TOMADA DE DECISÃO SOBRE INVESTIMENTOS EM UM AMBIENTE DE INCERTEZA: UMA APLICAÇÃO NO MERCADO FINANCEIRO BRASILEIRO

José Victor Pereira de Souza
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE
Centro Acadêmico do Agreste – CAA, PPGEP
Rodovia BR 104, S/N, Km 59, Nova Caruaru, Caruaru – PE
E-mail: victor.souza@ufpe.br

Maisa Mendonça Silva
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE
Centro Acadêmico do Agreste – CAA, PPGEP
Rodovia BR 104, S/N, Km 59, Nova Caruaru, Caruaru – PE
E-mail: maisa.ufpe@yahoo.com.br

RESUMO

A incerteza é algo presente na vida humana. Quando a tomada de decisão acontece sob condições de incerteza, a Teoria da Decisão se faz relevante nesse processo. Sendo assim, este trabalho tem por objetivo estabelecer à luz da Teoria da Decisão um modelo que auxilie o investidor financeiro a escolher a ação que ofereça o menor risco para ele, tendo por base as suas preferências e julgamentos, além do conhecimento advindo de dados e/ou especialista(s). Para isso, se fez necessária uma pesquisa bibliográfica sobre investimentos financeiros e Teoria da Decisão, para descobrir como estavam as pesquisas atuais sobre esses temas. Além do mais, uma coleta de dados das variáveis envolvidas nos modelos foi realizada em sites respeitados e confiáveis na área financeira e econômica. Neste estudo, foi possível identificar que o ativo financeiro de risco ouro é o mais indicado para investimento, tanto sozinho quanto em conjunto com o dólar americano e/ou com as ações (IBOVESPA).

PALAVRAS CHAVE. Teoria da Decisão, Mercado Financeiro, Seleção de Portfólio.

Área: ADM - Apoio à Decisão Multicritério

ABSTRACT

Uncertainty is present in human life. When decision-making takes place under uncertainty, Decision Theory is relevant in this process. Thus, this study aims to propose, in the light of Decision Theory, a model that helps financial investors to choose the action that offers the lowest risk, based on his preferences, his judgments and on expert's Knowledge. For this, a literature research on financial investments and Decision Theory was performed to figure out the current research on these topics. Moreover, a collection of variables data involved in these models was performed on financial and economic websites. In this study, we observed that the financial asset risk gold is the most suitable for investment, either alone or together with the US dollar and/or stocks (Ibovespa).

KEYWORDS. Decision Theory. Financial Market. Portfolio Selection.

Area: Multicriteria Decision Support

1. Introdução

Para satisfazer as suas necessidades e desejos, o ser humano lida com diversas decisões durante a sua vida. Muitas dessas são simples, rotineiras, e que pouco impactam no seu futuro. No entanto, existem decisões que podem gerar consequências que irão marcar fortemente a vida do decisor.

A melhor decisão varia no tempo e no espaço (GOMES, 2006), além de, também, com as preferências do decisor. Nem sempre é possível se chegar à melhor decisão, uma vez que existem vários fatores que afetam a tomada de decisão: tempo limitado, a importância da decisão, o ambiente, certeza/incerteza e risco, agentes decisores e conflitos de interesses (LACHTERMACHER, 2007). Mesmo assim, levando ou não em consideração esses fatores, o ser humano não deixa de decidir, pelo contrário, busca meios para otimizar os resultados, principalmente para aquelas decisões cujas consequências causam grandes repercussões. Recorre-se principalmente a modelos, os quais são representações simplificadas da realidade (Ibid.).

Na área Financeira, que não é diferente da realidade humana, há vários tipos de decisões que devem ser tomadas periodicamente e, outras, raramente, sendo muitas dessas decisões complexas e únicas, isto é, singulares. Para ajudar nessa tarefa, geralmente, nada fácil, modelos também são utilizados. Uma das subáreas de Finanças onde as decisões costumam ser cruciais para a obtenção ou não de retornos futuros é a de investimentos financeiros.

Uma decisão errada, tomada por quem pretende aplicar recursos em algum investimento financeiro, se levado ao extremo negativo, pode reduzir a quantidade investida a zero. Situações que envolvem decisões de alta complexidade e que geram consequências de muita repercussão devem ser analisadas com mais atenção por parte do decisor, nesse caso, pelo investidor, o qual pode utilizar-se de ferramentas que o auxiliem nessa tarefa. O uso de modelos se faz extremamente relevante nessas situações, principalmente os matemáticos.

Markowitz (1952, 1959) através do conhecido modelo matemático de média-variância apresentou uma forma eficiente de lidar com ativos financeiros, permitindo construir portfólios que apresentam mínimo risco dado determinado retorno ou máximo retorno a certo risco. Desde então, vários outros trabalhos foram publicados referentes à seleção de portfólios de investimentos: Sharpe (1967), Stone (1973), Sengupta (1989), Best e Grauer (1991), Corazza e Favaretto (2007), Ferreira et al. (2009), Brandt (2010), Shen et al. (2014) e Yi et al. (2014).

Torna-se quase inviável tomar decisões na área de investimentos em ativos financeiros sem utilizar alguma ferramenta e/ou teoria, uma vez que as variáveis que compõem o problema de decisão nessa área são muitas e as suas relações complexas, além de envolver muita incerteza. Sendo assim, para fins deste trabalho, será utilizada a Teoria da Decisão, visto que ela fornece uma "estrutura e metodologia para a tomada de decisão racional quando os resultados são incertos" (HILLIER; LIEBERMAN, 2010).

Este trabalho se justifica por trazer uma abordagem diferenciada sobre o assunto investimentos em ativos financeiros, complementando o clássico modelo de Markowitz (1952). Além do mais, trata de um tema que é muito discutido e estudado na Academia e também em empresas especializadas, devido a sua relevância para os investidores e, de modo geral, pelo interesse despertado na sociedade. Além disso, este trabalho mostra, indiretamente, que investir em ativos financeiros é mais fácil do que muitas pessoas pensam e que não é necessário dispor de tanto capital inicial. Este trabalho tem como objetivo mostrar alguns conceitos relacionados com investimentos em ativos financeiros, além de apresentar a Teoria da Decisão como ferramenta para problemas de decisão com incerteza. Além disso, o objetivo principal deste trabalho é formular um modelo lógico-racional que envolva a decisão de em qual ativo ou portfólio financeiro investir dado que a natureza escolhe, independente da vontade do decisor (no caso, o investidor), uma determinada cotação de preço do ativo. Por fim, aplicar o modelo, com dados reais, no mercado financeiro brasileiro. Para isso, foi realizada uma pesquisa bibliográfica e uma pesquisa na internet, a qual permitiu a obtenção dos dados das variáveis que comporão o modelo.

2. Teoria da Decisão

Tomar decisões em situações de incerteza é algo que aparece em diversos contextos e com mais frequência do que se pensa, devido, principalmente, à quantidade e à qualidade de informação disponível (ZIMMERMANN, 2000).

A Teoria da Decisão de Abraham Wald divulgada em 1950 em seu livro intitulado *Statistical Decisions Functions* é a mais estudada e difundida quando se trata de decisão e incerteza (Souza, 2007). Nessa teoria, procura-se tomar decisões levando em consideração o que se quer (preferência do decisor), o que se sabe (informações sobre as variáveis envolvidas no processo decisório) e o que se pode fazer (as alternativas disponíveis de ação). Ela é composta basicamente pela agregação lógica de quatro conjuntos: o dos estados da natureza, o de observações, o de ações e o de bens (consequências, *payoffs*). Para relacionar as diversas variáveis desses conjuntos existem os mecanismos probabilísticos (o conhecimento *a priori*, a função consequência e a função de verossimilhança), os quais permitem combiná-las e gerar resultados probabilísticos. Esses, por sua vez, fornecerão informações fundamentais para a teoria. Os demais elementos da teoria são: a função utilidade, a utilidade da função consequência, regras de decisão, função risco e risco de Bayes.

O conjunto dos estados da natureza é composto por todas as possíveis representações das configurações de fatores externos ao decisor e que estão fora do seu controle. A natureza escolhe o seu estado independentemente da vontade daquele. Cada estado da natureza é indicado por θ e o seu conjunto por Θ. Logo se tem que $\Theta = \{\theta\}$.

O conjunto de observações, representado pela letra $\mathcal{X}$, compõe-se de possíveis valores assumidos por algumas variáveis que guardam certa relação com determinado estado da natureza. Cada observação denota-se por x, como consequência tem que $\mathcal{X} = \{x\}$.

O conjunto de ações ($\mathcal{A}$) contém uma lista do que o indivíduo pode decidir fazer. Aqui o decisor tem o total controle sob as variáveis/ações (a), pois é ele quem vai escolher qual atitude tomar, ou seja, qual ação que vai realizar, assumindo os riscos inerentes a ela e se responsabilizando pelas futuras consequências. Logo, ele terá o poder de influenciar os resultados finais juntamente com os estados da natureza. Então $\mathcal{A} = \{a\}$.

O conjunto de bens (consequências ou *payoffs*) é composto pelos resultados gerados a partir da escolha de uma ação por parte do decisor conjuntamente com a escolha da natureza (estado da natureza). O conjunto de todas as consequências é denotado por $\mathcal{P} = \{p\}$, onde p representa a consequência.

Os mecanismos probabilísticos e os demais elementos da teoria são:

1. Conhecimento *a priori:* A expressão *a priori* pode ser compreendida aqui como “antes de se fazer qualquer experimento” ou “antes de se observar os valores de qualquer variável que possa dar informações sobre θ” (SOUZA, 2007, p. 87). A distribuição *a priori* representa justamente isso: uma distribuição de probabilidade sobre a chance de ocorrer determinado estado da natureza sem que seja feito qualquer experimento. Essa distribuição pode ser calculada por séries históricas (dados passados) e/ou através da opinião de especialista (ou grupo de especialistas) sobre o grau de crença que ele atribui ao estado da natureza.

2. Função consequência: A função consequência é a representação das probabilidades de ocorrer determinada consequência p dado que o decisor escolheu a ação a e a natureza optou pelo estado θ. É denotada por $P(p|\theta, a)$, quando a variável p é discreta.

3. Função de verossimilhança: Também conhecida como o “canal de comunicação” com a natureza, a função de verossimilhança é uma distribuição de probabilidade que associa as observações x com os estados da natureza θ. É denotada por $P(x|\theta)$, nos casos discretos.

4. Função utilidade: quando qualquer decisor toma uma decisão (e a põe em ação) e a natureza escolhe o seu estado, consequências são geradas. Umas são mais preferíveis que outras. A função utilidade $u(p)$ é uma função que busca representar justamente isso, as preferências do decisor com relação às possíveis consequências ou bens. Quanto mais desejável for um bem, maior será o valor dessa função.

Após ter definido a função consequência, surge uma pergunta relevante: como se calcular o grau de desejabilidade do decisor pela probabilidade de ocorrência de determinada consequência p? Nesse caso, entra em cenário a utilidade da função consequência, $u\big(P(p|\theta, a)\big)$, a qual é calculada da seguinte maneira:

$$u\big(P(p|\theta,a)\big) = \sum_{p} v(p)P(p|\theta,a). \tag{2.1}$$

5. **Regras de decisão:** uma vez de posse dos conjuntos e dos mecanismos probabilísticos é possível estabelecer um procedimento chamado de regra de decisão. As regras de decisão são procedimentos que relacionam possíveis ações que o decisor pode adotar com as observações a cerca do estado da natureza. O conjunto que agrupa todas as regras de decisões é denotado por $D = \{d\}$, onde d representa a regra de decisão. O total das regras de decisão é obtido da elevação do número de ações pelo número de observações, quando ambas são finitas, tendo-se: $\|D\| = \|\mathcal{A}\|^{\|\mathcal{X}\|}$. O que se deseja é uma regra de decisão que promova a melhor consequência possível para o decisor. Para tanto, vai-se fazer uso do conceito de risco de Bayes, que será visto mais adiante.

6. **Função risco ($\boldsymbol{R_d(\theta)}$):** é definida "como a perda média para o estatístico quando o verdadeiro estado da natureza θ e o estatístico usa a função (decisão) d" (SOUZA, 2007, p. 95). Para calcular a função risco se faz necessária a utilização da função de verossimilhança, conforme a fórmula a seguir:

$$R_d(\theta) = \sum_{x} L\big(\theta, d(x)\big)P(x|\theta). \tag{2.2}$$

7. **Risco de Bayes ($\mathbf{r}_d$):** segundo Souza (2007), o Risco de Bayes é o risco de obter um bem (consequência) dado uma regra de decisão e não dada uma regra de decisão e um estado da natureza. Ou seja, o risco de Bayes vai informar o risco associado a cada regra de decisão d, apoderando-se, para isso, do conhecimento *a priori* e da função risco.

Para se calcular o risco de Bayes, sendo os conjuntos discretos e a regra de decisão determinística, tem-se que:

$$\mathrm{r}_d = -u\big(P(p|d)\big) = -\sum_{\theta} \pi(\theta)u(P(p|\theta,d)) = \sum_{\theta} \pi(\theta)R_d(\theta). \tag{2.3}$$

Para se resolver a regra de Bayes (risco de Bayes) busca-se aquela regra de decisão d que minimize r_d. Portanto, o decisor deve escolher a regra de decisão que minimiza o risco de Bayes. Vale salientar que $u(P(p|\theta, d))$ é a utilidade da função consequência e seu negativo, na Teoria da Decisão, é definido como a Função Perda denotada por $L(\theta, d(x)) = -u(P(p|\theta, d(x)))$.

3. Finanças

A área Finanças é definida por Gitman (2010) como a arte e a ciência da gestão de dinheiro e é no mercado financeiro que acontecem as trocas de dinheiros e produtos, os quais são conhecidos como ativos financeiros. O termo ativo, o qual vem da Contabilidade, se emprega tanto para empresas como para o mercado financeiro. Ativos são bens concretos (máquinas, veículos, imóveis, etc.) quanto intangíveis, tais como direitos de valores que formam o patrimônio de uma empresa (contas a receber, por exemplo).

Um ativo financeiro compreende todo tipo de aplicação financeira. São exemplos de ativos financeiros: títulos de renda fixa públicos e privados, caderneta de poupança, debêntures, ações, metais (sendo ouro o mais conhecido), moedas estrangeiras, fundos de investimentos, etc.

Existem centenas de ativos financeiros, os quais são geralmente ofertados pelos bancos comerciais e pela Bolsa de Valores Brasileira (BM&FBOVESPA). Para fins deste trabalho, serão considerados os seguintes ativos, os quais apresentam rentabilidade variável e um alto grau de incerteza quanto ao seu rendimento: dólar americano, ouro e ações.

O dólar americano é uma das moedas estrangeiras mais populares do mundo e é considerado como uma alternativa de preservação de valor em momentos de incerteza econômica do país. Quando os indicadores mostram que haverá escassez na entrada de dólares no país ou aumento da saída de dólares, a perspectiva é que a moeda se valorize. Se ocorrer o contrário, isto é, um aumento da oferta da moeda no país, a taxa de câmbio será pressionada para baixo, ocorrendo, então, uma desvalorização da moeda (LUQUET, 2007).

Um dos metais mais desejados do mundo, o ouro, é uma forma de poupança e investimento. Atualmente, tanto a BM&FBOVESPA quanto o Banco do Brasil, além de algumas empresas, negociam esse metal precioso. O valor desse ativo é influenciado pelo cenário macroeconômico, cotação externa do metal e do dólar. Ele é comercializado em forma de títulos ou fisicamente (ASSAF NETO, 2008). O ouro é considerado um investimento de risco, assim como as ações, uma vez que suas cotações variam pela lei básica da oferta e da procura, bem como de fatores exógenos ao mercado financeiro (FORTUNA, 2008).

Quanto às ações, elas são emitidas pelas Sociedades Anônimas (S.A.) de acordo com aprovação prévia da Comissão de Valores Mobiliários (CVM), a qual é a responsável por disciplinar a emissão e a fiscalização de negociações de ações. As ações representam frações do capital social das empresas e são definidas caracteristicamente como ativos de risco (ASSAF NETO, 2009). No Brasil, a negociação de compra e venda de ações é realizada na BM&FBOVESPA.

São muitos os riscos quando se trata de aplicações financeiras. Cada um com suas peculiaridades. Sendo os principais: risco de mercado, risco operacional, risco de crédito, risco de liquidez, risco legal, e risco de concentração de emissor ou setor. O risco de concentração de emissor ou setor está fortemente relacionado ao portfólio de ativos e aos fundos de investimento. Esse risco expõe o investidor a todos os riscos a que estão sujeitos os emissores ou setor de concentração da carteira. Para diminuir esse tipo de risco, a diversificação tanto de ativos como de emissores e/ou setores se faz muito relevante. Markowitz (1952) propôs, no clássico artigo *Portfolio Selection*, um modelo formal que levou em consideração o princípio da diversificação.

4. Seleção de Portfólio de Investimentos

Markowitz (1952) é considerado o pai da Moderna Teoria dos Portfólios e, o seu trabalho, o marco na seleção de carteira de investimentos. Ele observou que o risco de um ativo individualmente não é tão relevante para uma análise de investimento, mas se adicionar vários ativos (compondo uma carteira de investimento) o risco e o retorno esperado, atuando de forma conjunta, podem se mostrar mais eficientes que um investimento isolado.

Dada a grande quantidade de ativos financeiros existentes, construir uma carteira de investimento eficiente, aplicando os conceitos de risco e retorno, não é uma tarefa tão simples, uma vez que há a necessidade de alguns dados sobre os investimentos financeiros, tais como: retorno esperado, desvio-padrão e correlação. Geralmente esses dados são obtidos de uma base histórica e/ou de especialista.

O retorno, $\bar{R}_i$, é quantificado, geralmente, através da média simples da rentabilidade do ativo *i* (para determinado período), isto é, pela esperança dos retornos passados:

$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_t}{n}. \qquad (4.1)$$

O número de observações e o retorno no instante *t* são representados, respectivamente, por *n* e R_t.

O desvio-padrão é a estatística mais frequentemente usada em Finanças para quantificar e medir a volatilidade dos investimentos, sendo usada, portanto, como uma medida de risco (Gitman, 2010). Quanto maior o valor dessa estatística mais arriscado será considerado o investimento e, provavelmente, maior será o retorno médio, pois, segundo, Xavier (2009) a relação de risco e retorno é diretamente proporcional. A seguir é mostrada a fórmula de risco de um ativo *i*:

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_t - \bar{R}_i)^2}{n-1}}. \qquad (4.2)$$

A correlação (ρ) é uma medida estatística entre séries de números que representam algum tipo de dados. Dito de outra forma, a correlação visa explicar o grau de relacionamento entre duas ou mais variáveis. Quando as séries movimentam-se na mesma direção, denomina-se correlação positiva. A correlação negativa ocorre quando as séries movimentam-se em direções opostas.

A ideia de Markowitz é construir carteira com ativos de correlação negativa; dessa forma, à medida que um ativo gera perda para a carteira, outro gerará ganhos. No entanto, mesmo a correlação sendo positiva, desde que os ativos não sejam perfeitamente correlacionados, o desvio-padrão da carteira será menor do que a média ponderada dos desvios-padrão dos ativos individualmente, tendo, relevância o estudo da carteira de investimento.

Da posse do retorno e risco dos ativos individuais e da correlação entre eles, é possível obter os valores para a carteira (portfólio) de investimentos como um todo. O retorno de uma carteira, $\bar{R}_P$, é simplesmente a média ponderada dos retornos dos ativos individuais, sendo o peso aplicado a cada retorno correspondente à fração do valor da carteira aplicada naquele ativo i (X_i):

$$\bar{R}_P = \sum_{i=1}^{j} (X_i \bar{R}_i), \tag{4.3}$$

onde j é o número de ativos na carteira.

O desvio-padrão da carteira é calculado da seguinte maneira:

$$\sigma_P = \left[\sum_{i=1}^{j} X_i^2 \hat{\sigma}_i^2 + \sum_{i=1}^{j} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j} X_i X_j \, \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j \rho_{ij} \right]^{1/2}, \tag{4.4}$$

onde ρ_{ij}é o coeficiente de correlação entre o retorno dos ativos i e j.

Para obter o percentual que deverá ser aplicado em cada ativo (X_i), de forma bem simplificada, resolve-se um problema matemático de programação linear, no qual as variáveis de escolha são os percentuais dos ativos e o objetivo é minimizar o risco.

5. Proposição e Aplicação do Modelo

Os dados necessários para a aplicação do modelo proposto foram extraídos dos sites do Banco Central do Brasil – BCB (www.bcb.gov.br) e da Bolsa de Valores Brasileira – BM&FBOVESPA (www.bmfbovespa.com.br). O período de tempo escolhido possui 233 meses que vai de janeiro de 1995 até maio de 2014. Esse intervalo de tempo foi selecionado pelo fato de o Brasil apresentar uma única moeda, o real, e por trazer uma grande quantidade de dados, o que permite melhores inferências dos resultados. As variáveis coletadas foram: taxa Selic mensal, cotações mensais do dólar americano (venda) e do ouro, índice IBOVESPA mensal e o valor mensal do Produto Interno Bruto (PIB) brasileiro.

Na sistemática da Teoria da Decisão é necessário indicar quem é o decisor. No caso de investimentos financeiros, os quais podem ser realizados por pessoas físicas ou jurídicas, individualmente ou em grupo, pode existir, então, um ou mais decisores. Para fins deste trabalho, supõe-se que o decisor é um investidor especulador que possui determinada quantidade de recursos financeiros para investir, na sua totalidade, em ativos financeiros.

5.1 Os estados da natureza

Tratando-se de investimentos financeiros, diversas variáveis não estão sob o controle do investidor. Uma delas é como estará a cotação futura do investimento escolhido. O valor da cotação de um ativo financeiro independe da vontade do investidor, na grande maioria das vezes. Sendo assim, os estados da natureza do modelo em questão serão compostos pelas cotações dos ativos financeiros que o investidor/decisor está interessado em investir.

Sendo os ativos tratados neste trabalho: dólar americano, ações (IBOVESPA) e ouro, os estados da natureza serão vetores compostos de forma binária pelas cotações desses ativos. Quando a cotação apresentada de determinado ativo ficar igual ou abaixo de sua média histórica, no intervalo de tempo estudado neste trabalho, será atribuído o valor 0 (zero). Em caso contrário, será atribuído o valor 1 (um).

Tendo uma série histórica e devido à regressão à média, quando um dado dessa série apresentar valor abaixo da média, é mais provável que o próximo dado apresente valores acima dessa média. Seguindo esse raciocínio, para o investidor, então, será interessante que os estados da natureza sejam compostos por cotações que se apresentem abaixo da média. Como o dólar, seguido pelo índice Bovespa, é o ativo que mais influencia os demais estudados (conforme visto na Tabela 5.1), ele será considerado mais relevante e, a sua cotação, mais significante para a composição dos estados da natureza. Dessa forma, a sequência decrescente de importância do ativo dentro do estado da natureza será: dólar americano, ações (IBOVESPA) e ouro.

Tabela 5.1: Relação entre os ativos

Coeficiente de correlação (ρ)		
Ativos	Ações (IBOVESPA)	Ouro
Dólar americano	-0,1619	0,4170
Ações (IBOVESPA)	1,0000	-0,0151

Como são três os ativos financeiros e, binárias, as suas possibilidades de configurações, segundo foi estabelecido anteriormente, ter-se-á, então, oito cenários: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 e 111. Esses cenários podem ser interpretados como sendo números na base 2, como mostrado a seguir:

$$000 = 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 0;$$
$$001 = 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1;$$
$$010 = 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2;$$
$$011 = 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 3;$$
$$100 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4;$$
$$101 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5;$$
$$110 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 6;$$
$$111 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 7.$$

Essa representação, além de incorporar o número de fatores presentes, permite também a incorporação de sua sinergia. Considerando essa representação numérica na base 2, obtêm-se os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, os quais serão os índices dos tetas. Com a ideia de regressão à média em mente, preferem-se os estados da natureza que apresentem mais fatores abaixo da média. Sendo assim, os menores números dessa sequência são preferíveis em relação aos maiores, criando a seguinte ordem decrescente de preferência: $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \ \theta_5, \theta_6$e θ_7.

5.2 As observações

As observações consistem em informações que guardam certa relação com os estados da natureza, auxiliando, através delas, a tomada de decisão.

O risco de mercado afeta diretamente o preço dos ativos financeiros e é influenciado por variáveis macroeconômicas, tais como PIB, taxa Selic, inflação, nível de emprego, etc. Os especialistas em Economia apontam que as duas primeiras variáveis são os principais fatores que influenciam a economia geral de um país (FROYEN, 2005). Sabendo disso, para compor as observações, foram escolhidas essas variáveis. Dessa maneira, cada observação do estado da natureza levará em consideração essas duas variáveis macroeconômicas. Além do mais, elas guardam uma estreita relação com os estados da natureza do modelo proposto, como pode ser visto na Tabela 5.2. Os valores que estão em vermelho indicam que há uma relação significante entre as variáveis a um nível de significância de 0,05.

Tabela 5.2: Correlação de Pearson entre as variáveis (α=0,05)

Variáveis	Selic	IPCA	PIB	Emprego	Dólar	IBOVESPA	Ouro
Selic	1,0000	0,4675	-0,7287	-0,6751	-0,3826	-0,4093	-0,6946
IPCA	0,4675	1,0000	-0,2310	-0,1984	0,0212	-0,0418	-0,1645
PIB	-0,7287	-0,2310	1,0000	0,9871	0,2050	0,6579	0,9725
Emprego	-0,6751	-0,1984	0,9871	1,0000	0,1024	0,7283	0,9668

Caso o valor do PIB fique igual ou abaixo da média do período estudado, isto é, 192.261,97 milhões de reais, será atribuído o valor 0 (zero). Em caso contrário, será o valor 1 (um). O mesmo será feito para a taxa Selic, sendo que a média dessa variável é 1,41% (a.m.). Dessa forma, as observações serão expressas como valores binários (0, 1), onde o PIB é representado pelo primeiro valor, aqui indicado por ω_1 e a taxa Selic por ω_2. Logo $x_i = (\omega_1, \omega_2)$, como mostrado a seguir:

Tabela 5.3: As observações

Observações	ω_1	ω_2
x_0	0	0
x_1	0	1
x_2	1	0
x_3	1	1

5.3 As ações

É através das ações que o decisor influencia diretamente as consequências. Ele assume os riscos inerentes à ação escolhida. Quando se trata de investimentos em ativos financeiros as principais ações que podem ser adotadas estão relacionadas com o "onde investir?".

As ações a serem tomadas pelo decisor neste trabalho giram em torno de em qual ativo financeiro ou em qual portfólio investir dentro do seguinte conjunto de ativos: ouro, ações (IBOVESPA) e dólar americano. Sendo assim e com o modelo média-variância proposto por Markowitz (1952, 1959) obtêm-se as possíveis alternativas de investimento, com seus respectivos retornos e riscos (Tabela 5.4). Observando essa tabela, percebe-se que as alternativas que estão em vermelho são dominadas, dado que existem outras alternativas que apresentam maiores retornos a um risco menor.

Tabela 5.4: Possíveis alternativas de investimento

Ação	Ativos financeiros			Retorno	Risco
	Dólar americano	Ações (IBOVESPA)	Ouro		
a_0	100,00%	0,00%	0,00%	0,4983	4,2733
a_1	0,00%	100,00%	0,00%	1,0691	10,6627
a_2	0,00%	0,00%	100,00%	1,1608	7,3678
a_3	82,52%	17,48%	0,00%	0,5981	3,7122
a_4	0,00%	32,56%	67,44%	1,1309	6,0185
a_5	88,91%	0,00%	11,09%	0,5718	4,2062
a_6	76,12%	16,94%	6,94%	0,6410	3,6826

Excluindo as alternativas dominadas, o problema de decisão será composto por a_2, a_4 e a_6.

5.4. As consequências

Para fins deste trabalho, as consequências refletirão, em porcentagem, o retorno mensal do investimento, seja ele um ativo único ou um portfólio. Esse retorno pode ser positivo, negativo ou nulo. O retorno será considerado nulo se variar dentro do intervalo de 0 a 0,5%, custo médio mensal de transações de investimentos financeiros, segundo o *Guia de Investimentos da BM&FBOVESPA* (2013). Então o conjunto das consequências será:

$\mathcal{P}$ = Variação ou não no retorno do investimento = $\{p_0, p_1, p_2\}$, onde:

$$\begin{cases} p_0 \rightarrow variação\ negativa\ do\ retorno \\ p_1 \rightarrow 0\% \leq retorno \leq 0{,}5\% \\ p_2 \rightarrow variação\ acima\ de\ 0{,}5\%. \end{cases}$$

O custo médio mensal de transações de investimentos financeiros é composto, geralmente, pela taxa de corretagem e/ou taxa de custódia. Ele pode variar de acordo com o tipo de investimento, com a quantidade investida e/ou com a existência de corretora durante as transações. Dessa forma, esse custo pode ser alterado dentro do modelo caso ele mude ao longo do tempo e/ou sejam acrescidos outros ativos financeiros.

5.5. Relacionando os conjuntos

Após a apresentação dos conjuntos que comporão o modelo proposto, torna-se necessário mostrar como eles serão relacionados a fim de se chegar à melhor regra de decisão ou ação a ser adotada, a qual procurará minimizar o risco da decisão por parte do decisor. Para isso, necessita-se da utilização dos mecanismos probabilísticos: conhecimento *a priori*, função consequência e função de verossimilhança, além de outras funções: função utilidade, utilidade da função consequência, função perda e risco de Bayes.

O conhecimento *a priori* do estado da natureza será adquirido através da frequência relativa de cada θ, como mostrado na Tabela 5.5. Para o estado da natureza θ_1 a probabilidade é nula de ocorrência, de acordo com a série histórica estudada.

Tabela 5.5: Conhecimento através de dados

Conhecimento *a priori*							
$\pi(\theta_0)$	$\pi(\theta_1)$	$\pi(\theta_2)$	$\pi(\theta_3)$	$\pi(\theta_4)$	$\pi(\theta_5)$	$\pi(\theta_6)$	$\pi(\theta_7)$
20,60%	0,00%	10,73%	20,17%	27,04%	1,29%	2,58%	17,60%

Como são três as ações (a_2, a_4, a_6), a natureza pode assumir oito estados e são três as possíveis consequências, há então 72 possíveis combinações entres esses três elementos, as quais são mostradas na Tabela 5.6, com suas respectivas probabilidades de ocorrência.

Tabela 5.6: Função consequência $P(p|\theta, a)$

$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{a})$	$\boldsymbol{p_0}$	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$	$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{a})$	$\boldsymbol{p_0}$	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$
(θ_0, a_2)	50,00%	6,25%	43,75%	(θ_4, a_2)	41,27%	7,94%	50,79%
(θ_0, a_4)	41,67%	2,08%	56,25%	(θ_4, a_4)	38,10%	0,00%	61,90%
(θ_0, a_6)	33,33%	8,33%	58,33%	(θ_4, a_6)	42,86%	9,52%	47,62%
(θ_1, a_2)	0,00%	0,00%	0,00%	(θ_5, a_2)	33,33%	0,00%	66,67%
(θ_1, a_4)	0,00%	0,00%	0,00%	(θ_5, a_4)	33,33%	0,00%	66,67%
(θ_1, a_6)	0,00%	0,00%	0,00%	(θ_5, a_6)	33,33%	0,00%	66,67%
(θ_2, a_2)	52,00%	8,00%	40,00%	(θ_6, a_2)	33,33%	0,00%	66,67%
(θ_2, a_4)	32,00%	16,00%	52,00%	(θ_6, a_4)	33,33%	0,00%	66,67%
(θ_2, a_6)	24,00%	8,00%	68,00%	(θ_6, a_6)	33,33%	16,67%	50,00%
(θ_3, a_2)	34,04%	6,38%	59,57%	(θ_7, a_2)	46,34%	2,44%	51,22%
(θ_3, a_4)	36,17%	2,13%	61,70%	(θ_7, a_4)	43,90%	7,32%	48,78%
(θ_3, a_6)	57,45%	6,38%	36,17%	(θ_7, a_6)	46,34%	14,63%	39,02%

Sendo a função de verossimilhança uma distribuição de probabilidade que associa as observações x com os estados da natureza θ, denotada por $P(x|\theta)$, nos casos discretos (que é o caso do modelo proposto), esses dados podem ser obtidos também através de um banco de dados, conforme a Tabela 5.7.

Tabela 5.7: Função de verossimilhança

$\boldsymbol{P(x|\theta)}$								
	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
x_0	18,75%	0,00%	0,00%	0,00%	50,79%	0,00%	16,67%	2,44%
x_1	81,25%	0,00%	92,00%	0,00%	42,86%	0,00%	33,33%	0,00%
x_2	0,00%	0,00%	8,00%	100,00%	4,76%	100,00%	50,00%	97,56%
x_3	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,59%	0,00%	0,00%	0,00%

A função utilidade $u(p)$, como dito anteriormente, é uma função que representa as preferências do decisor, sob incerteza, com relação às possíveis consequências ou bens. Quanto mais desejável for um bem, maior será o valor dessa função.

Para o modelo proposto, será atribuído o valor máximo de preferência para a consequência de retorno positivo para o investidor, valor mínimo para a consequência de variação negativa do retorno e um valor intermediário para a consequência de não alteração no retorno, visto que é mais preferível para o decisor ter um retorno positivo ou mantê-lo estável a tê-lo diminuído, o que pode ser visto na Tabela 5.8. Será suposto que a utilidade da consequência p_1 será 0,1 para o decisor A (propenso ao risco) e 0,8 para o decisor B (avesso ao risco). No entanto, vale ressaltar que cada decisor atribui uma utilidade diferente para as consequências.

Tabela 5.8: Função utilidade

Consequências	Utilidade do decisor A	Utilidade do decisor B
p_0	0	0
p_1	0,1	0,8
p_2	1	1

A partir da função consequência (Tabela 5.6) e da função utilidade (tabela 5.8), torna-se necessário calcular a utilidade da função consequência, o que é feito com a fórmula 2.1. Com isso obtém-se a tabela a seguir:

Tabela 5.9: Utilidade da função consequência

$u(P(p\|\theta,a))$	Decisor A	Decisor B	$u(P(p\|\theta,a))$	Decisor A	Decisor B
$u(P(p\|\theta_0,a_2))$	0,4438	0,4875	$u(P(p\|\theta_4,a_2))$	0,5159	0,5714
$u(P(p\|\theta_0,a_4))$	0,5646	0,5792	$u(P(p\|\theta_4,a_4))$	0,6190	0,6190
$u(P(p\|\theta_0,a_6))$	0,5917	0,6500	$u(P(p\|\theta_4,a_6))$	0,4857	0,5524
$u(P(p\|\theta_1,a_2))$	0,0000	0,0000	$u(P(p\|\theta_5,a_2))$	0,6667	0,6667
$u(P(p\|\theta_1,a_4))$	0,0000	0,0000	$u(P(p\|\theta_5,a_4))$	0,6667	0,6667
$u(P(p\|\theta_1,a_6))$	0,0000	0,0000	$u(P(p\|\theta_5,a_6))$	0,6667	0,6667
$u(P(p\|\theta_2,a_2))$	0,4080	0,4640	$u(P(p\|\theta_6,a_2))$	0,6667	0,6667
$u(P(p\|\theta_2,a_4))$	0,5360	0,6480	$u(P(p\|\theta_6,a_4))$	0,6667	0,6667
$u(P(p\|\theta_2,a_6))$	0,6880	0,7440	$u(P(p\|\theta_6,a_6))$	0,5167	0,6333
$u(P(p\|\theta_3,a_2))$	0,6021	0,6468	$u(P(p\|\theta_7,a_2))$	0,5146	0,5317
$u(P(p\|\theta_3,a_4))$	0,6191	0,6340	$u(P(p\|\theta_7,a_4))$	0,4951	0,5463
$u(P(p\|\theta_3,a_6))$	0,3681	0,4128	$u(P(p\|\theta_7,a_6))$	0,4049	0,5073

Sendo a função perda, $L(\theta,\ a)$, o negativo da utilidade da função consequência e utilizando-se da tabela anterior, obtêm-se a seguinte tabela:

Tabela 5.10: Função perda para os decisores A e B

	$L(\theta,a)$ – Decisor A							
	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
a_2	-0,4438	0,0000	-0,4080	-0,6021	-0,5159	-0,6667	-0,6667	-0,5146
a_4	-0,5917	0,0000	-0,5360	-0,6191	-0,6190	-0,6667	-0,6667	-0,4951
a_6	-0,5646	0,0000	-0,6880	-0,3681	-0,4857	-0,6667	-0,5167	-0,4049
	$L(\theta,a)$ – Decisor B							
	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
a_2	-0,4875	0,0000	-0,4640	-0,6468	-0,5714	-0,6667	-0,6667	-0,5317
a_4	-0,5792	0,0000	-0,6480	-0,6340	-0,6190	-0,6667	-0,6667	-0,5463
a_6	-0,6500	0,0000	-0,7440	-0,4128	-0,5524	-0,6667	-0,6333	-0,5073

5.6 Risco de Bayes

O modelo proposto possui três ações a serem tomadas pelo decisor e quatro observações sobre os estados da natureza, o que levará a $3^4 = 81$ regras de decisão. Listar todas estas regras não é uma tarefa muito difícil, se comparada com outros problemas que tenham mais ações e/ou observações, contudo, para facilitar ainda mais o manuseio do modelo em questão, ir-se-á enumerar todas as possíveis observações, $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$. Em seguida, para cada observação determina-se a melhor ação a tomar. Isso será feito calculando-se para cada ação o valor da expressão:

$$\sum_{\theta} \pi(\theta|x) L(\theta,a), \tag{5.1}$$

onde, $\pi(\theta|x)$ é a probabilidade *a posteriori* de θ, isto é, a probabilidade de θ dado que se observou o valor de x. Ela é obtida do resultado da combinação da função de verossimilhança (Tabela 5.7) com a distribuição *a priori* (Tabela 5.5), através das seguintes equações:

$$\pi(\theta|x) = \frac{P(x,\theta)}{P(x)}, \text{onde} \tag{5.2}$$

$$P(x,\theta) = P(x|\theta)\pi(\theta) \text{ e} \tag{5.3}$$

$$P(x) = \sum_{\theta} P(x|\theta)\, \pi(\theta). \tag{5.4}$$

A seguir é mostrada a Tabela 5.11 com os valores da distribuição *a posteriori*:

Tabela 5.11: Distribuição *a posteriori*

	$\boldsymbol{\pi(\theta\|x)}$							
	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
x_0	20,93%	0,00%	0,00%	0,00%	74,42%	0,00%	2,33%	2,33%
x_1	42,86%	0,00%	25,27%	0,00%	29,67%	0,00%	2,20%	0,00%
x_2	0,00%	0,00%	2,04%	47,96%	3,06%	3,06%	3,06%	40,82%
x_3	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%

De posse dessa distribuição e da função perda será encontrada a melhor ação a a ser tomada para cada observação x, a qual minimiza o risco de Bayes, como mostrado logo a seguir, na Tabela 5.12:

Tabela 5.12: Risco de Bayes por observação para os decisor A e B

	$\sum_{\theta} \boldsymbol{\pi(\theta\|x)L(\theta, a)}$											
	Decisor A						Decisor B					
	a_2	a_4	a_6	a_2	a_4	a_6		a_2	a_4	a_6	a_2	a_4	a_6
x_0	-0,5043	-0,6059	-0,5067	0	1	0	x_0	-0,5552	-0,6101	-0,5736	0	1	0
x_1	-0,4610	-0,5758	-0,5829	0	0	1	x_1	-0,5104	-0,6103	-0,6444	0	0	1
x_2	-0,5638	-0,5697	-0,4069	0	1	0	x_2	-0,5950	-0,6001	-0,4769	0	1	0
x_3	-0,5159	-0,6190	-0,4857	0	1	0	x_3	-0,5714	-0,6190	-0,5524	0	1	0

Para cada observação é calculado o risco por ação, pondo 1 (um) na ação que apresenta o menor risco, a qual, consequentemente, é a ação que deverá ser adotada, e 0 (zero) nas demais ações. Com isso, pode-se perceber que somente para a observação x_1 a melhor ação é a_6, isto é, investir no portfólio composto pelos ativos dólar americano, ações (IBOVESPA) e ouro. Já para as demais observações, a melhor ação é a_4, ou seja, investir no portfólio de ações e ouro.

6. Conclusão

O modelo proposto absorveu o clássico modelo de Markowitz (1952). Com isso, muitas alternativas foram geradas a partir dos ativos em estudo. Todavia, algumas dessas alternativas eram dominadas, por apresentarem um retorno abaixo de alguma(s) outra(s) com um risco maior. Logo as alternativas restantes eram as melhores do conjunto e serão escolhidas a depender de como o ambiente externo poderá se comportar e de acordo com a preferência do decisor/investidor. Cabe salientar que todas essas alternativas traziam o ouro na sua composição, variando apenas na sua proporção dentro do portfólio, indicando que esse ativo de risco é um investimento interessante para o investidor.

De maneira alguma, se propôs aqui a substituição do conhecimento já adquirido sobre investimentos em ativos financeiros. Pelo contrário, o que se quis foi apresentar mais uma ferramenta com aplicação num caso real, para auxiliar no processo de decisão, visto que esse processo pode acarretar consequências de grandes repercussões e gerar receios para o decisor.

Este trabalho, em hipótese alguma, esgota o assunto apresentado, dado a sua complexidade e às mudanças que sofre ao longo do tempo. Sendo assim, recomenda-se para trabalhos futuros:

- A ampliação do modelo aqui proposto com a introdução de mais variáveis para que se obtenha uma melhor abstração da realidade.
- A implementação do modelo proposto, elicitando a função utilidade do decisor ou decisores (decisão em grupo) e obtendo o conhecimento *a priori* de especialista(s).
- A utilização de programação dinâmica para decisões de investimentos de médio e longo prazo, além da introdução do coeficiente de assimetria no modelo média-variância para lidar melhor com ativos financeiros que não assumem uma distribuição simétrica.

Referências

Assaf Neto, A., *Mercado financeiro*, 8. ed., Atlas, São Paulo, 2008.

Assaf Neto, A., *Matemática financeira e suas aplicações*, Atlas, São Paulo, 2009.

Best, M. J. e Grauer, R. R. (1991), Sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems, *Management Science*, vol. 37, nº 8, 981-989.

Brandt, M. W., Portfolio choice problems. In: *Handbook of Financial Econometrics*: *Tools and Techniques.* Amsterdam, North-Holland, San Diego, 2010, vol. 1, cap. 5, 269-336.

Corazza, M. e Favaretto, D. (2007), On the existence of solutions to the quadratic mixed integer mean-variance portfolio selection problem, *European Journal of Operational Research,* vol. 176, nº 3, 1947-1960.

Ferreira, R. J. P.; Almeida Filho, A. T. de e Souza, F. M. C. de. (2009) A decision model for portfolio selection, *Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, vol. 29, nº 2, 403-417.

Fortuna, E.,*Mercado financeiro*: produtos e serviços, 17. ed., Qualitymark,Rio de Janeiro, 2008.

Froyen, R. T., *Macroeconomia*, Saraiva, São Paulo, 2005.

Gitman, L. J., *Princípios de Administração Financeira*, 12. ed., Pearson Addison Wesley, São Paulo, 2010

Gomes, L. F. A. M. *Teoria da Decisão*, 1. ed.,Thomson Learning, São Paulo, 2006. Coleção Debates em Administração. 116 p.

Guia de investimentos., BM&FBOVESPA, São Paulo, 2013. Disponível em: <http://educacional.bmf.com.br/>. Acesso em: 13 jan. 2015.

Hillier, F. S. e Lieberman, G. J., *Introdução à Pesquisa Operacional*, 8. ed., Mcgraw-Hill, Porto Alegre, 2010.

Lachtermacher, G., *Pesquisa Operacional na tomada de decisões*: modelagem em Excel, 3. ed., Elsevier, Rio de Janeiro, 2007, 5ª Reimpressão.

Luquet, M., *Guia valor econômico de finanças pessoais*, 2 .ed., Globo, São Paulo, 2007.

Markowitz, H. (1952), Porfolio selection, *The Journal of Finance*, vol. 7, nº 1, 77-91.

Markowitz, H., *Portfolio selection: efficient diversification of investment*, Wiley, New York, 1959.

Sengupta, J.K. (1989), Portfolio decisions as games, *International Journal of Systems Science*, vol. 20, nº 8, 1323-1334.

Sharpe, W. F. (1967), A linear programming algorithm for a mutual fund portfolio selection, *Management Science*, vol. 13, nº1, 499-510.

Shen, Y.; Zhang, X. e Siu, T. K. (2014), Mean–variance portfolio selection under a constant elasticity of variance model, *Operations Research* Letters, vol. 42, nº 5, 337-342.

Souza, F. M. C. de, *Decisões racionais em situações de incerteza*, 2. ed., Editora Universitária da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007, 366 p.

Stone, B. K. (1973), A linear programming formulation of the general portfolio selection problem, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 8, nº 4, 621-63l.

Xavier, A., *Estratégias estatísticas em investimentos: heurísticas seguras para investimentos e regras de gerenciamento de risco*, Novatec Editora, São Paulo, 2009.

Yi, L.; Wu, X.; Li, X. e Cui, X. (2014), A mean-field formulation for optimal multi-period mean–variance portfolio selection with an uncertain exit time, *Operations Research Letters,* vol. 42, nº 8, 489-494.

Zimmermann, H. -J. (2000), An application-oriented view of modeling uncertainty, *European Jornal of Operational Research*, vol. 122, nº 2, 190-198.