PROPOSTA DE INTEGRAÇÃO DO MÉTODO MULTICRITÉRIO MACBETH PARA RESTRIÇÕES AOS PESOS EM ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS

Gustavo Naciff de Andrade
Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, São Domingos, 24210-240, Niterói, RJ
gnandrade@id.uff.br

João Carlos Correia Baptista Soares de Mello
Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, São Domingos, 24210-240, Niterói, RJ
jccbsmello@id.uff.br

RESUMO

Este artigo propõe utilizar o método multicritério MACBETH para restringir os pesos em problemas de Análise Envoltória de Dados (DEA). Ao contrario de abordagens anteriores de integração dos referidos métodos, o presente estudo inova ao adaptar as restrições do MACBETH diretamente no problema de programação linear de DEA. Inicialmente o decisor emite julgamentos de valor sobre os *outputs* que são tratados como critérios de um problema multicritério. Os questionamentos ao decisor sobre os *outputs* são realizados respeitando a metodologia MACBETH no qual são feitas comparações qualitativas (não numéricas) par a par para compor uma matriz de julgamentos. Estas informações são incorporadas ao problema de programação linear que irá avaliar a eficiência de cada unidade produtiva. Além da possibilidade de incorporar opinião do decisor esta modelagem possibilita evitar atribuição de pesos zero aos *outputs* e aumentar o nível de discriminação em ranking de eficiências.

PALAVARAS CHAVE. Análise Envoltória de Dados, MACBETH, Apoio à Decisão.

Área principal (indique, em ordem de prioridade a área de conhecimento de seu artigo pois o sistema JEMS coloca em ordem alfabética)

ABSTRACT

This paper uses the multicriteria method MACBETH to restrict the weights in Data Envelopment Analysis (DEA). Unlike previous approaches the present study adapts MACBETH restrictions on the linear programming problem of DEA creating an innovative approach. The decision maker emits value judgments about the outputs that are treated as criteria of a multicriteria problem. The questions to the decision-maker are made in accordance with the MACBETH methodology in which are made qualitative pairwise comparisons (non-numeric) to build a matrix of judgements. This information is incorporated into the linear programming problem that will evaluate the efficiency of each production unit. Besides the possibility of incorporating the decision maker opinion, this modeling allows avoid assigning zero weights to the outputs and increases the level of discrimination in ranking efficiencies.

KEYWORDS. Data Envelopment Analysis. MACBETH. Decision Aid.

Main area (inform by priority the área of the article because JEMS system makes the classification alfabeticaly)

1. Introdução

A Análise Envoltória de Dados (DEA – *Data Envlopment Analysis*) é uma técnica não paramétrica para medir a eficiência relativa de unidades produtivas (ou *decision making units* – DMU´s), desenvolvida por Charnes et al. (1978) a partir do conceito de eficiência desenvolvido por Farrell (1957).

A modelagem DEA leva em consideração que as DMU´s estão submetidas a processos produtivos homogêneos. A eficiência é então estimada a partir da relação entre a soma ponderada dos recursos (ou *outputs*) produzidos e dos insumos (ou *inputs*) consumidos pela unidade avaliada, levando em consideração todas as outras DMU´s da amostra.

Cada DMU é avaliada a partir de um problema de programação linear (PPL) através da atribuição de pesos para os *outputs* e *inputs* de forma a maximizar a eficiência da unidade avaliada. Ou seja, a atribuição dos referidos pesos é feita da forma mais benevolente possível: atribui-se pesos elevados para *inputs* e *outputs* em que o desempenho comparativo da DMU avaliada é bom e pesos menores (ou nulos) para os casos em que o desempenho comparativo é modesto.

Para Allen et al. (1997) embora a referida benevolência de DEA seja em muitos casos um dos pontos fortes deste tipo de modelagem, há situações em que a atribuição dos pesos da modelagem pode ser incoerente com conhecimento prévio ou visões aceitas sobre os valores relativos dos *inputs* ou *outputs*.

Em tais situações faz-se necessário a incorporar à modelagem julgamentos de valor a fim de que a avaliação da eficiência seja coerente com conhecimentos prévios. Este tipo de modelagem tem sido executado na literatura através de restrições aos pesos em DEA.

O presente artigo propõe agregar à modelagem DEA as preferências do decisor a partir do método multicritério MACBETH (Bana e Costa e Vansnick (1994)). Esta abordagem permite inserir julgamentos de valor ao problema sem contudo exigir do decisor que explicite numericamente suas preferências. Ao contrário, os julgamentos serão feitos através da comparação par a par qualitativamente, considerando os outputs como critérios.

Soares de Mello et al. (2002) e Oliveira et al. (2008) já utilizaram MACBETH como ferramenta para restringir os pesos em DEA. Ambas as abordagens utilizam os intervalos de pesos obtidos a partir do modelo multicritério para em um segundo momento inserir as restrições na modelagem DEA. Esta abordagem é passível de critica uma vez que os intervalos gerados pelo *software* MACBETH só são validos se os pesos de todos os outros critérios se mantiverem fixos. Para superar tal fato este artigo apresenta proposta estruturalmente diferente dos referidos estudos adaptando as restrições do modelo multicritério ao problema de programação linear de DEA. Desta forma garante-se que a eficiência é analisada respeitando as preferências do decisor.

2. Restrições aos pesos em DEA

O problema de programação linear desenvolvido em Charnes et al. (1978), conhecido na literatura como o modelo de retornos constantes de escala, supõe que um aumento proporcional nos *inputs* do processo corresponde a um aumento proporcional nas saídas (*outputs*). O modelo pode ser orientado a *input* (no qual se busca minimizar as entradas mantendo-se as saídas constantes) ou a *output* (no qual se busca maximizar as saídas mantendo-se as entradas constantes). Em (1) é apresentado o problema de programação linear orientado a *output*.

$$Min\ h_0 = \sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0} \quad (1)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{r} u_j y_{j0} = 1$$
$$\sum_{i=1}^{r} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$$
$$u_j \geq 0, v_i \geq 0, \forall j, i$$

Onde h_o é o inverso da eficiência da DMU analisada o; u_i, v_j são os pesos dos *inputs* e *outputs* com i=1,...,r e j=1...,s; y_{jk} e x_{ik} são os *inputs* e *outputs* j da DMU k, respectivamente, com k variando de 1 a n; x_{i0} y y_{j0} representam os *inputs* e *outputs* da DMU o.

Do problema de programação linear (1) é possível observar que DEA permite total flexibilidade na atribuição dos pesos (u_i, v_j). Embora esta flexibilidade seja em muitos casos reconhecida como um dos pontos fortes de DEA, Angulo-Meza e Lins (2002) destacam que em alguns casos tal fato pode conduzir situações indesejadas tais como: a atribuição de pesos irreais (atribuindo peso zero a variáveis consideradas importantes, por exemplo), baixo poder de discriminação entre as DMU´s, e no caso de unidades extremo-eficientes a existência de múltiplas soluções ótimas. O tema de estudo do presente artigo está relacionado ao problema da atribuição de esquemas de pesos irreais e a baixa capacidade de discriminação, o que pode ser feito através do método de restrição aos pesos.

Segundo Angulo-Meza e Lins (2002) o principal objetivo dos métodos de restrição aos pesos é estabelecer limites pelos quais os pesos podem variar preservando alguma flexibilidade e alguma incerteza sobre o real valor dos pesos. Para Pedraja-Chaparro et al. (1997) a imposição de restrições ao peso implica a formulação de juízos de valor entre os diferentes *outputs* e sobre os custos de oportunidade dos *inputs* que produzem os referidos *outputs*.

Conforme Allen et al. (1997) existe uma serie de métodos que incorporam julgamentos de valor à modelagem DEA, sendo a restrição aos pesos uma das mais usuais. Dentre as abordagens na literatura para restrição aos pesos em DEA destacam-se as restrições diretas aos pesos e a região de segurança.

A restrição direta aos pesos foi originalmente desenvolvida por Dyson e Thanassoulis (1988), e impõe limites entre os quais os pesos de alguns ou todos *inputs* ou *outputs* podem variar. Esta abordagem acrescenta à modelagem original de DEA o seguinte tipo de restrição:

$$\alpha_i \leq u_i \leq \beta_i \quad (2)$$
$$\alpha_j \leq v_j \leq \beta_j \quad (3)$$

No entanto para aplicar este tipo de abordagem é necessário incialmente rodar o modelo DEA clássico para determinar as dimensões dos pesos de cada variável, uma vez que estes são dependentes da magnitude das variáveis. Além disso, a atribuição de pesos tarefa de atribuir pesos diretamente pode ser extremamente árdua para um decisor e pode em muitos casos resultar em inviabilidade.

Thompson et al. (1990) propôs a classificação de dois tipos regiões de segurança. Na região de segurança de tipo I, onde estão classificadas o método *Cone Ratio* desenvolvido por Charnes et al. (1989), na qual as restrições buscam adicionar ordenação relativa ou valores relativos de *inputs* ou *outputs*, mas não relações entre *inputs* e *outputs*. Já a região de segurança tipo II, que não é objeto do presente estudo, estabelece relações entre pesos de *input* e *output*. As restrições típicas de região de segurança tipo I podem ser descritas por:

$$k_i u_i + k_{i+1} u_{i+1} \leq u_{i+2} \quad (4)$$

Ou

$$\alpha_i \leq \frac{u_i}{u_{i+1}} \leq \beta_i \quad (5)$$

As restrições descritas em (5) refletem taxas marginais de substituição dos *inputs* ou *outputs* envolvidos. Por fim, conforme Thompson et al. (1990) os limites das regiões de segurança devem ser estabelecidos com base nos dados do problema e na opinião de um especialista.

Certamente o estabelecimento de tais relações de forma direta não é uma tarefa fácil mesmo para um especialista no problema pesquisado, podendo muitas vezes conduzir à inviabilidade do problema. Neste contexto o presente estudo, busca resolver o problema da ordenação dos pesos dos *outputs* (região de segurança tipo I) integrando DEA ao método multicritério MACBETH (desenvolvido em Bana e Costa e (1994)). Assim, a partir da comparação de critério de forma qualitativa são inseridas na modelagem DEA as preferências do decisor.

3. Método Multicritério MACBETH

O MACBETH (*Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique*) originalmente desenvolvido por Bana e Costa e Vansnick (1994) e sua formulação mais atual pode ser encontrada em Bana e Costa et al. (2012). O MACBETH é uma abordagem multicritério de apoio à decisão para medir a atratividade ou o valor de alternativas através da comparação não numérica par a par. Para tanto, o método utiliza sete categorias qualitativas para captar a preferência do decisor. Assim, seja duas alternativas do modelo, o decisor deve comparar as opções e informar se é indiferente ou se a diferença é muito fraca, fraca, moderada, forte, muito forte ou extrema.

Em termos práticos, para medir ordinalmente a atratividade das opções x de um conjunto finito X, associa-se a cada x um número real $v(x)$ tal que satisfaça as condições: de preferência estrita (6) e de indiferença (7).

$$\forall x, y \in X: xPy \Leftrightarrow v(x) > v(y) \tag{6}$$

$$\forall x, y \in X: xIy \Leftrightarrow v(x) = v(y) \tag{7}$$

Para evitar arbitrariedades típicas de agregação de ordenações feitas separadamente de cada critério (Arrow (1951)), é possível obter informações cardinais do decisor, de tal modo que também atenda à condição adicional (eq. 3).

$$\forall\, w, x, y, z \in X: xPy\ wPz \Leftrightarrow \frac{v(x)-v(y)}{v(w)-v(z)} \tag{8}$$

Respeitando tais condições, é estabelecida uma escala numérica de intervalos ($v: X \rightarrow R: x \rightarrow v(x)$). No MACBETH a transição da informação ordinal para a cardinal é feita comparando as opções aos pares de forma qualitativa (Bana e Costa et al. 2013).

No *software* que implementa o modelo (M-MACBETH), a medida que as avaliações vão sendo inseridas na matriz de julgamentos, verifica-se automaticamente a consistência e, caso haja alguma inconsistência, indica-se possíveis soluções.

A partir da matriz de julgamentos, o MACBETH propõe uma pontuação para cada opção que forma a escala numérica do método. Seja a diferença as categorias que diferem a atratividade (C_k) com k=0,...,6, no qual "nula" (C_0), "muito fraco" (C_1), "fraco" (C_2), "moderada" (C_3), "forte" (C_4), "muito forte" (C_5) e "extrema" (C_6). Além disso, se $v(a^+)$ e $v(a^-)$ são, respectivamente, a maior e a menor pontuação entre as opções, a escala MACBETH de base pode ser encontrada resolvendo o problema de programação linear descrito em (9).

LP MACBETH: (9)

$Min[v(a^+), v(a^-)]$

Sujeito a:

$v(a^-) = 0$ (pontuação arbitrária)

$\forall (a,b) \in C_0: v(a) - v(b) = 0.$

$\forall (a,b) \in C_i \cup \ldots \cup C_s\ com\ i, s \in \{1,2,3,4,5,6\} e\ i \leq s: v(a) - v(b) \geq i$

$\forall (a,b) \in C_i \cup \ldots \cup C_s\ e\ \forall (c,d) \in C_{i'} \cup \ldots \cup C_{s'}\ com\ i, s, i' e\ s' \in \{1,2,3,4,5,6\}, i \leq s, i' \leq s', e\ i > s' : [v(a) - v(b)] - [v(c) - v(d)] \geq i - s'$

4. MACBETH como ferramenta para restrição aos pesos em DEA

A utilização de MACBETH para restringir os pesos em DEA foi estudada anteriormente em Soares de Mello et al. (2002) e Oliveira et al (2008). No entanto em ambos os estudos a metodologia adotada é diferente da aqui proposta. Em Soares de Mello et al. (2002) foi utilizado os intervalos gerados pela análise multicritério para restringir os *inputs* e *outputs* virtuais. Já em Oliveira et al. (2008) também foi utilizado o intervalo gerado, mas como restrição aos pesos. No entanto os intervalos gerados só são válidos para um determinado peso caso todos os outros sejam mantidos constantes. Como esta condição não será respeitada pelo modelo DEA a modelagem em ambos os casos torna-se passível de críticas. Ao contrário dos referidos estudos, a proposta deste artigo é integrar os métodos DEA e MACBETH através de um PPL único capaz de estimar a eficiência e ao mesmo tempo respeitar o julgamento do decisor.

A abordagem aqui desenvolvida pretende possibilitar estabelecer relações entre os pesos dos *outputs* de um modelo DEA, levando em consideração julgamentos de valor de um decisor em relação à importância desses *outputs* para o computo da eficiência da DMU. Para tanto utiliza-se modelagem derivada do MACBETH de forma que os *outputs* do modelo DEA serão avaliados qualitativamente par a par como se fossem critérios do método multicritério em questão.

Para iniciar o estabelecimento das relações de preferências através das comparações par a par dos critérios (*outputs*) é necessário primeiramente definir os níveis de desempenhos considerados bom e neutro para cada um dos critérios. Assim, optou-se por definir como um bom desempenho no critério (u_j) o maior valor do output (y_{jk}) encontrado na amostra analisada. Analogamente o desempenho neutro no mesmo critério é definido como o menor valor (y_{jk}) da amostra.

Adicionalmente para evitar atribuição de peso zero aos *outputs* da modelagem DEA, arbitra-se o chamado critério neutro como sendo aquele com desempenho neutro em todos os critérios e define-se seu valor como u_0=0.

Desta forma as comparações par a par são realizadas para compor a matriz de preferencias do decisor. Conforme descrito em Bana e Costa e Chagas (2004) o procedimento é realizado da seguinte forma:

- Considerando os níveis de “neutro” e “bom” definido para cada critério, questiona-se o decisor da seguinte forma: “Imagine que exista uma opção que seja neutra em todos os critérios estabelecidos. Quanto aumentaria a atratividade geral desta opção se ela passasse de “neutra” para “bom” no critério X?” A mesma questão é repetida para todos os critérios. De posse de tal informação os critérios são ordenados em ordem decrescente de atratividade na matriz de julgamentos.
- No segundo momento o decisor emite julgamentos sobre a diferença de atratividade entre diferentes trocas possíveis. Ou seja, é feita ao decisor perguntas do tipo: “Quanto mais atrativo é uma troca de neutro para bom no critério X do que no critério Y?”. Novamente o decisor irá emitir um dos sete possíveis julgamentos de valor. E ao final do processo a matriz de preferencias estará preenchida.

De posse da matriz de julgamentos é necessário desenvolver um problema de programação linear capaz de simultaneamente estimar a eficiência das DMU´s como a modelagem DEA e levar em consideração os julgamentos de valor emitidos pelo decisor através de MACBETH. É portanto necessário integrar às restrições do MACBETH ao problema de programação linear de DEA

Assim, a partir dos PPL´s de DEA orientado a output e do MACBETH descritos em (1) e (9), é possível propor a integração dos PPL´s conforme apresentado em (10). As restrições R1, R2 e R7 são originárias do PPL de DEA e as restrições R3, R4, R5 e R6 são oriundas do PPL do MACBETH.

$$Min\ h_0 = \sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0} \tag{10}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{r} u_j y_{j0} = 1 \qquad \text{R1}$$

$$\sum_{i=1}^{r} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \leq 0, \forall k \qquad \text{R2}$$

$$(u_0) = 0\ \text{(pontuação arbitrária)} \qquad \text{R3}$$

$$\forall (output_a, output_b) \in C_0 : (u_a) - (u_b) = 0. \qquad \text{R4}$$

$$\forall (output_a, output_b) \in C_i \cup \ldots \cup C_s\ com\ i, s \in \{1,2,3,4,5,6\} e\ i \leq s : (u_a) - (u_b) \geq i \qquad \text{R5}$$

$$\begin{aligned} &\forall (output_a, output_b) \in C_i \cup \ldots \cup C_s\ e\ \forall (output_c, output_d) \\ &\quad \in C_{i'} \cup \ldots \cup C_{s'}\ com\ i, s, i'e\ s' \in \{1,2,3,4,5,6\}, i \leq s, i' \leq s', e\ i > s' \\ &\quad : [(u_a) - (u_b)] - [(u_c) - (u_d)] \geq i - s' \end{aligned} \qquad \text{R6}$$

$$u_j \geq 0, v_i \geq 0, \forall j, i \qquad \text{R7}$$

No entanto esta modelagem conduziria à inviabilidade em grande parte dos problemas tal qual observado nas restrições diretas aos pesos. A restrição R1 estabelece que o output virtual (somatório dos produtos entre pesos e os valores dos *outputs*) seja igual à unidade. No entanto as restrições R5 e R6 estabelecem que a diferença entre os pesos deve estar contida no intervalo entre 0 e 6. Desta forma o PPL como o proposto em (10) só seria viável para os casos em que os valores de *outputs* fossem suficientemente pequenos de forma a possibilitar que os pesos fossem tais que pudessem atender as restrições impostas em R5 e R6, além da R1.

Desta forma, visando tornar a formulação o mais genérica possível é proposto que os valores de i e s' das restrições R5 e R6 sejam multiplicados por uma constante (α) a ser estimada para cada PPL. A constante α assegura que as categorias possam ser adaptadas para os diferentes PPL´s mantendo a premissa multiplicativa de que o valor atribuído à categoria 6 é seis vezes maior do que a categoria 1, 3 vezes maior que a categoria 2 e assim sucessivamente. Assim as restrições R5 e R6 passam à seguinte formulação:

$$\forall (output_a, output_b) \in C_i \cup \ldots \cup C_s\ com\ i, s \in \{1,2,3,4,5,6\} e\ i \leq s : (u_a) - (u_b) \geq i\alpha \qquad \text{R8}$$

$$\begin{aligned} &\forall (output_a, output_b) \in C_i \cup \ldots \cup C_s\ e\ \forall (output_c, output_d) \\ &\quad \in C_{i'} \cup \ldots \cup C_{s'}\ com\ i, s, i'e\ s' \in \{1,2,3,4,5,6\}, i \leq s, i' \leq s', e\ i > s' \\ &\quad : [(u_a) - (u_b)] - [(u_c) - (u_d)] \geq i\alpha - s'\alpha \end{aligned} \qquad \text{R9}$$

No entanto a resolução do PPL descrito em (10) já considerando a substituição das restrições R5 e R6 pelas descritas em R8 e R9, sempre conduziria a valores de $\alpha = 0$. Tal fato pode ocorre já que a maior eficiência será obtida através do problema mais relaxado possível. O valor de $\alpha = 0$ apenas faz com que seja respeitada a preservação da ordem de preferência emitida pelo decisor, mas não preserva a ordem de intensidade de preferências.

Neste sentido quanto maior for o valor de α maior é a preservação da ordem de intensidade de preferência do decisor. No entanto o parâmetro α pode crescer até um limite a partir do qual torna o PPL inviável. Para encontrar o maior valor de α que torna o PPL viável, é possível recorrer ao artificio de multiplicar α por um valor suficientemente grande (M) e inseri-lo na função objetivo como uma subtração. Assim, o modelo estimará a maior eficiência dado o maior valor de α que torna o problema viável. Desta forma a função objetivo passa a formulação descrita em (11)

$$Min\ h_0 = \sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0} - M\alpha \tag{11}$$

Assim, considerando as alterações propostas o problema de programação linear pode ser descrito por (12).

$$Min\ h_0 = \sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0} - M\alpha \tag{12}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{r} u_j y_{j0} = 1 \qquad \text{R1}$$

$$\sum_{i=1}^{r} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \leq 0, \forall k \qquad \text{R2}$$

$$(u_0) = 0 \ \text{(pontuação arbitrária)} \qquad \text{R3}$$

$$\forall (output_a, output_b) \in C_0 : (u_a) - (u_b) = 0. \qquad \text{R4}$$

$$\forall (output_a, output_b) \in C_i \cup \ldots \cup C_s\ com\ i, s \in \{1,2,3,4,5,6\} e\ i \leq s : (u_a) - (u_b) \geq i\alpha \qquad \text{R5}$$

$$\begin{aligned} &\forall (output_a, output_b) \in C_i \cup \ldots \cup C_s\ e\ \forall (output_c, output_d) \\ &\quad \in C_{i'} \cup \ldots \cup C_{s'}\ com\ i, s, i'e\ s' \in \{1,2,3,4,5,6\}, i \leq s, i' \leq s', e\ i > s' \\ &\quad : [(u_a) - (u_b)] - [(u_c) - (u_d)] \geq i\alpha - s'\alpha \end{aligned} \qquad \text{R6}$$

$$u_j \geq 0, v_i \geq 0, \forall j, i \qquad \text{R7}$$

Onde a eficiência de cada DMU pode ser calculada por:

$$Eff_0 = \frac{1}{h_0 + M\alpha}$$

5. Exemplo Numérico

Para ilustrar o funcionamento da modelagem proposta será apresentado um exemplo de implementação do problema de programação linear descrito em (12). Os dados do modelo DEA com dez DMU´s, dois *inputs* e quatro *outputs* foram extraídos de um exemplo retirado de Adler e Golany (2001) e estão apresentados na Tabela 1. Como o foco do presente artigo é validar o funcionamento da modelagem proposta, serão utilizados os dados apresentados sem discutir o significado de cada variável.

Tabela 1- Dados de entrada do modelo DEA

DMU	Inputs		Outputs			
	Input1	Input2	Output1	Output2	Output3	Output4
1	170	70	45	6	11	5
2	155	85	53	11	9	7
3	183	92	48	23	4	2
4	143	62	28	7	3	2
5	202	88	60	17	5	3
6	117	49	35	12	4	2
7	143	44	27	8	3	1
8	155	61	33	17	6	2
9	139	53	42	8	7	3
10	183	63	52	12	15	4

A partir de um modelo DEA com retorno constante e orientação a *outputs*, apresenta-se os pesos atribuídos e a eficiência estimada para cada uma das 10 DMU´s na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados Modelo DEA CCR orientado à output

DMU	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4	Eff
1	-	0,0148	-	-	0,0217	0,1522	0,963
2	-	0,0118	-	-	-	0,1429	1,000
3	0,0019	0,0071	0,0048	0,0334	-	-	1,000
4	0,0073	0,0087	0,0333	0,0095	-	-	0,631
5	0,0034	0,0040	0,0154	0,0044	-	-	0,965
6	-	0,0204	0,0104	0,0531	-	-	1,000
7	-	0,0280	0,0231	0,0471	-	-	0,811
8	-	0,0164	-	0,0588	-	-	1,000
9	0,0028	0,0116	0,0238	-	-	-	1,000
10	-	0,0159	-	-	0,0667	-	1,000

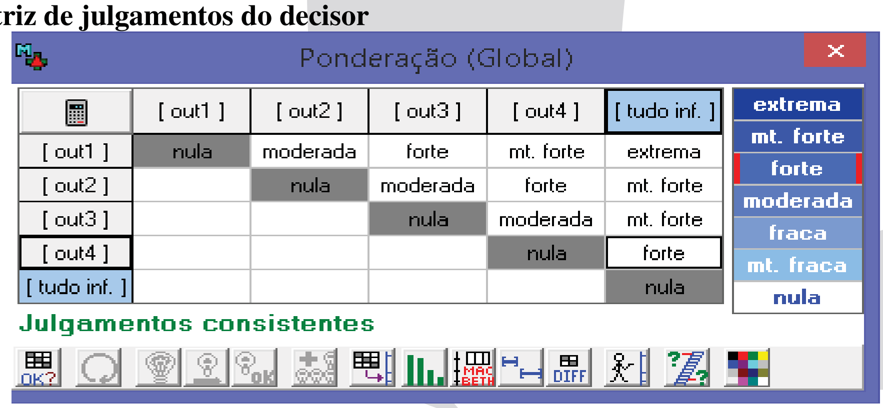
Dos resultados apresentados na Tabela 2 é possível constatar dois fatos importantes. Primeiramente todas as DMU´s atribuíram valor zero a pelo menos um dos *outputs*. Embora na modelagem DEA a flexibilidade total dos pesos permita tal situação (sendo muitas vezes considerada a principal vantagem deste tipo de modelagem), conforme argumenta Pedraja-Chaparro (1997) julgamentos de valor são feitos para na escolha dos *inputs* e *outputs* do modelo DEA. Tal fato implica que se os *inputs* e *outputs* foram escolhidos para compor a modelagem, então são importantes para estimar a eficiência, e consequentemente não faria sentido atribuir-lhe peso zero, justificando assim a adoção de restrição aos pesos.

Outro fato relevante dos dados da Tabela 2 é o baixo nível de discriminação oferecido pelo modelo dado a sua flexibilidade total dos pesos (seis das dez DMU´s foram consideradas eficientes). Conforme argumentado em Angulo-Meza e Lins (2002) este tipo de inconveniente é comum quando o número de DMU é pequeno em comparação com a quantidade de variáveis analisadas. No entanto pode haver situações em que mesmo na presença de poucas DMU´s deseja-se avaliar eficiência das mesmas, o que a modelagem aqui proposta possibilita com certo grau de discriminação ao demandar julgamentos de valor para estabelecer restrições aos pesos.

Para lidar com estes problemas a modelagem proposta irá simular a matriz de julgamentos de um decisor. Assim, para o caso em questão, solicita-se ao decisor que avalie os quatros *outputs* e mais o critério neutro como critérios de um problema multicritério seguindo procedimentos da modelagem MACBETH. Ressalta-se aqui que a matriz de julgamentos deve respeitar os testes de consistência propostos pelo método, o que garante julgamentos consistentes por parte do decisor.

A Figura 1 ilustra a matriz de julgamentos do decisor que será utilizada no exemplo em questão. Conforme destacado no inicio da seção IV, a matriz deve ser constituída a partir de comparações qualitativas par a par. Foi utilizado o software M-MACBETH para garantir que a matriz estava composta por julgamentos consistentes.

Figura 1 – Matriz de julgamentos do decisor



A partir da implementação dos dados apresentados na Tabela 1 e na Figura 1 ao problema de programação linear descrito em (12) chega-se aos resultados apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Resultados Modelo DEA-MACBETH CCR orientado à output

DMU	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4	α	Eff DEA-Macbeth	Eff DEA
1	0,0051	0,0048	0,0175	0,0135	0,0094	0,0054	0,0013	0,831	0,963
2	0,0042	0,0040	0,0146	0,0112	0,0079	0,0045	0,0011	1,000	1,000
3	0,0042	0,0040	0,0146	0,0112	0,0079	0,0045	0,0011	0,872	1,000
4	0,0082	0,0077	0,0281	0,0216	0,0151	0,0087	0,0022	0,606	0,631
5	0,0038	0,0036	0,0130	0,0100	0,0070	0,0040	0,0010	0,925	0,965
6	0,0062	0,0059	0,0213	0,0164	0,0115	0,0066	0,0016	0,988	1,000
7	-	0,0319	0,0285	0,0219	0,0154	0,0088	0,0022	0,712	0,811
8	0,0058	0,0055	0,0200	0,0154	0,0108	0,0062	0,0015	0,807	1,000
9	0,0055	0,0052	0,0189	0,0146	0,0102	0,0058	0,0015	0,961	1,000
10	-	0,0159	0,0142	0,0109	0,0076	0,0044	0,0011	1,000	1,000

Uma vez que a integração entre os modelos apenas impôs restrições adicionais ao modelo original, observa-se que as eficiências estimadas a partir da integração entre os modelos DEA e MACBETH apresentam valores menor ou igual às do modelo DEA clássico. Um modelo com mais restrições deve sempre apresentar eficiências menores, podendo apresentar eficiência iguais nos casos em que as restrições adicionais não forem ativas no PPL. Desta forma, a abordagem proposta apresentou apenas duas DMU´s eficientes, o que representa um maior poder de discriminação em relação ao modelo clássico DEA.

Além disso, contrariamente ao observado para o modelo DEA clássico, é possível constatar que todos os *outputs* tiveram atribuídos pesos maiores do que zero e que foi respeitada a ordem de preferência do decisor já que para todas as DMU´s os pesos atribuídos aos outputs respeitam a condição $u_1 > u_2 > u_3 > u_4$.

Observa-se ainda que os valores do parâmetro α variam entre 0,0010 e 0,0022 a depender da DMU avaliada. A definição de tal parâmetro como o maior valor possível que torna o PPL viável, além de aumentar o poder de discriminação do modelo, faz com que sejam mantidas as mesmas relações entre os pesos dos *outputs* para todas DMU´s. Assim, caso sejam aplicadas sobre os pesos de cada DMU a mesma transformação de escala que o metodo MACBETH faz, serão obtidos valores iguais conforme será demonstrado a seguir.

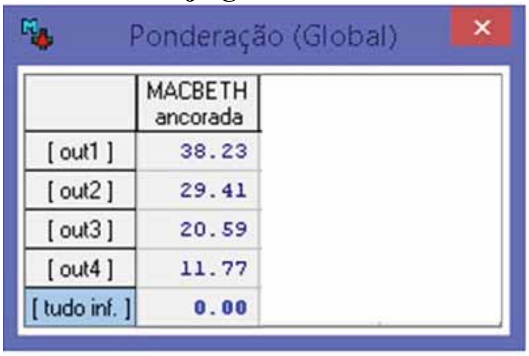
O *software* M-MACBETH realiza uma transformação para a obtenção de uma escala final para agregar os critérios a partir do PPL original do modelo multicritério. A referida transformação consiste em dividir o valor atribuído pelo PPL a cada critério pelo somatório dos valores atribuído a todos os critérios.

$$u_i^{transformada} = \frac{u_i}{\sum_{j=1}^{n} u_j} \tag{13}$$

Onde u_i é o valor atribuído pelo PPL do método MACBETH ao critério i, n é o total de critérios avaliados e $u_i^{transformada}$ é o valor da escala após para o critério i.

Para a matriz de julgamentos descrita na Figura 1, o software M-MACBETH atribui a seguinte escala ancorada de valores para cada critério avaliado. (Figura 2)

Figura 2- Escala ancorada para a matriz de julgamentos considerada


Ponderação (Global)

	MACBETH ancorada
[out1]	38.23
[out2]	29.41
[out3]	20.59
[out4]	11.77
[tudo inf.]	0.00

Assim, caso se realize as transformações descritas em (13) aos pesos dos *outputs* de todas as DMU´s chega-se ao mesmo valor da escala ancorada obtido através do *software* M-MACBETH. Para demonstrar tal situação é possível verificar a transformação para a DMU 1:

<u>DMU 1:</u> $u_1 = 0{,}0175;\ u_2 = 0{,}0135;\ u_3 = 0{,}0094; u_4 = 0{,}0054$

$$u_1^{transformada} = \frac{u_1}{u_1 + u_2 + u_3 + u_4} = \frac{0{,}0175}{0{,}0175 + 0{,}0135 + 0{,}0094 + 0{,}0054} = 38{,}23\%$$

$$u_2^{transformada} = \frac{u_2}{u_1 + u_2 + u_3 + u_4} = \frac{0{,}0135}{0{,}0175 + 0{,}0135 + 0{,}0094 + 0{,}0054} = 29{,}41\%$$

$$u_3^{transformada} = \frac{u_3}{u_1 + u_2 + u_3 + u_4} = \frac{0{,}0094}{0{,}0175 + 0{,}0135 + 0{,}0094 + 0{,}0054} = 20{,}59\%$$

$$u_4^{transformada} = \frac{u_4}{u_1 + u_2 + u_3 + u_4} = \frac{0{,}0054}{0{,}0175 + 0{,}0135 + 0{,}0094 + 0{,}0054} = 11{,}77\%$$

Desta forma é possível afirmar que a modelagem proposta define as razões entre os pesos dos *outputs* e cada DMU escolhe o conjunto de pesos que maximiza sua eficiência respeitando a preservação da ordem de intensidade de preferência emitidas pelo decisor, conforme o método multicritério MACBETH.

6. Conclusão

Os problemas derivados da flexibilidade dos pesos típica de DEA são usualmente tratados através da restrição aos pesos. Neste sentido é possível solicitar ao decisor que defina em termos numéricos os limites entre os quais os pesos podem variar (conhecida na literatura como restrição direta aos pesos), o que representa uma tarefa bastante complexa para o decisor. Outra possibilidade é utilizar a chamada região de segurança do tipo I e estabelecer relações diversas entre *inputs* ou *outputs*. Tais relações podem ser estabelecidas a partir de julgamentos de valor do decisor sobre a importância relativa dos *inputs* ou *outputs*.

O presente artigo utiliza o arcabouço teórico desenvolvido no modelo multicritério MACBETH para restringir os pesos em DEA a partir de restrições típicas de região de segurança do tipo I. O estudo estabelece relações entre os pesos dos *outputs* de um modelo DEA, levando em consideração julgamentos de valor de um decisor em relação à importância desses *outputs* considerados como critérios.

A abordagem é inovadora uma vez que a integração é feita a partir da proposição de um problema de programação linear que agrega e adapta as restrições do modelo multicritério à modelagem DEA.

Os resultados mostraram que a partir dos julgamentos de valor do decisor é possível evitar a atribuição de pesos zero, aumentar o caráter discriminatório das eficiências calculadas, além de respeitar a ordem e intensidade de preferência do decisor a partir de julgamentos de valor estabelecidos *a priori*.

Além disso, os resultados se mostraram aderentes à matriz de julgamentos do decisor, uma vez que ao se realizar a transformação de escala típica de MACBETH nos pesos do modelo DEA-MACBETH são obtidos valores iguais aos obtidos pelo *software* que implementa o MACBETH. Assim o método mostrou-se uma ferramenta útil para auxílio à decisão, corrigindo imperfeições das abordagens de integração anteriormente propostas.

Como estudo futuro será proposto que todas as DMUs sejam avaliadas a partir do mesmo valor de constante (α). Para tanto é necessário encontrar um valor de constante que não inviabilize nenhum dos PPLs de DEA. Além disso, também será proposto uma adaptação para modelos DEA-MACBETH orientado a *inputs*.

Referências

Adler, N., Golany B. (2001), Evaluation of deregulated airline networks using data envelopment analysis combined with principal component analysis with an application to Western Europe. *European Journal of Operational Research*, v. 132, p. 260-273.

Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R.G., Thanassoulis, E. (1997), Weights restrictions and value judgements in Data Envelopment Analysis: Evolution, development and future directions, *Annals of Operations Research,* 73, 13-34.

Angulo Meza, L., Estellita Lins, M.P. (2002) Review of methods for increasing discrimination in data envelopment analysis. *Annals of Operations Research*, v.116, p.225 - 242.

Arrow, K. J. (1951) *Social Choice and individual values*. New York, Wiley, 1951.

Bana e Costa C. A., Chagas M. P.. (2004), A carrer choice problem: An example of how to use MACBETH to build a quantitative value model based on qualitative value judgments. *European Journal of Operational Research*, v. 153, p. 323-331.

Bana e Costa, C. A., Angulo-Meza L., Oliveira., M. D. (2013) O método MACBETH e aplicação no Brasil. *Engevista*, v.1, p. 3-27.

Bana e Costa, C.A., De Corte, J-M., Vansnick, J-C (2012), MACBETH. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, v. 11 (2), p. 359-387.

Bana e Costa, C.A., Vansnick, J.-C. (1994**)**, MACBETH - An interactive path towards the construction of cardinal value functions. *International Transactions in Operational Research*, v.1 (4), p. 489-500.

Charnes, A., Cooper W., Rhodes, E. (1978), Measuring the Efficiency of Decision-Making Units, *European Journal of Operational Research, 2(6), 429-444..*

Dyson, R.G., Thanassoulis, E. (1988), Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, v.39 (6), p.563 - 576.

Farrel, J. M. (1957), The measurement of Technical Efficiency, *Journal of the Royal Statistics Society,* 120, 253-290.

Oliveira, L.S.M., Correia, T.C.V.D., Soares de Mello, J.C.C.B., (2008), Uso do Método Macbeth para gerar intervalos para os pesos para serem usados em restrições Cone Ratio em Análise Envoltória de Dados. *In: Anais do XL SBPO,* João Pessoa-PB, pp. 287-298.

Pedraja-Chaparro, R., Salinas-Jimenes, J., Smith, P. (1997), On the Role of Weight Restrictions in DEA, *Journal of Productivity Analysis*, 8, 215-230.

Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo Meza, M., Branco da Silva, B.P. (2009), A ranking for the Olympic Games with unitary input DEA models. *IMA Journal of Management Mathematics*, v. 20 (2), p. 201-211.

Soares de Mello, J.C.C.B., Lins, M.P.E., Gomes, E.G., Soares de Mello, M.H.C. (2002), Evaluating the performance of calculus classes using operational research tools. *European Journal of Engineering Education*, v. 27 (2), p. 209-218.

Thompson, R.G., Langemeier, L.N., Lee, C.-T., Lee, E., Thrall, R.M. (1990), The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming. *Journal of Econometrics*, v.46 (1-2), p. 93-108.