Problema integrado de Dimensionamento de Lotes e de Empacotamento de Produtos

Natã Goulart da Silva
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção - Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627,Belo Horizonte - MG - CEP 31.270-901
Departamento de Tecnologia – Universidade Federal de São João del-Rei (DTECH/UFSJ)
Rod.: MG 443, KM 7, Ouro Branco - MG - CEP 36.420-000
ngoularts@ufsj.edu.br

Thiago F. Noronha
Departamento de Ciência Computação - Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627,Belo Horizonte - MG - CEP 31.270-901
tfn@dcc.ufmg.br

Maurício C. de Souza
Departamento de Engenharia de Produção - Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627,Belo Horizonte - MG - CEP 31.270-901
prof.mauriciodesouza@gmail.com

Philippe Mahey
LIMOS, UMR 6158-CNRS
Université Blaise-Pascal, BP 10125, 63173 Aubière, France
philippe.mahey@isima.fr

RESUMO

Neste trabalho são apresentados três modelos para resolver o Problema integrado de Dimensionamento de Lotes e de Empacotamento de Produtos - *PDLEP*. O primeiro modelo é baseado em uma formulação presente na literatura utilizada para resolver a integração de problemas de dimensionamento de lotes com problemas de roteamento de veículos. Nós propomos dois novos modelos que apresentaram resultados significativamente melhores para o conjunto de instâncias avaliadas. Estes modelos são baseados em modelos usados anteriormente para a solução dos problemas de dimensionamento de lotes e de coloração de grafos. Além disso, foi apresentada uma estratégia de pré-processamento das instâncias que forneceu um novo limite superior para o número de veículos necessários para o problema. O pré-processamento permitiu a obtenção de um maior número de soluções ótimas e uma redução dos valores dos GAP's de otimalidade. Nos experimentos foram utilizadas instâncias com até 50 clientes, 10 períodos e 6 produtos.

PALAVRAS CHAVE. Problemas Integrados, Lot Sizing, Bin Packing.

ABSTRACT

This paper presents three models to solve the integrated Lot Sizing and Product Packaging Problem. The first model is based on a formulation present in the literature used to solve the integration of lot sizing problems with vehicle routing problems. We propose two new models that had significantly better results for the set of instances evaluated. These models was used before to solving problems of lot sizing and graph coloring. In addition, a pre-processing that provided instances with a new upper limit for the number of vehicles required to the problem was presented, allowing to obtain a larger number of optimal solution and a reduction of values of GAP's. In the experiments were used instances with up to 50 clients, 10 periods and 6 products.

KEYWORDS. Integrated Problem, Lot Sizing, Bin Packing.

1. Introdução

O problema de Dimensionamento de Lotes, do inglês *Lot Sizing Problem* e o problema de empacotamento de itens, do inglês *Bin Packing Problem* têm sido estudados de maneira exaustiva ao longo dos anos. Variações destes problemas são geralmente tratadas de maneira isolada mesmo em situações nas quais seria necessária uma abordagem integrada, o que gera soluções subótimas.

Neste trabalho é apresentado o *Problema integrado de Dimensionamento de Lotes e de Empacotamento de Produtos - PDLEP*. Neste problema deseja-se planejar os lotes de produção e o empacotamento de um conjunto de produtos $p \in P$ destinados a um grupo de clientes $i \in V$ baseados em demandas conhecidas que incorra em um custo mínimo. Considera-se que a demanda total de cada cliente deve ser atendida por um único veículo que possui capacidade de transportar Q Kg e que o horizonte de planejamento está divido em vários períodos discretos $t \in T$. Cada cliente i tem um intervalo de atendimento definido por uma janela de tempo $[a_i, ..., b_i] \subseteq T$. Atrasos nas entregas são penalizados por multas e entregas antecipadas não são permitidas. Assume-se que os produtos serão entregues por veículos contratados por demanda, não importando a rota utilizada e que um cliente pode ser visitado por um e somente um veículo. Se um item é produzido, é gerado um custo de produção além dos custos de estoque por unidade de produto armazenada na fábrica e para cada veículo utilizado a cada período. Considera-se também que os produtos são homogêneos em volume e peso e que deve-se reduzir os número de veículos utilizados, resolvendo um problema de empacotamento unidimensional no qual todos os itens de um cliente devem estar em um mesmo veículo. Os modelos propostos podem ser estendidos para produtos heterogêneos, fazendo-se alterações nos valores dos parâmetros.

São apresentados três modelos para resolver o *PDLEP*. O primeiro é baseado no modelo utilizado por Schmid et al. (2013) para resolver a integração de problemas de dimensionamento de lotes com problemas de roteamento de veículos. São propostos dois modelos utilizados anteriormente para a solução dos problemas de dimensionamento de lotes e de coloração de grafos, os quais apresentaram resultados significativamente melhores que o primeiro modelo para o conjunto de instâncias avaliadas.

A próxima seção, Seção 2, apresenta uma revisão bibliográfica de algumas dentre várias referências obtidas sobre problemas de dimensionamento de lotes integrados a problemas de transporte. O *PDLEP* foi proposto como uma versão desses problemas porque a integração do problema de dimensionamento de lotes de produção com o problema de empacotamento reduz a complexidade da solução integrada, o que permite a solução de instâncias com maior número de itens quando comparado com problemas que consideram o roteamento de veículos. Além disso, esta estratégia pode ser aplicada em fábricas que não têm frota própria e alocam os produtos em paletes ou contêineres para que sejam entregues por terceiros. Este problema pode ser aplicado em centros urbanos que apresentam dificuldades na entrega devido a, por exemplo, restrições de estacionamento e problemas tráfego, e onde o roteamento pode estar sujeito a várias incertezas. Não foram encontrados na literatura trabalhos que utilizassem a integração com o problema de empacotamento.

Na Seção 3 são apresentados os três modelos utilizados para resolver o *PDLEP*. Os experimentos computacionais estão presentes na Seção 4. Na última parte do trabalho, Seção 5, estão colocadas as considerações finais.

2. Trabalhos Relacionados

Uma das primeiras referências encontradas sobre soluções integradas de problemas de produção e distribuição de produtos é o trabalho de Glover et al. (1979) que analisa as necessidades de uma grande empresa produtora de fertilizantes dos EUA. O modelo proposto para a solução do problema foi baseado em um modelo de redes no qual as fábricas, os armazéns e os clientes eram os nós da rede com os respectivos valores das demandas e capacidades de produção. As arestas que conectavam os nós continham os custos de transporte e limites de capacidade. O modelo continha cerca de 6000 equações, 35000 variáveis e foi resolvido com um tempo da ordem de 50 segundos.

Um importante trabalho sobre soluções de problemas integrados é o artigo Schmid et al. (2013) no qual é realizada uma revisão sobre a integração do problema de roteamento de veículos com janela de tempo com outros problemas como o problema dimensionamento de lotes, o problema de planejamento de produção, o problema de programação de máquinas entre outros. É apresentado para cada um dos problemas a sua descrição e um levantamento de importantes trabalhos considerando soluções isoladas e soluções integradas. Os autores argumentam que é necessário o desenvolvimento de heurísticas eficientes para a resolução de problemas integrados devido ao seu grau de complexidade.

Em Bertazzi et al. (2005) foi realizado um estudo sobre problemas integrados de dimensionamento de lotes e roteamento de veículos no qual duas variações de políticas de reposição de estoque foram utilizadas. A primeira define que a cada visita de um veículo o cliente deve ter seu estoque levado ao limite máximo. A segunda política difere-se apenas com relação ao último cliente visitado que pode receber qualquer quantidade de produtos entre os valores admissíveis do seu estoque. O problema foi resolvido através de heurísticas que decompõem o problema inicial nos problemas de produção de lotes não capacitados e no problema de roteamento de veículos. Os experimentos mostraram que a segunda política apresentou os melhores resultados. Nenhuma das instâncias que continham o número de clientes $N \in [50, 150]$, número de períodos $H \in \{6, 30\}$ e número de produtos $P \in \{2, 3, 5, 6\}$ foram resolvidas com garantia de otimalidade.

Em Norden e Velde (2005) foi realizado um estudo no qual a redução dos custos de transporte foi obtida através de contratos de longo prazo, fixando o custo de utilização de um conjunto de *R* paletes. Para utilizar mais do que *R* paletes, um custo maior por palete adicional deveria ser pago. Os custos de transporte são calculados baseados em três parâmetros: um custo fixo c_0, um custo c_1 por palete utilizado até o limite de *R* paletes por período e um custo c_2 para os paletes extras, com $c_2 > c_1$. Nos experimentos foram geradas instâncias com até 20 produtos, 12 períodos e capacidade dos paletes igual a 100. Os resultados apresentados forneceram GAP's menores que 1% com tempo de execução das heurísticas e da relaxação Lagrangiana da ordem de um segundo. O computador utilizado nos experimentos foi um *Pentium II 350 MHz* com *64 MB RAM*.

Em Ertogral (2008) foi apresentado um problema integrado de gerenciamento de estoques e de transporte em que, as demandas de cada produto em cada um dos períodos e os valores m_j que definem os intervalos no qual os custos de transporte por unidade se alteram são parâmetros do problema. Se a quantidade transportada L_t for tal que $m_j <= L_t < m_{j+1}$, o valor do custo de transporte é dado por uma combinação convexa dos valores de custo em m_j e em m_{j+1}. Foram realizados experimentos com instâncias com até 10 produtos e 10 períodos cujos resultados mostraram que os GAP's entre o limite superior fornecido pela solução do modelo e o limite inferior fornecido pelo método do Subgradiente foram em cerca de 90% das instâncias inferiores a 1%.

Em Molina et al. (2009) foi abordada uma extensão do problema resolvido em Norden e Velde (2005) no qual admite-se atrasos na entrega, custos diferentes para cada produto, custos por atraso na entrega e capacidade na produção. Deseja-se encontrar um plano de produção que apresente um custo mínimo em que os custos de transporte são gerados pela contratação de contêineres. As instâncias foram geradas de maneira semelhante às geradas em Norden e Velde (2005). Os resultados apresentados pela relaxação Lagrangiana combinada com a relação *Surrogate* foram semelhantes aos obtidos quando utilizada apenas a heurística Lagrangiana.

Em Armentano et al. (2011) é tratado um problema de Produção e Distribuição Integrada em que é apresentada uma formulação e são propostas uma Busca Tabu com memória reduzida e uma Busca Tabu integrada com religamento de caminhos, do inglês *Path relinking*. Dentre os três grupos de instâncias avaliadas, a maior instância resolvida de maneira exata era formada por 5 produtos, 14 períodos e 15 clientes, necessitando de um tempo superior a 4 horas. A Busca Tabu obteve para a mesma instância um GAP de 1,9% em 22 segundos. Observou-se que a heurística Busca Tabu com religamento de caminhos apresentou, em média, resultados melhores do que a Busca Tabu com memória curta, porém, com um tempo computacional superior. A máquina utilizada nos experimentos foi um *Pentium IV 2.8 GHz* com o sistema *Linux Fedora Core 2*.

Em Liberalino et al. (2011) foi abordado o problema *The Integrated Lot Sizing and Vehicle Routing Problem* no qual vários itens devem ser fabricados e entregues em um conjunto de fábricas que são classificadas de acordo com a sua produção em: itens básicos, itens intermediários e itens finais. Cada fábrica produz um item específico e um único tipo de produto final é gerado no final do processo. Foram propostas duas heurísticas, uma derivada da heurística *Relax-and-Fix* e a outra heurística gulosa chamada *PSF* que faz iterações entre os problemas de produção e de roteamento. Os resultados compararam a solução ótima do modelo proposto no artigo com as duas heurísticas. A heurística *Relax-and-Fix* apresentou melhores resultados que a heurística *PSF* com GAP's menores que 1% para as instâncias com 3 fábricas e GAP's menores que 2% para as instâncias com 4 fábricas.

Em Lima et al. (2013) foi abordado o problema de dimensionamento de lotes com remanufatura integrado ao problema de roteamento de veículos no qual produtos descartados coletados nos clientes são usados como matéria prima. Em cada período, um cliente é visitado por no máximo um veículo que pode realizar a entrega dos produtos novos, a coleta de produtos usados ou ambas as ações. Foram propostas duas formulações: a primeira considera o problema integrado em todo o horizonte de planejamento e a segunda apresenta um modelo simplificado que faz o roteamento dos veículos em apenas um período, utilizando aproximações nos outros intervalos. O modelo integrado foi executado com limite de tempo de 7200 segundos, obtendo soluções com GAP's da ordem de 1% para instâncias com até 20 clientes e 4 períodos de planejamento. Os testes foram realizados em um computador *Intel Xeon X5690 @ 3.47GHz* com 24 núcleos e *132 GB de RAM* com o *CPLEX* versão *12.3*

Em Molina et al. (2013) foram apresentadas três extensões para o modelo proposto em Norden e Velde (2005). A primeira extensão considera que os produtos têm dimensões diferentes e um pré-processamento é realizado para definir quantos itens podem ser armazenados em cada palete. A segunda extensão tem as mesmas considerações da primeira e além disso, considera que os custos de transporte são gerados pela quantidade de caminhões utilizada e não pelo número de paletes. A terceira extensão tem as mesmas considerações da segunda, adicionando-se que os caminhões utilizados têm capacidades e custos diferentes. Foi realizada uma comparação entre a execução dos modelos no CPLEX com tempo limite de execução de 1500 segundos com a implementação da heurística Lagrangiana proposta em Norden e Velde (2005) utilizando a primeira extensão. Verificou-se que o CPLEX não conseguiu encontrar soluções ótimas para a maioria das instâncias e que a heurística Lagrangiana utilizada não se mostrou competitiva com o CPLEX no modelo analisado. Os testes foram realizados utilizando um microcomputador *Pentium Core 2 Duo 2GHZ* com *2G de RAM* e com o *CPLEX* versão 10.

3. Formulações

Nesta seção são apresentadas três formulações para o *PDLEP*. A primeira, Seção 3.1, é baseada na formulação apresentada em Schmid et al. (2013) para o problema de dimensionamento de lotes integrado a um problema de roteamento de veículos. O problema modelado nesta seção difere da formulação original por não considerar o roteamento dos veículos. A segunda e a terceira formulações propostas neste trabalho foram baseadas em trabalhos da literatura, Seções 3.2 e 3.3. Os custos de transporte das formulações são relacionados com a contratação de veículos com capacidade de transporte de Q Kg e em todos os modelos os níveis iniciais dos estoques são iguais a zero. A notação dos custos na função objetivo utilizada em todas as formulações foi proposta por Schmid et al. (2013) onde utiliza-se um índice superior para cada custo. Associamos o índice S ao custo de produção, E ao custo de estoque, F ao custo de frete e L ao custo de atraso.

3.1. Formulação inicial

Esta formulação utiliza os seguintes parâmetros e variáveis:

Parâmetros:

c_p^S custo de produção do produto $p \in P$;

g_p quantidade de recursos necessários para produção de uma unidade do produto p;
Q capacidade dos veículos;
c^E custo de estoque na fábrica por unidade de produto no final de cada período;
c^F custo de contratação de um veículo;
c_i^L custo por cada período de atraso na entrega dos produtos para o cliente $i \in V$;
l_t capacidade máxima de produção por período;
q_{ip} demanda do cliente i pelo produto p;
$[a_i, b_i]$ janela de tempo (em períodos) em que o cliente i deve ser atendido;
Variáveis:
v_{pt} variável binária que tem valor 1 caso o produto p seja produzido no período $t \in T$;
u_i atraso em períodos com relação a janela de tempo de atendimento do cliente i;
x_{pt} quantidade do produto p produzido no período t;
h_{pt} quantidade do produto p em estoque no final período t;
o_{pkt} quantidade do produto p colocado no veículo $k \in K$ no período t;
z_{kt} variável binária com valor igual a 1 caso o veículo k seja usado no período t;
y_{ik} variável binária com valor igual a 1 caso o cliente i seja atendido pelo veículo k;
w_k variável que armazena em qual período o veículo k é utilizado;
r_{ik} variável que armazena o período que o cliente i é atendido pelo veículo k;

$$\min \quad \sum_{p\in P}\sum_{t\in T} c_p^S.v_{pt} + \sum_{p\in P}\sum_{t\in T} c^E.h_{pt} + \sum_{k\in K}\sum_{t\in T} c^F.z_{kt} + \sum_{i\in V} c_i^L.u_i \tag{1}$$

sujeito a:

$$\sum_{p\in P} g_p.x_{pt} \leqslant l_t \qquad \forall\, t \in T \tag{2}$$

$$x_{pt} \leqslant M_1.v_{pt} \qquad \forall\, p \in P, t \in T \tag{3}$$

$$h_{pt-1} + x_{pt} - \sum_{k\in K} o_{pkt} = h_{p,t} \qquad \forall\, p \in P, t \in T \tag{4}$$

$$\sum_{t\in T} z_{kt} \leqslant 1 \qquad \forall\, k \in K \tag{5}$$

$$o_{pkt} \leqslant \sum_{i\in V} q_{ip}.y_{ik} + M_2(1 - z_{kt}) \qquad \forall\, p \in P, k \in K, t \in T \tag{6}$$

$$o_{pkt} \geqslant \sum_{i\in V} q_{ip}.y_{ik} - M_2(1 - z_{kt}) \qquad \forall\, p \in P, k \in K, t \in T \tag{7}$$

$$\sum_{i\in V}\sum_{p\in P} q_{ip}.y_{ik} \leqslant Q \qquad \forall\, k \in K \tag{8}$$

$$\sum_{k\in K} y_{ik} = 1 \qquad \forall\, i \in V \tag{9}$$

$$a_i \leqslant \sum_{k\in K} r_{ik} \leqslant b_i + u_i \qquad \forall\, i \in V \tag{10}$$

$$w_k = \sum_{t\in T} t.z_{kt} \qquad \forall\, k \in K \tag{11}$$

$$r_{ik} \leqslant w_k \qquad \forall\, i \in V, k \in K \tag{12}$$

$$r_{ik} \leqslant M_3.y_{ik} \qquad \forall\, i \in V, k \in K \tag{13}$$

$$r_{ik} \geqslant w_k - M_3(1 - y_{ik}) \qquad \forall\, i \in V, k \in K \tag{14}$$

$$x_{pt} \geqslant 0, h_{pt} \geqslant 0, \quad v_{pt} \in \{0,1\} \qquad \forall\, p \in P, t \in T \tag{15}$$

$$o_{pkt} \geqslant 0 \qquad \forall\, p \in P, k \in K, t \in T \tag{16}$$

$$u_i \geqslant 0 \qquad \forall\, i \in V, \qquad w_k \geqslant 0 \qquad \forall\, k \in K \tag{17}$$

$$y_{ik} \in \{0,1\}, \quad r_{ik} \geqslant 0 \qquad \forall\, i \in V, k \in K \tag{18}$$

$$z_{kt} \in \{0,1\} \qquad \forall\, k \in K, t \in T \tag{19}$$

Neste modelo, a função objetivo (1) considera os custos fixos de produção de um produto p, os custos de estoque, os custos de contratação de veículos e os custos de atraso caso um cliente não seja atendido dentro da sua janela de tempo. As restrições (2) limitam que a cada período, a soma dos recursos utilizados por todos os produtos seja menor ou igual a capacidade de produção. As restrições (3) definem que se o produto p for produzido no período t, a variável binária v_{pt} terá valor 1. Como deseja-se o valor mínimo para as constantes M, definimos que $M_1 = l_t$. As restrições (4) controlam o balanço do fluxo da produção entre os períodos. As restrições (5) definem que um veículo será utilizado em no máximo um período. As restrições (6) e (7) garantem que a carga de cada veículo será igual ao somatório das demandas dos clientes, caso o veículo k seja utilizado no período t, com o parâmetro $M_2 = Q$. As restrições (8) garantem que a capacidade dos veículos não será excedida. As restrições (9) garantem que um cliente é atendido por um e somente um veículo. As restrições (10) determinam o atraso u_i para cada cliente. Nas restrições (11) são obtidos os períodos no qual os clientes são atendidos. As restrições (12)-(14) relacionam o período em que um veículo foi utilizado com os clientes atendidos por aquele veículo. O valor da constante M_3 é limitado pelo número máximo de períodos $|T|$. Por fim, as restrições (15) - (19) definem o domínio das variáveis do problema.

3.2. Formulação Indexada no tempo

Nesta segunda formulação temos a variável binária y_{ik}^t com valor igual a 1 caso o cliente i seja atendido pelo veículo k no período t. Assim, as restrições utilizadas na primeira formulação para o acoplamento dos problemas de empacotamento e de dimensionamento de lotes não são necessárias. Além disso, foi adicionada a restrição (28) que tem como objetivo reduzir a ocorrência de soluções viáveis simétricas devido ao fato dos veículos utilizados serem homogêneos. Formulações indexadas no tempo foram utilizadas em Lima et al. (2013) para resolver um problema de produção integrado ao problema de roteamento de veículos. Os parâmetros desta formulação são idênticos aos da formulação anterior e suas variáveis são:

Variáveis:

v_{pt} variável binária que tem valor 1 caso o produto p seja produzido no período t;
u_i atraso em períodos com relação a janela de tempo de atendimento do cliente i;
x_{pt} quantidade do produto p produzido no período t;
h_{pt} quantidade do produto p em estoque no período t;
z_{kt} variável binária com valor igual a 1 caso o veículo k seja usado no período t;
y_{ik}^t variável binária com valor igual a 1 caso o cliente i seja atendido pelo veículo k no período t;

$$\min \quad F(y_{ik}^t) = \sum_{p\in P}\sum_{t\in T} c_p^S.v_{pt} + \sum_{p\in P}\sum_{t\in T} c^E.h_{pt} + \sum_{k\in K}\sum_{t\in T} c^F.z_{kt} + \sum_{i\in V} c_i^L.u_i \tag{20}$$

sujeito a:

$$\sum_{p\in P} g_p.x_{pt} \leqslant l_t \qquad \forall\, t \in T \tag{21}$$

$$x_{pt} \leqslant M_1.v_{pt} \qquad \forall\, p \in P, t \in T \tag{22}$$

$$h_{pt-1} + x_{pt} = \sum_{i\in V}\sum_{k\in K} q_{ip}.y_{ik}^t + h_{pt} \qquad \forall\, p \in P, t \in T \tag{23}$$

$$\sum_{i\in V}\sum_{p\in P} q_{ip}.y_{ik}^t \leqslant Q.z_{kt} \qquad \forall\, k \in K, t \in T \tag{24}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{t\in T} y_{ik}^t = 1 \qquad \forall\, i \in V \tag{25}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{t=1}^{a_i-1} y_{ik}^t = 0 \qquad \forall\, i \in V \tag{26}$$

$$u_i \geqslant \sum_{k\in K}\sum_{t\in T} t.y_{ik}^t - b_i \qquad \forall\, i \in V \tag{27}$$

$$\sum_{i\in V} y_{ik}^t \leqslant \sum_{i\in V} y_{ik-1}^t \qquad \forall\, k \in K', t \in T \tag{28}$$

$$z_{kt} \geqslant y_{ik}^t \qquad \forall\, i \in V, k \in K, t \in T \tag{29}$$

$$x_{pt} \geqslant 0, \qquad h_{pt} \geqslant 0, \qquad v_{pt} \in \{0,1\} \qquad \forall\, p \in P, t \in T \tag{30}$$

$$u_i \geqslant 0 \qquad \forall\, i \in V \tag{31}$$

$$y_{ik}^t \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in V, k \in K, t \in T \tag{32}$$

$$z_{kt} \in \{0,1\} \qquad \forall\, k \in K, t \in T \tag{33}$$

Nesta formulação, a função objetivo (20) é idêntica a função apresentada na Seção (3.1), assim como as restrições (21) e (22). As restrições (23) controlam o balanço do fluxo da produção. As restrições (24) garantem que o somatório das demandas dos clientes, caso o veículo k seja utilizado no período t será limitado pela capacidade do veículo. As restrições (25) determinam que todos os clientes devem ser atendidos por um e somente um veículo. As restrições (26) garantem que o cliente i apenas será atendido pelo veículo k a partir do período a_i. As restrições (27) determinam o atraso u_i para cada cliente. As restrições (28) reduzem a ocorrência de soluções simétricas que deterioram a qualidade da formulação garantindo que o veículo k apenas será utilizado após o veículo $k-1$, sendo $K' = K\backslash\{1\}$. As restrições (29) determinam que se o cliente i utilizar o veículo k no período t, o custo de transporte será pago pela ativação da variável z_{kt}. Por fim, as restrições (30) - (33) definem o domínio das variáveis do problema.

3.3. Formulação por Representantes

Uma terceira formulação, conhecida como formulação por representantes, baseada em formulações utilizadas com sucesso em Frota et al. (2010) e Bahiense et al. (2014) para resolver o problema de Coloração de Grafos é apresentada nesta seção. Nesta formulação são utilizadas variáveis r_{ij} que têm valor igual a 1 caso o cliente j represente o cliente i. O cliente j irá representar o cliente i caso ambos tenham seus produtos contidos em um mesmo veículo e $j \leqslant i$ para todo i e j. Um cliente é representado por um e somente um representante. Esta formulação apresenta restrições que tem como objetivo reduzir o número de soluções viáveis simétricas. Os parâmetros utilizados são os mesmos da formulação presente na Seção 3.2 e suas variáveis são:

Variáveis:
v_{pt} variável binária que tem valor 1 caso o produto p seja produzido no período t;
u_i atraso em períodos com relação a janela de tempo de atendimento do cliente i;
x_{pt} quantidade do produto p produzido no período t;
h_{pt} quantidade do produto p em estoque no período t;
r_{ij} variável binária com valor igual a 1 caso o cliente i seja representado pelo cliente j;
w_{it} variável binária com valor igual a 1 caso o cliente i seja atendido no período t;

$$\min \quad \sum_{p\in P}\sum_{t\in T} c_p^S.v_{pt} + \sum_{p\in P}\sum_{t\in T} c^E.h_{pt} + \sum_{j\in V} c^F.r_{jj} + \sum_{i\in V} c_i^L.u_i \tag{34}$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{p\in P} g_p.x_{pt} \leqslant l_t \qquad \forall\, t \in T \tag{35}$$

$$x_{pt} \leqslant M.v_{pt} \qquad \forall\, p \in P, t \in T \tag{36}$$

$$h_{pt-1} + x_{pt} = \sum_{i\in V} q_{ip}.w_{it} + h_{pt} \qquad \forall\, p \in P, t \in T \tag{37}$$

$$\sum_{t \in T} w_{it} = 1 \qquad \forall\, i \in V \tag{38}$$

$$\sum_{t=1}^{a_i - 1} w_{it} = 0 \qquad \forall\, i \in V \tag{39}$$

$$u_i \geqslant \sum_{t \in T} t.w_{it} - b_i \qquad \forall\, i \in V \tag{40}$$

$$\sum_{j \in V : j \leqslant i} r_{ij} = 1 \qquad \forall\, i \in V \tag{41}$$

$$r_{ij} \leqslant r_{jj} \qquad \forall\, i \in V, j \in V : j \leqslant i \tag{42}$$

$$\sum_{i \in V : j \leqslant i} \sum_{p \in P} q_{ip}.r_{ij} \leqslant Q.r_{jj} \qquad \forall\, j \in V \tag{43}$$

$$w_{it} - w_{jt} \leqslant 1 - r_{ij} \qquad \forall\, i \in V, j \in V : j \leqslant i, t \in T \tag{44}$$

$$w_{jt} - w_{it} \leqslant 1 - r_{ij} \qquad \forall\, i \in V, j \in V : j \leqslant i, t \in T \tag{45}$$

$$x_{pt} \geqslant 0, \qquad h_{pt} \geqslant 0, \qquad v_{pt} \in \{0,1\} \qquad \forall\, p \in P, t \in T \tag{46}$$

$$u_i \geqslant 0 \qquad \forall i \in V \tag{47}$$

$$w_{it} \in \{0,1\}, \qquad \forall\, i \in V, t \in T \tag{48}$$

$$r_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in V, j \in V : j \leqslant i \tag{49}$$

Nesta formulação, os custos de transporte na função objetivo (34) são contabilizados para cada representante $r_{jj} = 1$. As restrições (35) - (37) são semelhantes às respectivas restrições apresentadas na Seção 3.2. As restrições (38) determinam que um cliente é atendido em um e somente um período. As restrições (39) garantem que o cliente i apenas será atendido a partir do período a_i. As restrições (40) determinam a quantidade u_i de atraso para cada cliente. As restrições (41) determinam que um cliente i é representado por um e somente um cliente j. As restrições (42) determinam que um cliente i é representado pelo cliente j apenas se o cliente j é um representante. As restrições (43) garantem que o somatório das demandas dos clientes será menor que a capacidade de cada veículo. As restrições (44) e (45) são utilizadas para reduzir o número de soluções simétricas. Estas restrições garantem que o cliente i e o cliente j serão atendidos no período t apenas se i for representado por j. Por fim, as restrições (46) - (49) definem o domínio das variáveis do problema.

4. Experimentos Computacionais

Para a realização dos experimentos presentes neste trabalho foi utilizado um servidor com processador Intel Core i7 CPU 2.67GHz, 16 GB de memória RAM rodando o sistema operacional Ubuntu $12.04.5$ LTS. Os modelos foram codificados na linguagem OPL, do inglês *Optimization Programming Language*, e resolvidos utilizando o *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio* na versão 12.6. Durante os experimentos, o número de *threads* do CPLEX foram limitados a 4 e o tempo de execução dos modelos em 3600 segundos.

Para avaliar os três modelos foram geradas instâncias formadas por 3, 5 e 6 produtos, 6, 8 e 10 períodos e 10, 20, 30 e 50 clientes utilizando os procedimentos descritos em Bertazzi et al. (2005) e Armentano et al. (2011). Os autores desses trabalhos consideraram que o número de veículos utilizados eram ilimitados. Como o nosso problema define que um veículo deve ter capacidade suficiente para atender a todas as demandas de um cliente, o limite superior do número de veículos foi definido inicialmente como sendo igual ao número de clientes. Os trabalhos usados como referência na geração das instâncias não consideravam a possibilidade de atraso na entrega dos produtos. Nós definimos o valor do custo de atraso por período como $c_i^L \in [100, 1000]$ que são valores com a mesma ordem de grandeza dos outros custos do problema. A janela de atendimento de cada cliente foi gerada em duas fases. Inicialmente foi gerado um ponto central da janela de atendimento $C_j \in [1, T]$. Posteriormente foi escolhido um valor de amplitude $A_j \in [0, 1]$. O valor de amplitude foi aplicado à direita e à esquerda do centro da janela de atendimento. As demandas dos clientes foram definidas como $q_{ip} \in [10, 100]$. A quantidade de recursos necessários para produzir cada unidade de um produto é dado por $g_p = 1$. A capacidade de produção por período foi definida por $l_t = Cap * \sum_i \sum_p q_{ip}/T$, com $Cap = 3.5$ e o custo de estoque na fábrica foi definido por $C^E \in \{0, 3; 0, 8\}$. Nos experimentos, verificou-se que com estes valores para a constante Cap e para o custo de estoque, ocorria a concentração da produção nos períodos iniciais, pois a capacidade de produção era alta e os custos de estoques reduzidos. Os valores dos custos de estoque foram alterados para $C^E \in [1; 10]$ e o valor da constante $Cap = 1.5$, o que permitiu que a produção ficasse devidamente distribuída ao longo dos períodos. Nos artigos, a distância euclidiana entre dois clientes foi definida por D^v_{ij} com os valores de $x_i \in [0, 500]$ e $y_i \in [0, 1000]$. Em nosso trabalho, reduzimos os intervalos da posição dos clientes para $x_i \in [0, 50]$ e $y_i \in [0, 100]$ resultando em um menor valor para o custo de utilização dos veículos. O objetivo desta alteração é aproximar os custos finais de transporte e de produção. O custo da utilização dos veículos é dado por $c^F = (Total\_Clientes + 1) * max(D^v_{kl})$. Os autores consideraram que os níveis de estoque deviam ser mantidos em valores entre um limite inferior $L_{ip} \in [50, 150]$ e um limite superior $U_{ip} = L_{ip} + q_{ip} * 10$. A capacidade dos veículos foi definida como $Q = max(U_{ip})$. Finalmente, o custo de produção do produto p é definido por $c^S_p = 100 * x \in \{0, 3; 0, 8\}$. Foram geradas dez instâncias para cada combinação dos valores de períodos, clientes e produtos, dentre as quais 180 foram utilizadas neste trabalho.

A Tabela 1 apresenta os resultados para o primeiro grupo de experimentos em que foram avaliados os três modelos. Na primeira coluna temos a identificação da instância que é formada pelo número de clientes, o número de períodos e o número de produtos. A segunda coluna apresenta o número de soluções ótimas obtidas dentre as dez execuções para cada conjunto de parâmetros. A terceira coluna apresenta os valores médios do tempo de execução obtidos entre as soluções ótimas encontradas. Se nenhuma solução ótima for obtida é apresentado o tempo limite de execução. A quarta coluna apresenta a média de todas as execuções do GAP em % fornecido pelo solver. A quinta coluna apresenta o número de variáveis binárias de cada modelo. A sexta coluna apresenta uma métrica para avaliar a qualidade da relaxação linear do modelo. Nesta coluna são apresentados valores de quão distante do melhor limite superior encontrado entre todos os modelos a relaxação linear está. Este valor é obtido através da expressão $(Bub - LB)/Bub$, onde Bub é o melhor limite superior conhecido e LB o limite inferior dado pela relaxação linear do modelo. A sétima coluna apresenta o número de nós explorados pelo solver. Finalmente, a oitava, a nona e a décima colunas apresentam os custos médios de produção e estoque, de transporte e o custo gerado pelo atraso no empacotamento dos produtos em %. Os mesmos dados são apresentados nas colunas seguintes para o segundo e o terceiro modelos.

Baseados nos resultados obtidos na Tabela 1 e em experimentos preliminares verificou-se que os valores das relaxações lineares do primeiro modelo têm baixa qualidade. Assim, pode-se constatar que este modelo não é competitivo para as instâncias utilizadas em nossos experimentos. O segundo e terceiro modelos por outro lado, possuem uma relaxação linear de melhor qualidade, apresentando resultados semelhantes quanto ao número de instâncias resolvidas na otimalidade e quanto aos valores da relaxação linear. Acreditamos que estes dois modelos podem ser usados em procedimentos futuros de decomposição e geração de colunas para a obtenção de soluções de instâncias com maior número de itens.

Um novo conjunto de testes foi realizado no qual as instâncias utilizadas foram idênticas as do primeiro experimento variando apenas o número de veículos. O número de variáveis e de restrições do primeiro e do segundo modelos são dependentes do número de veículos. Gerar instâncias com um número de veículos superiores ao necessário aumenta o número de variáveis binárias e con-

Tabela 1: Experimentos comparando os três modelos

Inst	Modelo 1 - Baseado em Schmid et al. (2013)									Modelo 2 - Indexado no tempo									Modelo 3 - Formulação por representantes								
	#	t	G	Bin	Rel	No	P	T	A	#	t	G	Bin	Rel	No	P	T	A	#	t	G	Bin	Rel	No	P	T	A
	o	(s)	(%)		(%)		(%)	(%)	(%)	o	(s)	(%)		(%)		(%)	(%)	(%)	o	(s)	(%)		(%)		(%)	(%)	(%)
10-6-3	9	1.098,3	1,0	178	90,9	2.515.366	59,2	30,9	9,9	10	2,8	0,0	407	44,5	1.127	59,2	30,9	9,9	10	0,3	0,0	105	55,6	957	59,2	30,9	9,9
10-6-5	2	1.817,0	23,2	190	94,1	2.698.507	72,5	22,8	4,8	10	23,6	0,0	486	61,4	6.496	73,1	23,3	3,5	10	10,7	0,0	119	66,5	8.531	73,1	23,3	3,5
10-8-3	0	3.600,0	23,7	204	93,1	7.001.305	67,1	28,3	4,7	10	19,6	0,0	551	45,9	6.121	65,9	27,5	6,5	10	52,4	0,0	122	57,7	43.201	65,9	27,5	6,5
10-8-5	0	3.600,0	37,6	220	94,5	3.944.127	74,2	22,7	3,2	10	294,9	0,0	594	57,3	93.028	74,6	21,2	4,2	10	92,0	0,0	138	63,4	66.670	74,6	21,2	4,2
20-6-3	0	3.600,0	74,7	538	88,1	2.123.679	47,6	47,0	5,5	10	25,7	0,0	1.607	35,5	3.040	47,7	47,1	5,2	10	25,3	0,0	295	47,4	6.661	47,7	47,1	5,2
20-6-5	0	3.600,0	85,3	550	92,4	1.603.816	50,7	46,5	2,7	9	166,2	0,6	1.638	49,9	12.249	50,6	45,8	3,7	9	1.075,6	0,4	306	50,5	411.372	50,6	45,8	3,7
20-8-3	0	3.600,0	80,6	584	90,1	2.160.292	46,6	47,0	6,4	10	42,0	0,0	1.975	35,7	3.872	47,7	46,4	5,9	10	50,0	0,0	321	51,5	12.287	47,7	46,4	5,9
20-8-5	0	3.600,0	87,3	600	92,9	1.409.876	53,8	42,8	3,3	8	423,5	0,9	2.112	48,5	28.994	54,9	42,9	2,2	8	468,6	0,5	339	52,5	84.049	54,9	42,9	2,2
20-8-6	0	3.600,0	89,3	608	93,9	1.133.139	55,4	41,0	3,6	6	995,3	3,2	2.138	53,5	46.469	56,5	41,0	2,5	5	851,2	2,7	346	54,5	124.179	56,3	41,0	2,7
20-10-6	0	3.600,0	91,1	660	94,5	107.4442	57,0	38,6	4,5	4	1.042,5	2,6	2.614	52,0	47.220	57,5	38,8	3,7	3	723,3	2,3	379	55,8	110.964	57,6	38,8	3,6
30-6-3	0	3.600,0	71,1	1.098	86,9	552.005	31,5	65,0	3,5	10	115,2	0,0	3.719	27,5	3.445	31,9	65,5	2,7	10	344,3	0,0	590	32,5	411.46	31,9	65,5	2,7
30-6-5	0	3.600,0	83,3	1.110	91,7	529.895	31,2	65,0	3,8	3	2.455,0	3,0	3.679	34,5	131.861	31,0	65,1	3,9	0	3.600,0	4,9	594	34,6	350.587	31,0	65,0	3,9
30-8-3	0	3.600,0	71,8	1.164	89,5	354.635	33,7	61,6	4,7	10	267,8	0,0	5.021	31,8	6.730	35,2	62,2	2,6	9	825,3	0,5	639	41,2	52.208	35,2	62,2	2,6
30-8-5	0	3.600,0	84,7	1.180	92,9	425.017	40,1	56,3	3,6	3	1.391,7	5,7	4.579	40,9	39.243	41,1	57,0	1,9	0	3.600,0	8,7	641	41,4	254.577	41,1	56,9	2,0
30-8-6	0	3.600,0	87,7	1.188	94,1	344.918	36,4	59,9	3,7	0	3.600,0	8,1	4.480	43,0	64.811	37,5	60,2	2,3	0	3.600,0	7,1	642	43,5	258.848	36,6	60,7	2,7
30-10-6	0	3.600,0	90,3	1.260	94,8	233.937	42,4	53,8	3,8	0	3.600,0	12,4	5.807	47,1	40.594	45,5	53,3	1,2	0	3.600,0	11,6	699	47,2	145.887	44,8	53,2	2,0
50-8-6	0	3.600,0	95,0	2.948	95,1	45.113	20,0	77,0	3,0	0	3.600,0	13,2	12.446	25,7	7.720	20,2	78,3	1,5	0	3.600,0	5,1	1.549	25,7	51.682	20,1	78,2	1,7
50-10-6	0	3.600,0	94,6	3.060	95,5	42.082	24,0	70,7	5,3	0	3.600,0	15,8	15.893	29,8	5.599	25,7	72,1	2,2	0	3.600,0	6,9	1.632	29,8	35.315	24,6	73,3	2,1

sequentemente a dificuldade em resolver o problema. Foi realizado um pré-processamento sobre as instâncias utilizadas no segundo experimento que consiste em resolver um problema de empacotamento de itens, para determinar um novo limite máximo de veículos necessários para resolver cada instância. Considerando que, no pior caso, todos os produtos de todos os clientes sejam entregues em um mesmo período, este pré-processamento fornece um novo limite superior para o número de veículos. A solução do problema de empacotamento de itens no pré-processamento das instâncias teve como critério de parada o GAP de otimalidade de 3%. Este problema foi resolvido através do modelo proposto em Carvalho (2002), utilizando um algoritmo em C++ para resolver os modelos em *OPL*. Com exceção de 3 instâncias onde o tempo de solução do problema de empacotamento foi da ordem de 20 segundos, em todas as outras instâncias utilizadas em nossos experimentos este problema foi resolvido com tempos da ordem de um segundo. O preprocessamento das instâncias não afeta o desempenho do terceiro modelo que não depende do número de veículos. Assim, o segundo experimento foi realizado apenas com o segundo modelo. Os resultados estão presentes na Tabela 2 que tem a mesma estrutura da tabela 1, com exceção do nome da instância que agora tem o número de veículos como último parâmetro.

Comparando os resultados obtidos entre os dois experimentos verifica-se que a redução do número de veículos permitiu que um número maior de soluções ótimas fossem encontradas, o que pode ser visto por exemplo, nas instâncias *20-10-6, 30-6-5 e 30-8-5*. Além disso, para as instâncias nas quais não foi possível encontrar valores ótimos, foi observado uma importante redução do valor do GAP's. Devido ao baixo esforço computacional necessário para realizar o pré-processamento, é claramente justificável a adoção de tal procedimento.

Tabela 2: Execução modelo indexado no tempo com Bin Packing

Inst	# o	t (s)	G (%)	Bin	Rel (%)	No	P (%)	T (%)	A (%)
10-6-3-2	10	0,0	0,0	105	44,5	544	59,2	30,9	9,9
10-6-5-3	10	7,5	0,0	167	61,4	6.008	73,1	23,3	3,5
10-8-3-2	10	2,7	0,0	135	45,9	4.857	65,9	27,5	6,5
10-8-5-3	10	90,7	0,0	205	57,3	74.460	74,6	21,2	4,2
20-6-3-3	10	1,2	0,0	310	35,5	1.324	47,7	47,1	5,2
20-6-5-5	10	355,6	0,0	474	49,9	68.916	50,6	45,8	3,7
20-8-3-3	10	4,4	0,0	385	35,7	2.536	47,7	46,4	5,9
20-8-5-6	9	103,8	0,2	582	48,5	25.994	54,9	42,9	2,2
20-8-6-5	7	239,9	1,2	681	53,5	59.745	56,6	41,0	2,5
20-10-6-6	7	984,6	0,8	941	52,0	110.009	57,6	38,8	3,6
30-6-3-9	10	3,1	0,0	634	27,5	778	31,9	65,5	2,7
30-6-5-8	8	481,8	0,3	925	34,5	383.317	31,5	64,4	4,1
30-8-3-7	10	12,4	0,0	856	31,8	3.495	35,2	62,2	2,6
30-8-5-8	10	1.114,5	0,0	1.267	40,9	325.339	41,2	57,1	1,7
30-8-6-8	6	627,0	1,8	1.372	43,0	278.498	37,6	60,2	2,2
30-10-6-8	2	1.388,5	5,4	1.647	46,8	368.316	45,6	52,5	2,0
50-8-6-12	0	3.600,0	4,6	3.842	23,4	72.521	21,0	77,7	1,2
50-10-6-13	0	3.600,0	6,1	4.816	26,9	88.136	24,7	73,6	1,7

5. Considerações Finais

Neste trabalho foram apresentados três modelos para resolver o *Problema integrado de Dimensionamento de Lotes e Empacotamento de Produtos - PDLEP*. Verificou-se que o segundo e o terceiro modelos, que foram propostos em nosso trabalho, apresentaram resultados de melhor qualidade quando comparado com o modelo que é baseado no artigo Schmid et al. (2013). Foi apresentada uma estratégia de pré-processamento das instâncias que forneceu um novo limite superior para o número de veículos, o que permitiu a obtenção de um maior número de soluções ótimas e uma importante redução dos valores dos GAP's.

Como propostas de trabalhos futuros podemos citar: o desenvolvimento de métodos de decomposição baseados nos modelos propostos para resolver instâncias com maior número de itens e a realização de um maior número de experimentos com alterações dos parâmetros das instâncias e análises da sensibilidade das soluções.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente suportado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais – FAPEMIG e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Referências

Armentano, V.A.; Shiguemoto, A.L. e Lokketangen, A. (2011). Tabu search with path relinking for an integrated production distribution problem. *Computers & Operations Research*, v. 38, p. 1199–1209.

Bahiense, L.; Frota, Y.; Noronha, T. e Ribeiro, C. (2014). A branch-and-cut algorithm for equitable coloring problem using formulation representatives. *Discrete A. Mathematics*, v. 164, p. 34–46.

Bertazzi, L.; Paletta, G. e Speranza, M.G. (2005). Minimizing the total cost in an integrated vendor-managed inventory system. *Journal of Heuristics*, v. 11, n. 5-6, p. 393–419.

Carvalho, J. M. V. (2002). *LP* models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, v. 141, n. 2, p. 253 – 273.

Ertogral, K. (2008). Multi-item single source ordering problem with transportation cost: A lagrangian decomposition approach. *European Journal of Operational Research*, v. 191, p. 156–165.

Frota, Y.; Maculan, N.; Noronha, T. e Ribeiro, C. (2010). A branch-and-cut algorithm for partition coloring. *Networks*, v. 55, n. 3, p. 194–204.

Glover, F.; Jones, G.; Karney, D.; Klingman, D. e Mote, J. (1979). An integrated production, distribution, and inventory planning system. *Interfaces*, v. 9, n. 5, p. 21–35.

Liberalino, H.; Duhamel, C.; Quilliot, A.; Kedad-Sidhoum, S. e Chretienne, P. (2011). The integrated lot-sizing and vehicle routing problem. *Computational Intelligence In Production And Logistics Systems (CIPLS), IEEE Workshop On*, (2011).

Lima, A. P. N.; Souza, M. C. e Ravetti, M.G. (2013). Dimensionamento de lotes com remanufatura integrado ao problema do roteamento de veìculos com entrega e coletas simultâneas. *XLV SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, p. 3517–3526, (2013).

Molina, F.; Morabito, R. e Araújo, S. A. (2013). Modelos matemáticos para problemas de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade e custos de transporte. *Gestão e Produção*, v. 20, p. 573–86.

Molina, F.; Santos, M. O. dos; Toledo, F. M. B. e Araújo, S. A. de. (2009). An approach using Lagrangian/surrogate relaxation for lot-sizing with transportation costs. *Pesquisa Operacional*, v. 29, p. 269–288.

Norden, L. V. e Velde, S. L. V. de. (2005). Multi-product lot-sizing with a transportation capacity reservation contract. *European Journal of Operational Research*, v. 165, n. 1, p. 127–138.

Schmid, V.; Doerner, K. F. e Laporte, G. (2013). Rich routing problems arising in supply chain management. *European Journal of Operational Research*, v. 224, n. 3, p. 435 – 448.