v \in V$ é o conjunto $N(v) = \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$ e sua *vizinhança fechada* é $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Dois vértices u e v são *gêmeos verdadeiros* em G se $N[u] = N[v]$ e são *gêmeos falsos* se $N(u) = N(v)$ e $\{u, v\} \notin E$. Para qualquer subconjunto $S \subseteq V$, $G[S]$ é o *subgrafo de G induzido por S*. Um conjunto S é uma *clique* quando $G[S]$ é um grafo completo. Um vértice $v \in V$ é *simplicial em G* se $N(v)$ é uma clique. Vamos denotar por $Simp$ o conjunto de vértices simpliciais do grafo.

Um *grafo cordal* é aquele em que todo ciclo simples de comprimento maior ou igual a quatro possui uma *corda*, isto é, uma aresta ligando dois vértices não consecutivos do ciclo. Um subconjunto $S \subset V$ é um *separador* de G se ao menos dois vértices da mesma componente conexa de G estão em componentes conexas distintas de $G[V - S]$. O conjunto S é um *separador minimal* de G se S é um separador e nenhum subconjunto próprio de S separa o grafo. O conjunto $S \subset V$ é um *separador de vértices* para vértices não-adjacentes u e v (um *uv-separador*) se a remoção de S do grafo separa u e v em componentes conexas distintas. Se nenhum subconjunto próprio de S é um uv-separador então S é um *uv-separador minimal*. Se S é um uv-separador minimal para algum par de vértices u e v, ele é chamado *separador minimal de vértices* (*smv*).

O *grafo de interseção de cliques* (ou *grafo de cliques*) de um grafo cordal G, $CI(G)$, é o grafo conexo cujos vértices são as cliques maximais de G e cujas arestas ligam vértices que correspondem a cliques não disjuntas. O conjunto das cliques maximais de G é denotado por $\mathbb{Q}$. Uma *árvore de cliques* de G é uma árvore T cujos vértices são as cliques maximais de G e tais que para quaisquer cliques maximais Q e Q', cada clique no caminho entre Q e Q' em T contem $Q \cap Q'$. Para um grafo cordal G e uma árvore de cliques $T = (\mathbb{Q}, E(T))$, um conjunto $S \subset V$ é um *smv* de G se e somente se $S = Q \cap Q'$ para alguma aresta $\{Q, Q'\} \in E(T)$. Além disso, o superconjunto $\mathbb{M}$ de separadores minimais de vértices de G é o mesmo para toda árvore de cliques de G. A multiplicidade de um *smv* S, denotada por $\mu(S)$, é o número de vezes que S aparece em $\mathbb{M}$. O conjunto de separadores minimais de vértices de G é denotado por $\mathbb{S}$.

Vale ressaltar alguns tipos de cliques, definidas por Lin *et al.* (1998). Uma *clique simplicial* é uma clique maximal que contém pelo menos um vértice simplicial. Uma clique simplicial Q é dita uma *clique limítrofe* quando existe uma outra clique maximal Q' tal que $Q \cap Q'$ é o conjunto de vértices não simpliciais de Q.

Os grafos *gema*, *diamante* e *seta* são respectivamente os grafos da Figura 1. Um grafo é *livre de gema* (*diamante*, *seta*) quando não contém o grafo gema (diamante, seta) como subgrafo induzido. Um exemplo importante: um *grafo bloco* (grafo conexo onde cada componente biconexa é um grafo completo) é livre de diamante. Nesses grafos, todo *smv* é um conjunto unitário.

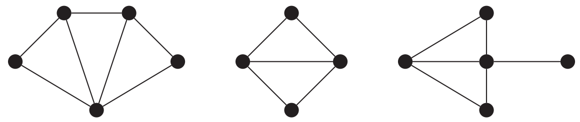


Figura 1: Grafos gema, diamante e seta.

3. Grafo de Cliques Críticas

Grafos cordais podem ser estudados através de estruturas distintas como separadores minimais de vértices, árvores de cliques, esquemas de eliminação perfeita, etc. Uma forma diversa foi introduzida por Lin *et al.* (2000): uma clique C de G é uma *clique crítica* quando todos os seus vértices são gêmeos verdadeiros e é maximal no sentido de que não existe nenhum vértice $v \in V$ de tal que $C \cup \{v\}$ é uma clique crítica.

Teorema 1 (Lin *et al.* (2000)) *O conjunto de cliques críticas de um grafo induz uma partição de seu conjunto de vértices.*

Proposição 2 *Seja G um grafo cordal. Então toda clique maximal é a união de cliques críticas.*

O *grafo de cliques críticas* de G, denotado por $CC(G)$, é o grafo cujo conjunto de vértices são as cliques críticas de G e tal que duas cliques críticas C e C' são adjacentes sempre que algum vértice de C for adjacente em G a vértices em C'.

Proposição 3 *Seja G um grafo cordal. Então qualquer clique maximal de $CC(G)$ tem no máximo um vértice simplicial.*

Teorema 4 *Seja $G = (V, E)$ um grafo cordal. Então os grafos $CI(G)$ e $CI(CC(G))$ são isomorfos.*

Prova: Uma clique maximal Q de G é composta por vértices simpliciais e vértices pertencentes a separadores minimais de vértices. Os vértices simpliciais de qualquer clique, se existirem, formam uma clique crítica, uma vez que são gêmeos verdadeiros. Os vértices restantes pertencem a:

1. um único separador minimal de vértices:

   O *smv* forma uma clique crítica.

2. ao menos dois separadores minimais de vértices:

   Considere S e S' contidos em Q. Se $S \cap S' = \emptyset$ então cada um forma uma clique crítica. Caso contrário, eles formam ao menos duas cliques críticas, dependendo de outras interseções. No pior caso, cada vértice poderá determinar uma clique crítica.

Cada clique maximal Q de G corresponde a exatamente uma clique maximal Q_c de $CC(G)$ com a mesma ou menor cardinalidade. Pela Proposição 2, a clique Q, de vértices de G, corresponde à união de cliques críticas $C_1, \ldots, C_k$, $1 \leq k \leq |Q|$, que compõem Q_c em $CC(G)$.
Considerando a relação de adjacência, as cliques críticas $C_1, \ldots, C_k$, formadas por vértices adjacentes em G, são adjacentes em $CC(G)$. Se os vértices de C_i pertencem a um *smv* de G, C_i pertence a pelo menos duas cliques maximais em $CI(G)$ e a mesma adjacência ocorrerá em $CI(CC(G))$. Então, existe um isomorfismo de vértices e arestas de $CI(G)$ e $CI(CC(G))$. ■

Teorema 5 *T é uma árvore de cliques de um grafo cordal G se e somente se T é isomorfa a uma árvore de cliques T_c de $CC(G)$.*

Prova: Sejam Q e Q' dois vértices (cliques maximais de G) de uma árvore de cliques T de G. Por definição de árvore de cliques, cada vértice no caminho entre Q e Q' em T contem $Q \cap Q'$. As cliques maximais Q e Q' têm cliques maximais correspondentes Q_c e Q'_c. Observando que Q_c é uma partição de Q, bem como Q'_c é uma partição de Q', temos que $Q \cap Q'$ é uma clique crítica composta por vértices oriundos de separadores minimais de vértices de G. Assim, $Q \cap Q' = \bigcup_{X \in Q_c \cap Q'_c} X$. Isso significa que existe um caminho correspondente entre Q_c e Q'_c e uma árvore de cliques T_c pode ser construída a partir de $CI(CC(G))$, isomorfa à árvore T. ■

É importante ressaltar que dois grafos de cliques isomorfos referentes a grafos cordais quaisquer não necessariamente possuem o mesmo conjunto de árvores de cliques.

4. Grafos Estritamente Cordais

Golumbic e Peled (2002) definiram *grafos bloco duplicados*. Um *grafo bloco duplicado* é o grafo obtido pela adição de zero ou mais gêmeos verdadeiros a cada vértice de um grafo bloco G. A classe foi também definida por Kennedy (2005) baseada em propriedades de hipergrafos e denominada *grafos estritamente cordais*. Em ambos os trabalhos os autores caracterizaram esses grafos via subgrafos proibidos.

Teorema 6 *Um grafo G é um grafo bloco duplicado se e somente se é um grafo cordal livre de gema e de seta.*

Brandstädt e Wagner (2010) apresentaram outra caracterização relacionada ao grafo de cliques críticas.

Teorema 7 (Brandstädt e Wagner (2010)) *Seja G um grafo conexo. G é um grafo estritamente cordal se e somente se $CC(G)$ é um grafo bloco.*

Grafos estritamente cordais possuem também propriedades baseadas em separadores minimais de vértices, como apresentado no seguinte teorema.

Teorema 8 (Markenzon e Waga (2014)) *Seja G um grafo cordal e $\mathbb{S}$ o conjunto de separadores minimais de vértices. G é um grafo estritamente cordal se e somente se quaisquer dois separadores minimais de vértices distintos de $\mathbb{S}$ são disjuntos.*

Baseado no Teorema 8, é possível obter um algoritmo de reconhecimento trivial. É imediato que árvores e grafos bloco são subfamílias dos grafos estritamente cordais que são, por sua vez, grafos ptolemaicos (grafo cordal livre de gema).

Proposição 9 *Seja G um grafo estritamente cordal. Qualquer clique crítica de G é formada por:*

1. *todos os vértices simpliciais de cada uma das cliques maximais de G;*
2. *todos os vértices de cada separador minimal de vértices de G.*

5. Folhagem Mínima

A *folhagem mínima* (*leafage*) de um grafo cordal G, $\ell(G)$, é o menor número de folhas possíveis dentre todas as árvores de cliques de G. O conceito foi introduzido por Lin *et al.* (1998) e Habib e Stacho (2009) mostraram que a determinação da folhagem mínima de um grafo cordal tem solução com complexidade de tempo de $O(n^3)$.

Shibata (1988) provou que se uma clique maximal Q é uma folha em alguma árvore de cliques então Q é uma clique limítrofe em G. Já Hara e Takemura (2006) provaram a recíproca desta propriedade. Assim, podemos apresentar o teorema.

Teorema 10 *Uma clique maximal é uma folha em alguma árvore de cliques se e somente se ela é uma clique limítrofe.*

Lin *et al.* (1998) apresentaram vários resultados sobre folhagem mínima, incluindo o que se segue.

Teorema 11 (Lin *et al.* (1998)) *Seja G um grafo bloco não completo. Então* $\ell(G) = \max\{2, r(G)\}$ *sendo* $r(G)$ *o número de vértices de corte de G que são vértices simpliciais em G* $[V - Simp]$.

Vamos considerar agora um grafo estritamente cordal G e seu grafo crítico $CC(G)$ que, pelo Teorema 7, é um grafo bloco.

Teorema 12 *Se G é um grafo estritamente cordal então* $\ell(G) = \ell(CC(G))$.

Prova: Pelos Teoremas 5 e 11. ■

Corolário 13 *Todas as cliques limítrofes de* $CC(G)$ *são cliques de ordem* 2.

O Teorema 11 permite uma solução em tempo linear para a determinação da folhagem mínima para a classe dos grafos estritamente cordais.

6. Dominação

Um conjunto $S \subseteq V$ de um grafo $G = (V, E)$ é um *conjunto dominante* se $N[S] = V$ ou, equivalentemente, para todo $v \in V - S$, $|N(v) \cap S| \geq 1$. Um conjunto dominante S é um *conjunto dominante minimal* quando nenhum de seus subconjuntos próprios é um conjunto dominante. Ore (1962) provou que se G é conexo e S é um conjunto dominante minimal então $V - S$ é um conjunto dominante.

O *número de dominação* $\gamma(G)$ é a menor cardinalidade dentre todas as cardinalidades dos conjuntos dominantes do grafo G e o *número de dominação superior* $\Gamma(G)$ é a maior cardinalidade dentre todas dos conjuntos dominantes minimais. Os grafos da Figura 2 têm (a) $\gamma(G) = 2$ e $\Gamma(G) = 5$ e (b) $\gamma(G) = 2$ e $\Gamma(G) = 3$.

Observe que o conjunto de separadores minimais de vértices em um grafo cordal o domina. Assim, tem-se o resultado a seguir.

Proposição 14 *Se G é um grafo cordal então* $\gamma(G) \leq |\mathbb{S}|$.

O próximo resultado é imediato bastando lembrar que em um grafo estritamente cordal seus separadores minimais de vértices são disjuntos.

Proposição 15 *Se G é um grafo estritamente cordal então* $\left\lceil \frac{|\mathbb{S}|}{2} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq |\mathbb{S}|$.

Teorema 16 *Se G é um grafo estritamente cordal então $\gamma(G) = \gamma(CC(G))$.*

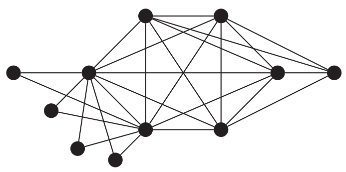
Prova: Seja $\gamma(CC(G)) = k$ e $\mathcal{D} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ um de seus conjuntos dominantes minimais. Cada clique crítica C_i domina a si mesma e a qualquer clique crítica que seja adjacente a ela. Considere o conjunto $D = \{v_1, \ldots, v_k\}$ tal que $v_i \in C_i$, $i = 1, \ldots, k$. Pelas definições, cada v_i domina exatamente os vértices da união de todas as cliques críticas dominadas por C_i, isto é, $N[v_i] = \bigcup_{X \in N[C_i]} X$. Como as cliques críticas determinam uma partição do conjunto de vértices de G (Teorema 1), temos que D domina G. Além disso, D é um conjunto dominante minimal em G pois, caso contrário, $\mathcal{D}$ não seria minimal em $CC(G)$. ■

Podemos provar de forma análoga a igualdade para o número de dominação superior.

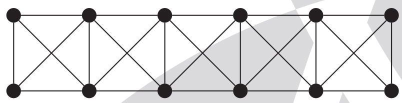
Teorema 17 *Se G um grafo estritamente cordal então $\Gamma(G) = \Gamma(CC(G))$.*

6.1. Dominação Conexa

Sampathkumar e Walikar (1979) definiram *conjunto dominante conexo* de G como sendo um conjunto dominante D cujo subgrafo induzido $G[D]$ é conexo. A cardinalidade do menor conjunto dominante conexo é o *número de dominação conexa* $\gamma_c(G)$. Trivialmente, tem-se que $\gamma(G) \leq \gamma_c(G)$. Na Figura 2, (a) $\gamma(G) = \gamma_c(G) = 2$ e (b) $\gamma(G) = 2 < 4 = \gamma_c(G)$.



(a)



(b)

Figura 2: Grafos estritamente cordais

Chen *et al.* (2004) estudaram os grafos com os números de dominação e de dominação conexa iguais, caracterizando os grafos blocos com esta propriedade. Para tal, bloco de borda e vértice de corte de borda foram definidos. Um bloco de um grafo G é um *bloco de borda* de G quando possui no máximo um vértice de corte e esse é denominado *vértice de corte de borda* do grafo.

Teorema 18 (Chen *et al.* (2004)) *Seja G um grafo bloco e F o conjunto de vértices de corte. Então,* $\gamma_c(G) = \begin{cases} 1 & \textit{se } G \textit{ é o grafo completo} \\ |F| & \textit{caso contrário.} \end{cases}$

Teorema 19 (Chen *et al.* (2004)) *Seja G um grafo bloco com pelo menos duas cliques maximais. Então, $\gamma(G) = \gamma_c(G)$ se e somente se todo vértice de corte de G é um vértice de corte de borda.*

A partir das ideias contidas nesses teoremas, dado um grafo G estritamente cordal, é possível considerar primeiramente o número de dominação conexa de seu grafo de cliques críticas e depois obter alguns resultados para o grafo G propriamente dito.

Teorema 20 *Se G um grafo estritamente cordal. Então,* $\gamma_c(CC(G)) = \begin{cases} 1 & \textit{se } G \textit{ é o grafo completo} \\ |\mathbb{S}| & \textit{caso contrário.} \end{cases}$

Prova: $CC(G)$ é um grafo bloco e, pela Proposição 9, o número de vértices de corte $CC(G)$ é exatamente o número de separadores minimais de vértices de G. ■

Podemos demonstrar de forma análoga ao Teorema 16 o seguinte resultado.

Teorema 21 *Se G é um grafo estritamente cordal então* $\gamma_c(G) = \gamma_c(CC(G))$.

Assim, estendemos o Teorema 19 para a classe dos grafos estritamente cordais.

Teorema 22 *Seja G um grafo estritamente cordal. Então, $\gamma(G) = \gamma_c(G)$ se e somente se todo separador minimal de vértices está contido em uma clique limítrofe.*

Prova: Pelo Teorema 16, $\gamma(G) = \gamma(CC(G))$. Pelo Teorema 19, $\gamma(CC(G)) = \gamma_c(CC(G))$ quando todo vértice de corte é um vértice de corte de borda. Um vértice de corte C de $CC(G))$ corresponde ao *smv* S em G tal que $C = S$, já que G é estritamente cordal. Além disso, C é o único vértice de corte do bloco ao qual pertence. Pelo Corolário 13, esse bloco é uma clique de ordem 2, isto é, a outra clique crítica que o compõe é uma clique formada por vértices simpliciais de G. Desta forma, S está propriamente contido em uma clique limítrofe do grafo G. Pelo Teorema 21, $\gamma_c(G) = \gamma_c(CC(G))$. Então, $\gamma(G) = \gamma_c(G)$ se e somente se todo separador minimal de vértices está contido em uma clique limítrofe. ■

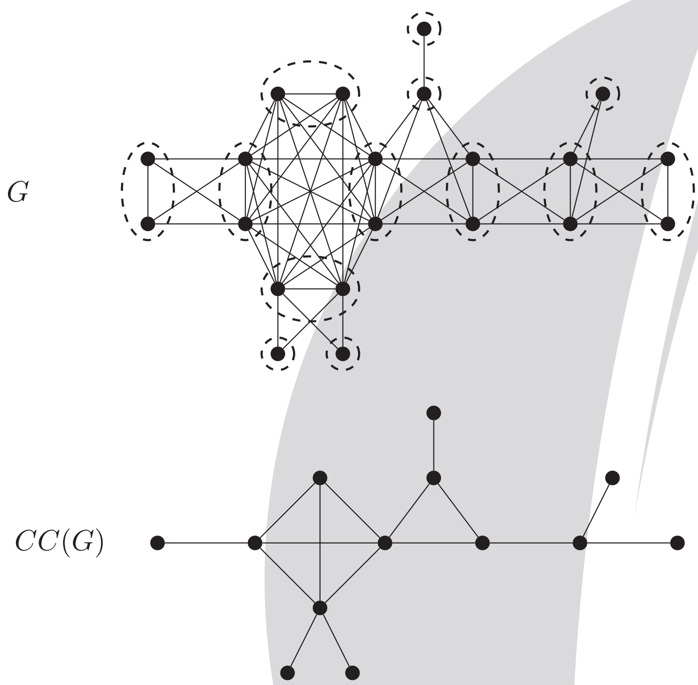


Figura 3: Grafo G e seu grafo de cliques críticas com $\ell(G) = 4$, $\gamma(G) = 4$, $\gamma_c(G) = 6$ e $\Gamma(G) = 8$

Corolário 23 *Se todas as cliques simpliciais de um grafo estritamente cordal G são cliques limítrofes então $\gamma(G) = \gamma_c(G) = \Gamma(G)$.*

7. Comentários Finais

Como podemos perceber na Figura 3, o grafo de cliques críticas tende a ser um grafo bem mais simples do que o grafo original. Isto ocorre naturalmente pois $CC(G)$ é num certo sentido uma compactação do grafo G em que os excessos (os vértices gêmeos verdadeiros) foram retirados. Assim, por exemplo, podemos decidir rapidamente quais são as cliques limítrofes do grafo G, bastando observar as cliques de $CC(G)$.

Agradecimentos: Os autores agradecem ao CNPq (Processos 473798/2012-3 e 304676/2013-6) pelo financiamento parcial desta pesquisa.

Referências

Blair, J.R.S., Peyton, B. (1993), An introduction to chordal graphs and clique trees, In: George, J.A., Gilbert, J. R., Liu, J. W. H. (Eds.), *Graph theory and sparse matrix computation*, Springer Verlag, IMA 56, 1-30.

Brandstädt, A., Wagner, P. (2010), Characterising (k,l)-leaf powers, *Discrete Appl. Math.* 158, 110-122.

Chen, X.-g., Sun, L., Xing, H.-m. (2004), Characterization of graphs with equal domination and connected domination numbers, *Discrete Math.* 289, 129-135.

Dom, M., Guo, J., Hüffner, F., Niedermeier, R. (2004), Error compensation in leaf root problems, *Lecture Notes in Comput. Sci.* 3341, 389-401.

Golumbic, M.C., *Algorithmic graph theory and perfect graphs* (2^{nd} edition), Academic Press, New York, 2004.

Golumbic, M.C., Peled, U.N. (2002), Block duplicate graphs and a hierarchy of chordal graphs, *Discrete Appl. Math.* 124, 67-71.

Habib, M., Stacho, J. (2009), Polynomial-time algorithm for the leafage of chordal graphs, *Lecture Notes in Comput. Sci.* 5757, 290-300.

Hara, H., Takemura, A. (2006), Boundary cliques, clique trees and perfect sequences of maximal cliques of a chordal graph, METR 2006-41, Department of Mathematical Informatics, University of Tokyo.

Kennedy, W. (2005), Strictly chordal graphs and phylogenetic roots, Master Thesis, University of Alberta.

Lin, G.-H., Jiang, T., Kearney, P.E. (2000), Phylogenetic k-root and Steiner k-root, *Lecture Notes in Comput. Sci.* 1969, 539-551.

Lin, I.-J., McKee, T.A., West, D.B. (1998), The leafage of a chordal graph, *Discuss. Math. Graph Theory* 18, 23-48.

Markenzon, L., Waga, C.F.E.M. (2014), New results on ptolemaic graphs, *Discrete Appl. Math.* http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2014.03.024

Ore, O., *Theory of graphs*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 38, Providence, RI, 1962.

Sampathkumar, E., Walikar, H. B. (1979), The connected domination number of a graph, *J. Math. Phys. Sci.* 13, 607-613.

Shibata, Y. (1988), On the tree representation of chordal graphs, *J. Graph Theory* 12, 421-428.