

## UMA ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE A CONFIABILIDADE DE UM CONJUNTO DE REDES REAIS E OS GRAFOS DE CONFIABILIDADE ÓTIMA

Felipe Sousa Chaves<sup>1</sup>, Carla Silva Oliveira<sup>2</sup>, Leonardo da Silva Lima<sup>3</sup>

### RESUMO

A topologia de uma rede é uma questão crucial para o planejamento operacional desta. Questões como qual a topologia de rede que incorre em menor custo operacional e simultaneamente maximiza a confiabilidade? são de interesse prático. A confiabilidade de uma rede pode ser definida como a probabilidade que esta tem de permanecer conexa mesmo após a remoção de um subconjunto de suas arestas. A proposta deste artigo é avaliar a confiabilidade de um conjunto de redes reais tomando como referencial a topologia dos grafos purificados. Um algoritmo foi desenvolvido para a construção dos grafos purificados e suas confiabilidades comparadas com um *dataset* de topologias de redes óticas de transporte, que correspondem ao *backbone* de redes reais de fibra ótica, provenientes do sítio *Topology Zoo*. Os resultados computacionais indicam que a melhora da confiabilidade pode ser melhor entendida com a significativa redução das cardinalidades dos conjuntos de corte da rede.

**PALAVRAS CHAVE.** Confiabilidade. Grafos Purificados. Teoria dos Grafos

**Área principal.** (Teoria e Algoritmos em Grafos)

### ABSTRACT

The topology of a network is a crucial issue for the operational planning. Questions like "What is the network topology with the lower cost and simultaneously the bigger reliability? " have practical significance. The reliability of a network may be defined as the probability that this network remains connected even after removing a subset of edges. The purpose of this article is to evaluate the reliability of a set of real networks taking as a reference the topology of purified graphs. An algorithm was developed to build purified graphs and their reliabilities comparing to a set of topologies of optical transport networks, which correspond to the real backbone of fiber networks , from site *Topology Zoo*. The computational results indicate that improved reliability can be better understood by significantly lowering the cardinalities of the network cut sets.

**KEYWORDS.** Reliability. Purified Graphs. Graph Theory.

**Main area** (Theory and Algorithms in Graphs)

<sup>1</sup>**Felipe Sousa Chaves.** Furnas Centrais Elétricas – Eletrobras Furnas. Rua Real Grandeza 219, Botafogo, Rio de Janeiro, RJ / . Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – CEFET-RJ. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas. fschaves@furnas.com.br

<sup>2</sup>**Carla Silva Oliveira.** Escola Nacional de Ciências e Estatística - ENCE/IBGE. Rua André Cavalcanti, 106, Centro, RJ. carla.oliveira@ibge.gov.br

<sup>3</sup>**Leonardo da Silva Lima.** Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – CEFET-RJ. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas. Av. Maracanã, 229, Maracanã – RJ. leolima.geos@gmail.com

## 1. Introdução

O desenho da topologia de uma rede é uma tarefa difícil por envolver diferentes parâmetros a serem otimizados, que são, inclusive, muitas vezes conflitantes. Um exemplo é a necessidade de desenvolver uma topologia que minimize os seus custos operacionais e ao mesmo tempo maximize a confiabilidade. Cada tipo de rede possui peculiaridades de natureza física e tecnológica que devem ser consideradas na implementação e análise de arquiteturas, porém certas características básicas, como os custos, de construção e manutenção, e a probabilidade de falhas das estações e das vias de transporte, apesar de variarem significativamente em cada tipo de rede, estarão sempre presentes e são informações úteis para as fases de construção, expansão e operação. Nesse sentido, os procedimentos para cálculo dos algoritmos se diversificam por focar na otimização de determinados atributos, fornecendo aos técnicos informações objetivas para auxílio no processo de tomada de decisão. Ao construir uma rede, deve-se levar em consideração não só a confiabilidade, mas a capacidade do fluxo, questões econômicas, políticas, sociais.

A confiabilidade de uma rede é definida como a probabilidade que esta tem de permanecer conexa mesmo após a remoção de um subconjunto dos seus vértices ou de suas arestas. Uma rede é mais confiável que outra se ela possui uma probabilidade menor de se desconectar, no caso de falhas aleatórias. Em geral, o problema de otimização de confiabilidade de redes na literatura aparece sob quatro aspectos: (A) os vértices são tidos como confiáveis e as possibilidades de falha estão nas arestas; (B) as arestas são confiáveis e as possibilidades de falha estão nos vértices; (C) os vértices e arestas falham de modo independente; (D) otimização de uma função objetivo sujeita a restrições de confiabilidade da rede. As abordagens dos problemas (A) e (B) envolvem uma função de confiabilidade com parâmetros clássicos de vulnerabilidade (conectividade de vértice e aresta) visando a determinação de classes de grafos mais confiáveis sob a hipótese de que as falhas ocorrem de modo independente e com a mesma probabilidade. Já a abordagem (C) envolve, em geral, simulações de Monte Carlo. No problema (D), programação dinâmica e métodos heurísticos são mais utilizados. Algumas referências sobre estes temas são: Bauer *et al.* (1985), Fishman (1986), Yeh *et al.* (1994), Snow (2001), Deng *et al.* (2004), Shpungin (2006), Cardoso *et al.* (2008), Yu *et al.* (2010), Yeh *et al.* (2010), Lee *et al.* (2010), Elshqirat *et al.* (2015).

Neste artigo, a abordagem considera o problema do tipo (A). A proposta é avaliar a confiabilidade de um conjunto de redes reais tomando como base a topologia dos grafos purificados, proposta por Bauer *et al.* (1985). Desta forma, o desenvolvimento aqui proposto considera duas etapas: (i) a implementação computacional da metodologia proposta por Bauer *et al.* (1985) para a construção de grafos com máxima confiabilidade para um relação específica de número de vértices e arestas; (ii) a comparação da confiabilidade do grafo teórico, que tem máxima confiabilidade dentre todos os grafos com mesma quantidade de vértices e arestas, com os resultados de confiabilidade das redes reais conhecidas como Redes Óticas de Transporte (OTN). Testes computacionais foram realizados a partir de um *dataset* de topologias de redes óticas de transporte provenientes de *Topology Zoo* (2015) que correspondem ao *backbone* de redes reais de fibra ótica. Vale ressaltar que até o momento não encontramos artigos com a implementação do procedimento de Bauer *et al.* (1985) para grafos purificados e também nenhuma aplicação em redes reais.

O trabalho está organizado em três seções. A Seção 2 descreve conceitos básicos da teoria dos grafos e conceitos de conectividade em grafos úteis para o entendimento do texto. A Seção 3 trata dos conceitos de confiabilidade de redes abordados no trabalho e são apresentados o algoritmo implementado e duas redes reais ilustrando as modificações que este provoca na topologia da rede. A Seção 4 introduz a definição de grafos purificados e o algoritmo implementado. Os resultados computacionais e discussão dos mesmos são apresentados na Seção 5. Indicações de trabalhos futuros e as considerações finais são apresentadas na última seção do artigo.

## 2. Conceitos Básicos

Nesta seção, são apresentados os principais conceitos teóricos utilizados ao longo deste trabalho.

### 2.1 Teoria dos Grafos

Um grafo é uma estrutura  $G = (V, E)$ , onde  $V$  é o conjunto discreto cujos elementos são denominados de vértices ou nós e  $E$ , e o conjunto de arestas de  $G$ , as quais representam as interações entre os vértices. O grafo  $G$  é denominado orientado, se existe uma orientação indicando o sentido da aresta, caso contrário é denominado não-orientado. Se existirem duas ou mais arestas conectando o mesmo par de vértices, dizemos que essas arestas são paralelas e se uma aresta envolver um único vértice, essa aresta é denominada laço. Um grafo não-orientado sem laços e sem arestas paralelas é denominado grafo *simples* e quando um grafo possui pelo menos duas arestas paralelas é denominado *multigrafo*. O número de vértices do grafo é indicado por  $n = |V|$  e o número de arestas por  $m = |E|$ . Dois vértices  $v_i$  e  $v_j$  são adjacentes se existe a aresta  $(v_i, v_j) \in E$ . Uma aresta é adjacente a outra quando compartilham um mesmo vértice. Um percurso é uma família de arestas sucessivamente adjacentes e este é denominado fechado quando a última aresta da sequência for adjacente à primeira e, caso contrário, é denominado aberto. Um *caminho* em um grafo é uma sequência de arestas que conectam uma sequência de vértices distintos, exceto possivelmente o primeiro e o último. Um ciclo é um caminho que começa e termina no mesmo vértice. O *grau* de um vértice  $v_i \in V$ , denotado por  $d(v_i)$  é o número de arestas ligadas diretamente a ele. A sequência de graus de um grafo é dada por  $d(G) = (d(v_1), \dots, d(v_n))$ , onde  $d(v_1) \geq \dots \geq d(v_n)$ . O *grau mínimo* de um grafo  $G$ , denotado por  $\delta(G)$  é definido como  $\delta(G) = d(v_n)$  e o *grau máximo*, denotado por  $\Delta(G)$ , é definido por  $\Delta(G) = d(v_1)$ . Um grafo é dito *k-regular* se todos os seus vértices possuem grau  $k$ , ou seja  $d(v_i) = k$ ,  $1 \leq i \leq n$  e quando  $d(v_i) = n - 1$ ,  $\forall 1 \leq i \leq n$ , o grafo é denominado completo e denotado por  $K_n$ . Um grafo é denominado trivial se  $n \neq 0$  e  $m=0$ . A matriz de adjacência de um grafo é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , cujas entradas são iguais a um se os vértices são adjacentes e zero caso contrário. Dessa forma,  $A_{i,j}=1$  se os vértices  $v_i$  e  $v_j$  são adjacentes e  $A_{i,j}=0$  se os mesmos não têm ligação direta por uma aresta. Uma subdivisão em aresta, ou destilação, é a inserção de um vértice de grau 2 em uma aresta de  $G$ . Uma subdivisão uniforme (ou destilação uniforme) em aresta em  $G$  é a subdivisão de todas as arestas desse grafo, ou seja, se  $e = (v, w)$  é uma aresta de um grafo  $G$ ,  $G'$  é o grafo obtido de  $G$  quando  $e$  é substituída por um par de arestas  $(v, u)$  e  $(u, w)$  em  $G$ . Logo, a aresta  $e$  foi subdividida e haverá subdivisão uniforme em  $G$  quando a mesma operação for realizada em todas as arestas de  $G$ . Analogamente, duas subdivisões uniformes inserem dois vértices de grau 2 em todas as arestas do grafo  $G$ . A Figura 1 apresenta dois grafos  $H$  e  $K$  obtidos de subdivisões uniformes das arestas do grafo  $G$ .

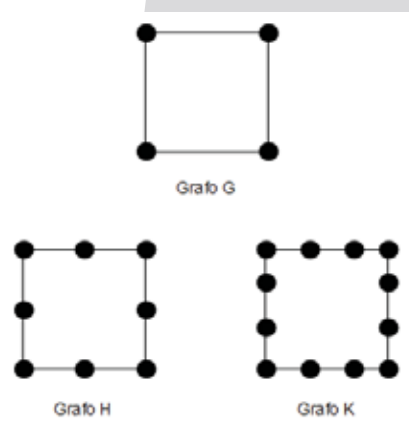


Figura 1 – Subdivisões Uniformes em Arestas

No exemplo acima, o grafo  $G$  passa por uma subdivisão uniforme em arestas, gerando o grafo  $H$ , enquanto que ao passar por duas subdivisões uniformes em arestas gera o grafo  $K$ . Os grafos  $H$  e  $K$  são denominados de grafos subdivisão uniforme de  $G$ . Ressalta-se que o grafo  $K$  resulta da inserção de dois vértices de grau 2 em cada aresta de  $G$  e caso houvesse uma nova subdivisão uniforme de um vértice no grafo  $H$ , o grafo resultante seria distinto do grafo  $K$ . Para maior detalhamento sobre subdivisões uniformes em arestas, ver Teixeira (2008).

## 2.2 Medidas de Conectividade

A conectividade de um grafo e a quantidade de conjuntos de corte são conceitos importantes em redes e, portanto, fundamentais para a análise de sua confiabilidade. Um conjunto de arestas  $S \subset E$  é um conjunto de corte de arestas se  $G \setminus S$  é desconexo. A *conectividade de arestas* de um grafo  $G$ , denotado por  $\lambda(G)$ , é dada pela cardinalidade do menor conjunto de corte de arestas que desconecta o grafo. O número de conjunto de cortes de aresta de  $G$  com tamanho  $\alpha$  é uma medida de conectividade da rede. Um grafo é  $k$ -aresta conexo se e somente se todo conjunto de corte de arestas que o torna desconexo possui no mínimo  $k + 1$  arestas. O número de conjunto de cortes de arestas com cardinalidade  $\alpha$ , denotado por  $m_\alpha(G)$ , é uma interessante medida de conectividade da rede e um parâmetro utilizado para o cálculo de confiabilidade da rede, como será abordado na seção seguinte. A Figura 2 exibe dois grafos  $G$  e  $H$  ambos com  $n = 8$ ,  $m = 13$  e  $\delta(G) = \delta(H) = 3$ , mas  $\lambda(G) = k(G) = 1$  e  $\lambda(H) = k(H) = 3$ . Observe que nestes casos tem-se  $m_1(G) = 1, m_2(G) = 6$  e  $m_1(H) = m_2(H) = 0$ .

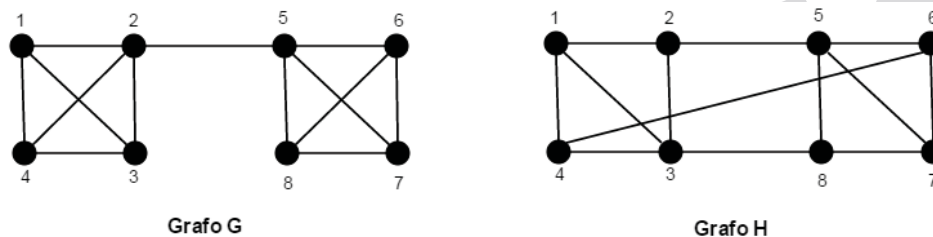


Figura 2 – Conectividades dos grafos  $G$  e  $H$ .

Um grafo  $G$  é denominado *max  $\lambda$*  se dentre todos os grafos com  $n$  vértices e  $m$  arestas ele possuir a máxima conectividade de arestas. Uma importante classe de grafos nesse contexto são os *grafos de Harary*, que são grafos  $k$ -conexos com  $n$  vértices e  $\lfloor \frac{kn}{2} \rfloor$  arestas. Os grafos  $H$  de Harary possuem a propriedade:  $k(H) = \lambda(H) = \delta(H)$ . Um grafo  $G$  é denominado *min  $m_\lambda$* , se dentre todos os grafos com  $n$  vértices e  $m$  arestas possui o menor número de conjunto de corte de arestas de cardinalidade  $\lambda(G)$ . Grafos simultaneamente *max  $\lambda$*  e *min  $m_\lambda$*  são, naturalmente, uma classe bastante interessante para o estudo de confiabilidade de redes.

## 3. Confiabilidade de Redes

A confiabilidade de uma rede é a probabilidade da mesma permanecer conexa após a remoção de um subconjunto de suas arestas. O conceito de confiabilidade aqui abordado considera que a rede está operando se existe pelo menos um caminho entre cada par de vértices (o termo em inglês é o *all-terminal reliability*). Assume-se que cada vértice é perfeitamente confiável e somente as arestas estão propensas às falhas, de modo que falham de modo independente e com probabilidade  $\rho$ . Kelmans (1966) definiu a confiabilidade de uma rede pela expressão:

$$\hat{P}(G, \rho) = \sum_{i=\lambda}^m m_i \rho^i (1 - \rho)^{e(G)-i}. \quad (1)$$

Observe que esta função probabilística envolve parâmetros determinísticos: a conectividade de aresta,  $\lambda = \lambda(G)$ , e o número de conjunto de cortes de arestas de cardinalidade  $i$ ,  $m_i(G)$ . O cálculo exato da confiabilidade a partir de (1) é um problema NP-Difícil, ou seja, o esforço computacional cresce exponencialmente com a ordem da rede. Este fato deve-se aos cálculos dos  $m_i(G)$ , vide Provan e Ball (1983). Bauer *et al.* (1985) observaram que  $\hat{P}(G, \rho)$  funciona bem para pequenos valores de  $\rho$  e, nestes casos, o cálculo de  $\hat{P}(G, \rho)$  poder ser reduzido somente ao cálculo do primeiro termo da expressão (1), quando  $i$  é igual à conectividade de arestas  $\lambda(G)$ . Esta é uma aproximação útil, pois o cálculo de todos os  $m_i$  é um problema NP-hard. Em exemplos práticos, Lima *et al.* (2014) exibem exemplos em que o cálculo do segundo termo da equação (1) pode ser significativo. Desta forma, sugere-se aqui uma aproximação de (1) por uma função  $P(G, \rho)$  que é dada pela seguinte expressão:

$$P(G, \rho) = m_\lambda \rho^\lambda (1 - \rho)^{m-\lambda} + m_{\lambda+1} \rho^{\lambda+1} (1 - \rho)^{m-\lambda-1}. \quad (2)$$

Bauer *et al.* (1985), Colbourn (1991), Wang e Zhang (1997) e Deng *et al.* (2004) estudaram os grafos com máxima confiabilidade, ou seja, máximo valor de  $P(G, \rho)$ , para um número fixo de vértices e arestas. Bauer *et al.* (1985) e Deng *et al.* (2004) mostraram que se  $\frac{2m}{n} \geq 3$ , existe um grafo de Harary de ordem  $n$  e tamanho  $m$  que tem a maior confiabilidade possível dentre todos os grafos com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Assim, Bauer *et al.* (1985) estudaram o caso da determinação dos grafos com máxima conectividade de aresta e mínima cardinalidade de conjuntos de corte de tamanho  $\lambda$ , denotados por grafos  $\max \lambda$  &  $\min m_\lambda$ . Por outro lado, Wang e Zang (1997) estudaram o caso da determinação dos grafos com máxima conectividade de aresta e mínima cardinalidade de conjuntos de corte de tamanho  $\lambda + 1$ , denotados por  $\max \lambda$  &  $\min m_{\lambda+1}$ . Deng *et al.* (2004) estenderam os resultados de Bauer *et al.* (1985) no sentido de determinar os grafos de Harary  $\max \lambda$  &  $\min m_i$  para  $i = \lambda, \dots, 2\lambda - 3$ .

### 3.1 Grafos Purificados

Bauer *et al.* (1985) verificaram que para determinadas redes, onde era fornecido o número de vértices  $n$  e o número de arestas  $m$ , tal que  $\lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 2$ , as topologias dos grafos de Harary não maximizavam mais a função de confiabilidade dada em (2). Na realidade, nestes casos, as topologias com máxima confiabilidade são obtidas a partir do conceito de *Grafos Purificados* (GP), que é introduzido mais adiante. Para tanto, a partir das provas fornecidas por Bauer *et al.* (1985), apresenta-se aqui neste trabalho um procedimento para a construção de grafos com máxima confiabilidade  $\max \lambda$  e  $\min m_\lambda$ , a partir dos grafos GP.

Um grafo purificado consiste num grafo obtido por sucessivas contrações de vértices de grau 2 com seus vizinhos, operações essas que aglutinam 2 vértices, eliminando a aresta que os interliga. A Figura 3 exibe 3 grafos e seus grafos purificados correspondentes.

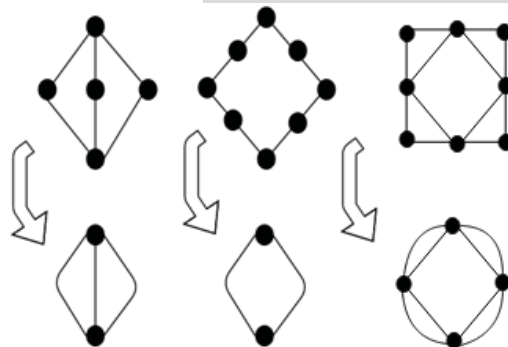


Figura 3 – Purificação de Grafos

Wang e Zang (1997) constroem um grafo purificado a partir da substituição de cada *caminho disjunto por arestas* por uma única aresta, onde os vértices terminais têm grau no mínimo 3 e cada vértice intermediário tem grau 2. A realização da operação inversa, ou seja, a inserção de vértices de grau 2 em grafos purificados, é denominada *destilação*. Bauer *et al.* (1985) demonstram que os grafos gerados por sucessivas destilações uniformes a partir de um grafo purificado com  $\lambda = 3$  terão o menor valor de  $m_2$  e  $m_3$ . Note que este fato é importante para nossos propósitos uma vez que a otimização da equação (2) pressupõe a minimização de  $m_2$ . Portanto, grafos que obedecem a relação  $\left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor = 2$  e apresentam máxima confiabilidade devem possuir máximo valor de  $\lambda$  e mínimos valores de  $m_2$  e  $m_3$ .

### 3.2 Algoritmo Proposto

A metodologia de simulação segue o algoritmo sugerido por Bauer *et al.* (1985) e tem como dados de entrada: o número de vértices, denotado por  $n$ , e o número de arestas, denotado por  $m$ , da nova rede desejada obedecendo a relação  $\left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor = 2$ ; e a probabilidade de falha das arestas. A saída do algoritmo fornece a matriz de adjacência do grafo com máxima confiabilidade, as cardinalidades dos conjuntos de corte de tamanhos 2, 3 e 4, e a confiabilidade da rede, obtida a partir da equação (2) com o cálculo de  $P(G, \rho)$ . O algoritmo descrito no Quadro 1 demonstra como obter o grafo com máxima confiabilidade a partir do grafo purificado. Este foi implementado no *Matlab*.

Quadro 1 – Algoritmo para construção de grafos  $\left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor = 2$  com máxima confiabilidade

Entrada:  $n, m \in \mathbb{Z}_+^*$  tal que  $\left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor = 2$

Saída: Grafo  $G$ , 2-conexo sendo  $\max \lambda$  e  $\min m_\lambda$

**Início**

- 1 Calcular  $t = m - n$
- 2 Construir Grafo Purificado  $G_1$  3-regular, com  $2t$  vértices e  $3t$  arestas
- 3 Calcular  $k = \left\lfloor \frac{n-2t}{3t} \right\rfloor$
- 4 Obter  $G_2$ , com  $n_k = 2t + 3kt$  vértices e  $m_k = (k + 1)3t$   
ao realizar  $k$  subdivisões uniformes nas arestas de  $G_1$
- 5 Se  $n_k \neq n$  e  $m_k \neq m$  faça
- 6      $L = |m - m_k|$
- 7     Obter  $G_3$  ao inserir 1 vértice de grau 2 em  $L$  arestas distintas de  $G_2$
- 8      $G = G_3$
- 9 Senão  $G = G_2$

**Fim**

Fonte: Próprios Autores (2015)

Os grafos resultantes do algoritmo são aqui denominados *Grafos de Confiabilidade Ótima (GCO)*. Destacamos duas redes reais conhecidas como *Redes Óticas de Transporte (OTN)* para efeito de ilustração da modificação que o algoritmo provoca na topologia da rede. As topologias de duas redes reais OTN e das redes GCO são apresentadas nas Subseções 3.1 e 3.2 através das redes CompuServe e Darkstrand. A redes foram obtidas em Topology Zoom (2015).

### 3.2.1 Rede CompuServe

A empresa CompuServe, subsidiária da AOL, e também conhecida como CIS, foi a pioneira no transporte de dados online dos Estados Unidos na década de 90 e meados de 2000. Abaixo, apresenta-se a sua rede de transporte de dados com a topologia que tinha em 2011, ou seja, 11 vértices e 14 arestas. Observe que a Rede CompuServe obedece à restrição  $\left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor = 2$ . A Figura 4 abaixo apresenta a rede OTN CompuServ original e a topologia da rede GCO correspondente.

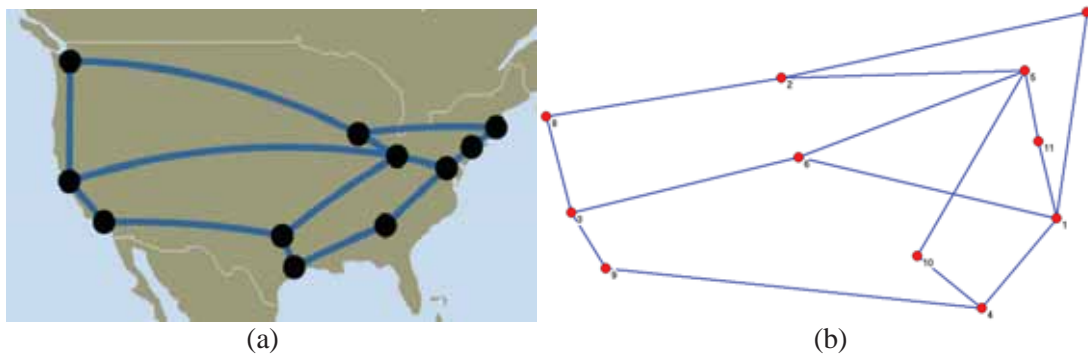


Figura 4 – (a) Rede OTN CompuServe [ref.]; (b) Rede GCO resultante do algoritmo do Quadro 1

Para  $\rho = 0,01$ , a topologia do grafo GCO, proveniente do algoritmo, apresenta uma redução de 37,50% em  $\hat{P}$ , a probabilidade de a rede ser desconectada após falhas aleatórias nas arestas da rede. Para  $\rho = 0,10$ , a redução é de 38,15%. É possível observar que a topologia da rede GCO é bem próxima a topologia original, o que significa que a confiabilidade da rede real já é razoável.

### 3.2.2 Rede Darkstrand

Darkstrand, outra rede óptica norte-americana, é uma rede com altas taxas na velocidade de transmissão e que possui 28 vértices e 31 arestas. Note que esta rede também obedece a relação  $\left[\frac{2m}{n}\right] = 2$ . A Figura 5 apresenta as topologias original e a GCO.

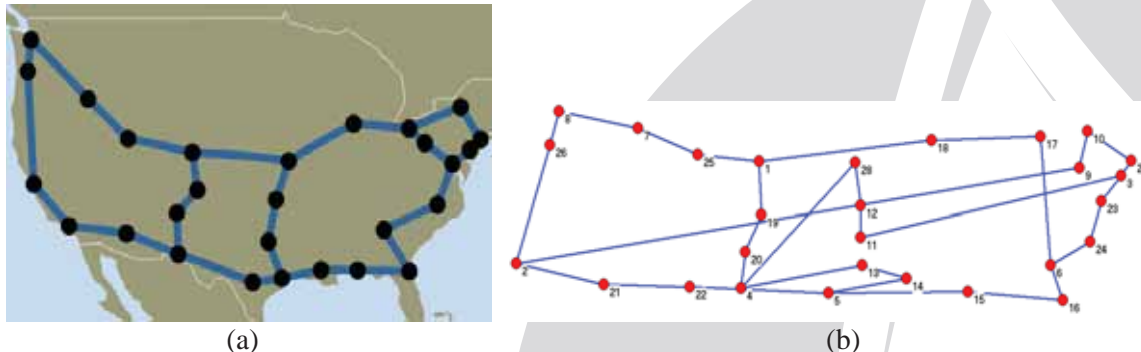


Figura 5 – (a) Rede OTN Darkstrand; (b) Rede GCO resultante do algoritmo do Quadro 1

Para  $\rho = 0,01$ , a topologia proveniente do algoritmo apresenta uma redução de 40,84% em  $\hat{P}$ , a probabilidade da rede ser desconectada após falhas aleatórias nas arestas da rede. Para  $\rho = 0,10$ , a redução em  $\hat{P}$  é de 27,96%.

## 4. Experimentos Computacionais

O *Internet Topology Zoo* é uma coleção de redes criada a partir das informações que os operadores das redes disponibilizam publicamente. De acordo com os dados do sítio do *Topology Zoo* (2015) são aproximadamente 261 redes. Os desenhos destas redes, assim como algumas características técnicas, estão disponíveis e representam o *backbone* da rede. Ressalta-se que estas redes são bastante utilizadas na literatura para estudo em diversas áreas do conhecimento, veja *Knight et al.* (2011).

Os experimentos computacionais realizados neste artigo consideraram um *dataset* de 9



redes reais (incluindo as outras 2 redes apresentadas nas Seções 3.2.1 e 3.2.2) conhecidas como Redes Óticas de Transporte (OTN) e disponíveis no *Topology Zoo* (2015). As redes foram selecionadas de acordo com o critério  $\lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 2$  e os testes computacionais foram realizados com a finalidade de verificar o quanto as topologias reais estariam distantes das topologias GCO levando-se em consideração a confiabilidade e o número de conjuntos de corte de tamanhos 2, 3 e 4. O cálculo dos conjuntos de corte foi realizado pelo método de enumeração explícita uma vez que, nas redes estudadas, o número de arestas é linear com o número de vértices. Mesmo sob esta hipótese, o tempo computacional para o cálculo da função de confiabilidade em diversos casos foi da ordem de 400 minutos.

Na Tabela 1, um identificador é atribuído para cada rede estudada, o nome das redes reais com suas respectivas quantidades de vértices e arestas e o grau médio.

Tabela 1 – Características das Redes Reais

ID da Rede	Nome	$n$	$m$	$\frac{2m}{n}$
1	Albilencore	10	13	2,6
2	Aconet	15	22	2,9
3	Arnes	17	20	2,4
4	Austria Changed	15	22	2,9
5	Bren	10	11	2,2
6	Bulgaria	23	24	2,1
7	Carnarie	19	26	2,7
8	Compuserve	11	14	2,5
9	Darkstrand	28	31	2,2

A Tabela 2 apresenta os resultados computacionais para as Redes OTN e GCO. A primeira coluna representa o identificador de cada rede conforme correspondência da Tabela 1. As colunas correspondentes às Redes OTNs e Redes GCOs exibem a confiabilidade das redes,  $P(G, \rho)$  para  $\rho = 0,1$  e os correspondentes valores para os conjuntos de corte de tamanhos 2, 3 e 4. A última coluna mostra a variação percentual de confiabilidade das topologias das Redes GCO em relação às topologias reais das Redes OTN.

Tabela 2 – Confiabilidade das topologias OTN e GCO

ID	Rede OTN				Rede GCO				Varição de Confiabilidade
	$P$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$P$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$\% \Delta P$
1	0,9193	8	102	517	0,9505	4	62	395	3,39%
2	0,9052	14	284	2628	0,9090	1	36	533	0,42%
3	0,7725	36	588	4068	0,8794	14	308	2973	13,84%
4	0,9059	14	282	2600	0,9090	1	36	1738	0,34%
5	0,8473	17	165	330	0,8512	16	165	330	0,46%
6	0,5302	121	2024	10626	0,5666	84	2024	10626	6,87%
7	0,8982	17	434	5054	0,9669	5	146	2021	7,65%
8	0,9169	8	117	682	0,9486	5	78	532	3,46%
9	0,7107	72	2058	25399	0,7916	40	1355	20398	11,38%

A partir dos resultados da Tabela 2, destaca-se que as Redes GCO apresentam maior confiabilidade que as Redes OTN em todos os casos. Este fato deve-se a significativa redução da cardinalidade dos conjuntos de corte com a reconfiguração da topologia. As redes Arnes (3), Carnarie (7) e Darkstrand (9) apresentaram os maiores incrementos em confiabilidade com a topologia GCO. Um caso interessante é a Rede Bren (5) cujos conjuntos de corte da Rede GCO correspondente não apresentou queda significativa como nos demais casos, assim como, conseqüentemente, a confiabilidade não teve melhora significativa. Certamente, isto deve-se ao fato da topologia original da Rede Bren já estar bem próxima da topologia ótima GCO.

## 5. Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Do ponto de vista do planejamento de redes, o algoritmo implementado neste trabalho é bastante útil para a indicação da topologia de rede que maximiza a confiabilidade. A metodologia também é interessante como *benchmark* de confiabilidade quando as redes já existem.

É importante notar que a função de confiabilidade depende da escolha do parâmetro probabilístico  $\rho$ , que, em geral, assume valores pequenos, ou seja,  $\rho < \frac{1}{2}$ . Assim, a melhora da confiabilidade pode ser melhor entendida com a significativa redução das cardinalidades dos conjuntos de corte de tamanhos 2, 3 e 4, conforme apontam os resultados computacionais nas redes estudadas. Este fato representa uma contribuição vantajosa no planejamento de construção e expansão de novas redes.

Uma questão interessante que surge é: “Como realizar a expansão da rede de forma a manter ou melhorar a confiabilidade das atuais redes OTN?”. A continuidade da pesquisa prevê o desenvolvimento de métodos heurísticos para solucionar o problema.

## 6. Referências

**Bauer, D., Boesch, F., Suffel, C.** (1985), Combinatorial optimization problems in the analysis and design of probabilistic networks, *Networks*, v.15, pp. 257-271.

**Cardoso, J., Almeida, J., Dias, J., and Coelho, P.** (2008), Structural reliability analysis using Monte Carlo simulation and neural networks, *Advances in Engineering Software* v.39 (6), pp. 505-513.

**Colbourn, C. J.** (1991), *Designs and Graphs*, special volume of *Discrete Mathematics*, 97

**Deng, H., Chen, J., Li, R.** (2004), "On the construction of most reliable networks", *Discrete Applied Mathematics*, v. 140, pp. 19-33.

**Elshqirat, B., Soh, S., Rai, S. and Lazarescu** (2015), M., "Topology Design with Minimal Cost Subject to Network Reliability Constraint", *IEEE Transactions on Reliability*, v. 64 (1), pp. 118-131.

**Fishman, G. S.** (1986), A Monte Carlo sampling plan for estimating network reliability, *Operations Research*, v. 34, pp. 581-594.

**Harary, F.** (1969), *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

**Kelmans, A.** (1966), Connectivity of probabilistic networks, *Automatic Telemekhanika*, v.3, pp.98-116.

**Knight, S.; Nguyen, H.X.; Falkner, N.; Bowden, R.; Roughan, M.** (2011), *The Internet*

Topology Zoo, *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on* , v. 29 (9), pp.1765-1775.

**Lee, K. Lee, H., and Modiano, E.** (2010), Reliability in layered networks with random link failures. In Proceedings of the 29th conference on Information communications (INFOCOM'10). IEEE Press, Piscataway, NJ, USA, pp. 1667-1675.

**Lima, L.S, Teixeira, L.S, Abreu, N.M.** (2014), Modelos de redes confiáveis, *Sistemas & Gestão*, v. 9, pp. 488-494.

**Shpungin, Y.** (2006), Combinatorial Approach to Reliability Evaluation of Network Unreliable Nodes ad Unreliable Edges, WASET 2006.

**Snow, A.** (2001), Network reliability: the concurrent challenges of innovation, competition, and complexity. *IEEE Transactions on Reliability* 50(1), pp. 38-40

**Teixeira, L.S.** (2008), Grafos que modelam redes confiáveis, Mestrado em Engenharia de Produção, COPPE, Universidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro

**Topology Zoo** (2015), The Internet Topology Zoo. Disponível em: <http://www.topology-zoo.org/>, Acesso em: Março de 2015.

**Wang, G., Zhang, L.,** (1997), The structure of  $\max \lambda - \min m\lambda+1$  graphs used in the design of reliable networks, *Networks*, v. 30, pp. 231-242.

**Yeh, M.S., Lin, J.S. and Yeh, W.C.** (1994), A new Monte Carlo method for estimating network reliability, Proceedings of the 16th International Conference on Computers & Industrial Engineering, pp. 723-726.

**Yu, S., Shao, F., Meng, H.** (2010), Uniformly optimal graphs in some classes of graphs with node failures, *Discrete Mathematics*, v. 310, Issue 1, pp. 159-166.