TÉCNICA DE SMOOTHING PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA MOCHILA QUADRÁTICO

Julio Mosquera Gutierres
Instituto de Engenharia de Produção e Gestão - Universidade Federal de Itajubá
CP 50, CEP 37500-903, Itajubá, MG, Brasil
juliocesarmg_7@hotmail.com

Rafael Coradi Leme
Instituto de Engenharia de Produção e Gestão - Universidade Federal de Itajubá
CP 50, CEP 37500-903, Itajubá, MG, Brasil
leme@unifei.edu.br

Antonio Carlos Zambroni de Souza
Instituto de Sistema Elétricos e Energia - Universidade Federal de Itajubá
CP 50, CEP 37500-903, Itajubá, MG, Brasil
zambroni@unifei.edu.br

RESUMO

O *Problema da Mochila (PM)* é um problema de otimização combinatória muito estudado nas ultimas décadas, na qual pretende-se minimizar o custo (ou maximizar o lucro), preenchendo a mochila com objetos de diferentes pesos e valores. Já o *Problema da Mochila Quadrática (PMQ)* é um problema *NP-dificil* no sentido forte que surge como uma generalização do PM, tornando-o mais desafiante de ser resolvido. Diversas técnicas propostas para resolver o PMQ podem ser encontradas na literatura. Neste artigo, será discutido como a combinação de duas técnicas (*função de penalidade* e *alisamento*) atua para resolver o PMQ e qual a performance que o PMQ apresenta na geometria do problema apos estas técnicas serem introduzidas. Será mostrado que, a aplicação direta do método pode ter dificuldades em achar o ponto de ótimo global, ou mesmo uma solução viável.

PALAVRAS CHAVE. Problema da mochila quadrático, Técnica de smoothing, Solução global.

Área Principal: OC

ABSTRACT

The Knapsack Problem, a combinatorial optimization problem, has been widely studied in last decades. The problem refers to minimize the cost (or maximize the profit) by selecting items to be carried in a knapsack. The Quadratic Knapsack Problem, in turn, is a generalization of the Knapsack Problem, and is a NP-Hard problem in the strong sense. Thus, solving Quadratic Knapsack is more challenging. Many approaches have been proposed to solve the Quadratic Knapsack Problem. In this paper, we discuss the use use of penalty function and smoothing techniques to search for a global optimum of Quadratic Knapsack Problem, showing the geometry of the problem. It is shown that such techniques may suffer to find the global optimum, or even a feasible solution.

KEYWORDS. Quadratick Knapsack Problem, Smoothing, Global solution

Main Area: OC

1. Introdução

O *Problema da Mochila (PM)* é um problema de otimização combinatória, na qual pretende-se minimizar o custo (ou maximizar o lucro), preenchendo a mochila com objetos de diferentes pesos e valores. A formulação deste problema é relativamente simples, e pode se apresentar na forma linear ou quadrática. No segundo caso, o problema é conhecido como *Problema da Mochila Quadrático (PMQ)* e será o foco de estudo deste artigo.

O PM e o PMQ são usualmente utilizados para modelar situações da indústria o decisões financeiras (GAIVORONSKI et al., 2011). Alguns exemplos de aplicação do PM podem ser encontrados em problemas de investimento, programação de dieta para pessoas, problemas de curte de estoque, problemas de orçamento, entre outros (PISINGER, 1995). Além disso, muitos dos métodos de solução dos problemas mais complexos empregam o PM como um subproblema (KELLERER et al., 2004). Por isso, esses problemas NP-Completo vem sendo muito estudado nas ultimas décadas. Encontrar a decisão com o valor ótimo pode ser extremamente custosa, uma vez que o conjunto de soluções viáveis aumenta exponencialmente com o aumento das variáveis de decisão.

Diversas técnicas foram propostas para solução do PQM. Na survey desenvolvida por Pisinger **??**) se discutem algumas delas, como a família de limites superiores; a utilização de grafos com algoritmos branch-and-cut; técnicas de linearização da função objetivo; uso do relaxamento ou decomposição por Lagrangeano; utilização de heurísticas, entre outros (PISINGER, 2007).

Neste artigo, contudo, será discutida a utilização das técnicas de **penalidade** e **alisamento** proposta por Murray e Ng (2010) para solução de problemas binários não lineares. A ideia é geralmente utilizada para obter a solução de problemas com diversos ótimos locais. Considerando que o PMQ pode ser visto como uma generalização do PM, neste artigo será discutida a geometria do PMQ e as características da utilização da técnica de alisamento na busca da solução ótima do problema.

No presente artigo a formulação do *Problema da Mochila Quadrático* junto à inclusão da função de penalidade e uma discussão sobre a técnica alisamento serão apresentados na Seção 2. O problema modificado e suas caraterísticas serão discutidos na Seção 3. A Seção 4 apresentará uma discussão da geometria da função quadrática do PMQ e como ela vai mudando (nas diferentes curvas de nível) até chegar na solução que estamos procurando, alem disso as conclusões deste artigo também serão apresentadas nesta seção.

2. Formulação do Problema

O problema que será discutido neste artigo é a formulação quadrática do problema da mochila. Em um modelo de decisão linear o resultado de um processo de decisão completa é avaliado por uma combinação linear dos valores associados com cada uma das decisões binarias (KELLERER et al., 2004). Por isso, é bem conhecido que o problema da mochila linear é um problema *NP-difícil* (MATHUR; VENKATESHAN, 2007; ZHAO; LI, 2013).

Segundo (ZHAO; LI, 2013) pode ser formulado da seguinte forma: *"Dados n itens $I_1, I_2, \ldots, I_n$ e uma mochila com capacidade c, cada item I_i tem um peso w_i e um lucro p_i, o objetivo é encontrar um subconjunto de todos os itens de forma que o total do peso dos itens em I é no máximo c e o lucro total é o máximo"* [1]

É natural, também, supor que o lucro de um item deve refletir quão bem os objetos se encaixam. Uma possível formulação de tal interdependência é o *PMQ*, no qual um item tem um lucro correspondente e um lucro adicional p_{ij} é considerado se o item i é selecionado junto com o item j (KELLERER et al., 2004).

O PMQ é uma generalização do PM que surge quando o lucro adicional é nulo ($p_{ij} = 0$) para todo $i = j$ (CAPRARA et al., 1999). O PMQ foi introduzido pela primeira vez por (GALLO et al., 1980) como um surgimento natural em uma variedade e de problemas de pesquisa operacional,

[1] Para um melhor entendimento do problema da mochila linear revisar a interpretação de (KELLERER et al., 2004).

estatística e análise combinatória[2]. Aplicações do PMQ podem surgir em diferentes áreas, tais como problema de projeto do compilador, sistema de fabricação de planejamento de produção flexível, problema de seleção dos custos compartilhados fixos, fluxos de rede e problema de particionamento gráfico (ZHENG et al., 2012).

O PMQ busca otimizar a função objetivo quadrática sujeita a uma restrição mochila. Em geral, considera-se que todos os coeficientes são considerados não negativo e é comum ter as variáveis de decisão como binárias (PISINGER, 2007). Ao contrario da maioria dos Problemas da Mochila o PMQ é considerado um problema NP-difícil no **sentido forte**, já que nenhum algoritmo de programação dinâmica com tempo de corrida pseudopolinomial pode existir ao menos que *P=NP* (KELLERER et al., 2004).

Pisinger (2007) define o problema binário (0-1) da mochila quadrático como: *"Assumindo que é dado um conjunto N =* $\{1,\ldots,n\}$ *de itens onde o item j tem um peso* w_j *inteiro positivo. Adicionalmente é dada uma matriz* nxn *inteira não negativa P =* $\{p_{ij}\}$*, onde* $p_{ij} + p_{ji}$ *é o lucro obtido pela soma de dois itens diferentes i e j. Além disso, o lucro* p_{ii} *é obtido se o item i é escolhido. O PMQ pede para selecionar um subconjunto de itens cujo peso total não exceda uma determinada capacidade* c *da mochila, de modo a maximizar o lucro total."*. Com a introdução de variáveis binárias x_j para indicar se um item de j é selecionado, o problema pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} p_{ij}x_ix_j \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j\in N} w_jx_j \leq C \\ & x_j \in \{0,1\} \quad j \in N \end{aligned} \tag{1}$$

ou de forma simplificada, considerando a variável de folga s para a restrição da mochila:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \frac{1}{2}x^TQx \\ \text{sujeito a} \quad & A^Tx + bs = b \\ & x_j \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{2}$$

onde Q é uma matriz simétrica de ordem n, $A \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ e $0 \leq s \leq 1$.

Modelos de solução para o PMQ, baseados em diferentes técnicas de relaxamento, fixação de variáveis e procedimentos heurísticos, têm sido propostos na literatura (ZHENG et al., 2012). (GALLO et al., 1980) utiliza planos superiores; (BILLIONNET; CALMELS, 1996) utilizam uma técnica de linearização; (HAMMER; RADER, 1997) propõem aproximação linear e variáveis de fixação; (BILLIONNET et al., 1999) e (CAPRARA et al., 1999) apresentam um método baseado em uma decomposição de Lagrange; (FOMENI; LETCHFORD, 2013) apresentam uma modificação da programação dinâmica do PML para se obter uma heurística construtiva altamente eficaz para a versão quadrática (PMQ)[3].

Mesmo com os recentes avanços nos algoritmos de PMQ, não sempre é possível resolver o problema de forma direta. Além disso, o tempo para obter a solução ótima pode ser muito longo, especialmente em problemas de tamanho grande. Devido a essas dificuldades, muitos algoritmos de

[2]Para alguns exemplos ver Gallo et al. (1980).

[3]Para revisar as técnicas mais importantes baseadas em limites superiores ver survey de Pisinger (2007). Outras técnicas em Li e Sun (2006)

redução têm sido apresentados na literatura, já que uma boa técnica de redução pode ter um papel-chave no processo de solução do PMQ (PISINGER et al., 2007). Por exemplo, Zheng et al. (2012) apresentam uma redução na folga de dualidade entre o PMQ e sua relaxação Lagrangiana para obter um limite superior melhorado para o PMQ; Pisinger et al. (2007) apresentam uma redução agressiva utilizando uma cascata de limites superiores para diminuir o tamanho das instancias do problema até um tamanho administrável.

Outra abordagem para solução de problemas binários é a utilização de uma função penalidade a ser adicionada a função objetivo quando a solução não atender as restrições de integralidade das variáveis de decisão. Nesta condição, o problema original pode ser relaxado e resolvido por técnicas de solução contínua. Ou seja:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \frac{1}{2}x^T Q x + p(x) \\ \text{sujeito a} \quad & A^T x + bs = b \\ & 0 \leq x_j \leq 1 \end{aligned} \tag{3}$$

onde $p(x)$ é a função penalidade. Contudo, algumas características do problema modificado pode atrapalhar a busca da solução global do problema, como discutido a seguir.

2.1. Função Penalidade

Uma função de penalidade é utilizada para punir uma função objetivo que viole uma das restrições do problema original (BRYAN; SHIBBERU,). A função de penalidade fornece uma maneira de atacar os problemas de otimização restrita usando algoritmos para problemas sem restrições.

Existem finitos parâmetros de penalidade, de modo que cada ponto ótimo do problema de penalidade correspondente indica os valores ótimos das variáveis discretas do problema inicial, se o conjunto viável deste não estiver vazio. Os problemas de penalidade são aqueles com variáveis mistas (BORCHARDT, 1988).

Lucidi e Rinaldi (2010a) apresentam funções de penalidade para resolver problemas de programação $0-1$ e programação inteira. Yu et al. (2013) propõem uma função de penalidade efetiva para construir uma sequencia de problemas de otimização sem restrições que facilitam a resolução de problemas de programação discreta mista. Zhu (2003) utiliza um parâmetro de penalidade para provar a equivalência entre as restrições lineares do problema quadrático com um problema concavo quadrático continuo. Lucidi e Rinaldi (2010b) apresentam uma função de penalidade para resolver problemas de programação mista-inteira, com a continua reformulação do problema original. Mouatasim (2011) usa uma função de penalidade para transformar um problema de programação linear com restrições não lineares em um problema de otimização global sub restrições não lineares.

Neste artigo sera utilizada a função de penalidade para soluções binarias conforme Murray e Ng (2010).

$$p(x) = \delta \sum_{j \in J}^{n} x_j(1 - x_j), \tag{4}$$

onde δ é o parâmetro de penalidade ($\delta > 0$) e J é o conjunto dos índices das variáveis que são julgadas para forçar até um limite. Um valor de δ o suficientemente grande é usualmente suficiente para indicar aonde a variável esta convergindo para 0 ou 1 Segundo Murray e Ng (2010).

Contudo, a função penalidade da equação (4) é concava. Portanto, com um valor suficientemente grande do parâmetro δ, a utilização desta função penalidade no PMQ binário introduz mínimos locais em todos os possíveis pontos inteiros e pode, ainda, apresentar pontos estacionários nos dentro da região de solução. A Figura 1 ilustra o problema quando a função objetivo é $x_1^2 + 2x_2^2$.

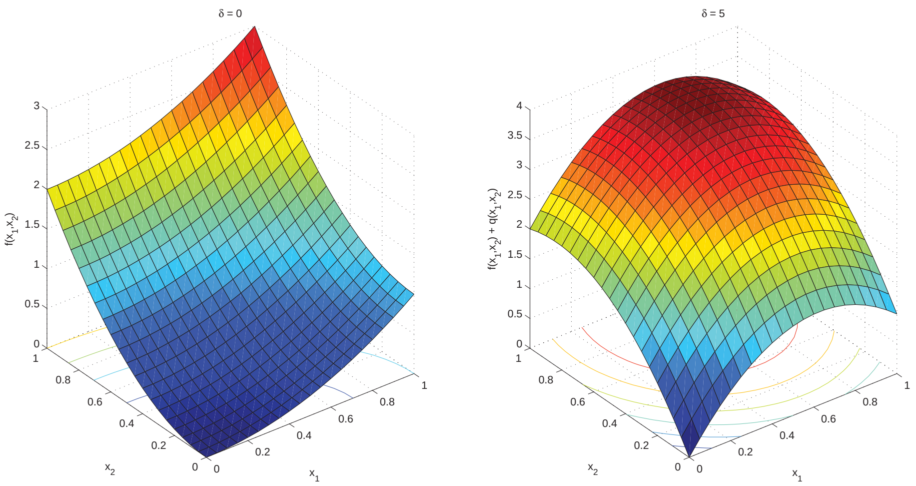

Figura 1: Efeito da função penalidade no problema de otimização original

Note na Figura 1 que a função objetivo original é convexa. Porém, com a inclusão da função penalidade, a função passa a ser côncava e todos os pontos viáveis do problema original são ótimos locais. Note, ainda, que a solução do problema original e do problema considerando a função penalidade são as mesmas, neste caso $x_1 = x_2 = 0$. Além disso, obter a solução global do problema através de técnicas contínuas de otimização depende apenas da condição inicial e, por isso, encontrar o minimo global pode ser muito difícil.

Para lidar com esse problema de identificar uma condição inicial adequada, Murray e Ng (2010) propõe o uso da técnica de alisamento para conduzir a solução para o ótimo local ou, pelo menos, uma boa solução do problema. A técnica de alisamento para solução do PMQ é discutida a seguir.

2.2. Técnica de Alisamento (Smoothing)

Métodos *"alisamento"*[4] se referem a técnicas que substitui o problema de otimização original por um problema (ou uma sequência de problemas) com uma função objetivo que apresente menos (ou um único) pontos de ótimo local. Como a presença de vários ótimos locais em um problema de otimização torna muito difícil a procura do ótimo global, reduzir a quantidade de ótimos locais aumenta a probabilidade de um algoritmo de otimização encontrar a solução ótima global.

Uma forma de "alisar"a função objetivo é, por exemplo, introduzir uma função barreira no problema da equação (3), obtendo, assim, o problema da equação (5).

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & \frac{1}{2}x^T Qx + p(x) + b(x) \\
\text{sujeito a} \quad & A^T x + bs = b \\
& 0 \leq x_j \leq 1
\end{aligned}
\tag{5}
$$

[4]Ou *"smoothing"*, no inglês

Na equação (5), a função barreira $b(x)$ deve ser convexa e escolhida de forma que a função objetivo tenha um número reduzido, ou até mesmo um único ótimo local. A Figura 2, extraída de Murray e Ng (2010), ilustra como a técnica de alisamento pode ser utilizada para se obter o mínimo global.

Figura 2: Efeito do método smoothing no problema de otimização original. Fonte: (MURRAY; NG, 2010)

Existem muitas maneiras de suavizar uma função e determinar qual é a melhor vai depender de quais caraterísticas da função original se quer eliminar (LUCIDI; RINALDI, 2010a). Murray e Ng (2010), que propôs o uso conjunto das funções de penalidade e barreira para obter a solução de problemas binários não-lineares, utilizam uma função logarítmica, dada pela equação (6). Que serve como uma barreira para o problema original (3) e com a escolha de um bom parâmetro de barreira o problema transforma-se em um problema convexo e assim é mais fácil encontrar uma solução.
A função de alisamento que utilizaremos neste artigo será a seguinte:

$$b(x) = \mu \sum_{i}^{n} \log(x_i(1 - x_i)), \tag{6}$$

A equação (6), na qual μ é o parâmetro de barreira, serve como uma barreira logarítmica para o problema da equação (3). A grande vantagem dessa função é que, com μ suficientemente grande, a função objetivo do problema da equação (5) é convexa e a solução pode ser facilmente obtida por técnicas de otimização tradicional. Nesse sentido, Murray e Ng (2010) argumenta que resolver uma sequência de problemas tal que $\mu_0 > mu_1 > ... > \mu_k$, é possível obter o solução ótima global, ou pelo menos, uma boa solução para o problema.

Portanto, a utilização dessa aproximação para solução do PMQ pode ser extremamente atrativa, principalmente para problemas de larga escala. Nesse sentido, a seguir serão discutidas as características da utilização da técnica de alisamento aplicadas ao PMQ.

3. Características do Problema Modificado

A ideia de utilizar a barreira logarítmica para resolver problemas não-lineares complexos foi inicialmente proposta para eliminar restrições de desigualdades (, ver). No entanto, neste trabalho, como em Murray e Ng (2010), a barreira logarítmica é considerada como função de alisamento, uma vez ela é estritamente convexa. Note que, isso faz que as restrições $0 \leq x_j \leq 1$ possam ser descartadas, simplificando a formulação do problema. Portanto, o problema a ser discutido nessa seção é dado por:

$$\min \quad f = \frac{1}{2}x^T Q x + \delta \sum_i^n x_i(1 - x_i) - \mu \sum_i^n \log(x_i(1 - x_i)) \tag{7}$$

$$\text{sujeito a} \quad A^T x + bs = b \tag{8}$$

Com um μ suficientemente grande, a equação (7) é convexa e a solução do problema é próxima de $x_j = 0.50$. Conforme o valor de μ vai diminuindo gradualmente, a função f apresenta diversos pontos de ótimo local. Esta situação é mostrada na Figura 3 para 4 diferentes valores de μ no exemplo utilizado na Seção 2.1.

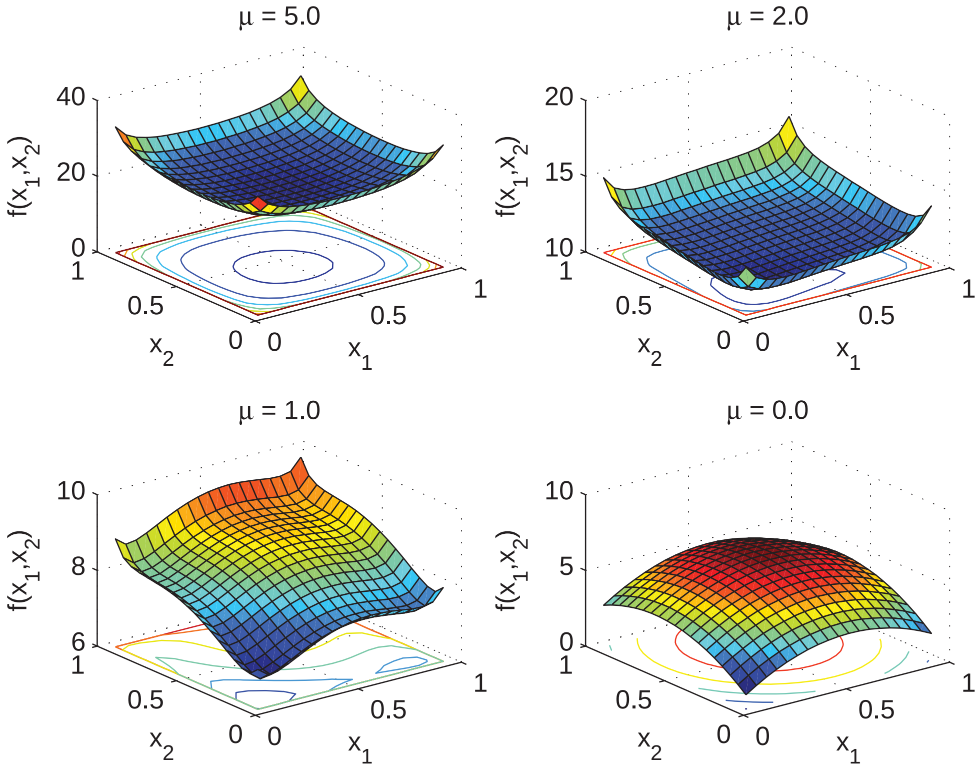

Figura 3: Efeito do método alisamento no problema de otimização com função penalidade

Note pela Figura 3 que, se os problemas modificados forem resolvidos sequencialmente, considerando a solução ótima de um como condição inicial para a aproximação posterior, a solução ótima do problema sem restrições é facilmente obtida por diversos métodos de otimização. Por exemplo, a Figura 4 ilustra o caminho de solução (linha preta) quando o parâmetro μ varia de 30 até 0. As curvas de nível representam o problema considerando a função penalidade, como na Seção 2.1. Assim, seria possível, através de uma sequência de problemas aproximados, encontrar a solução global do problema.

Essa metodologia é proposta e discutida por Murray e Ng (2010), que observaram a forma como se utilizam os parâmetros δ e μ na tentativa de se obter a solução global ou, pelo menos, uma boa solução local. Partindo-se da condição inicial $x_j = 0.50$, o gradiente da função objetivo pode ser utilizado para identificar o vértice mais atrativo da função objetivo independentemente dos

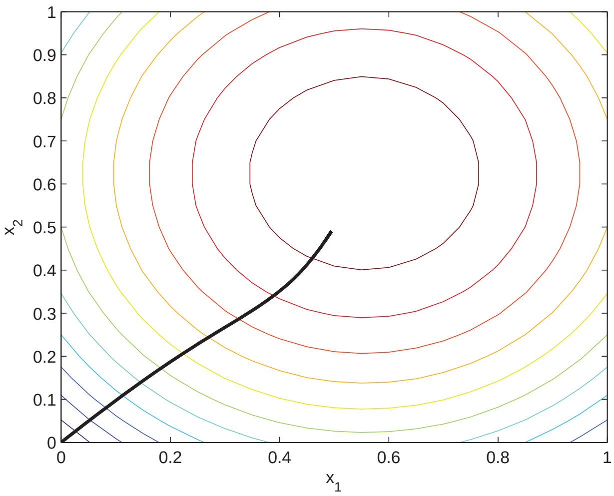

Figura 4: Efeito do método alisamento no problema de otimização com função penalidade

valores δ e μ[5] e, progressivamente, alterar δ e μ de forma a impor as condições de integralidade do problema.

Apesar dos bons resultados reportados, a metodologia proposta por Murray e Ng (2010) pode ser problemática na solução de problemas de otimização inteira mista, como é o caso do PMQ discutido neste trabalho. Considere, por exemplo o problema com:

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

Neste caso, a solução do problema é claramente $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. No entanto, ao se aplicar a metodologia proposta Murray e Ng (2010) a solução encontrada é $x_1 = 0.83$ e $x_2 = 1.0$. A Figura 5 ilustra o caminho de solução do problema.

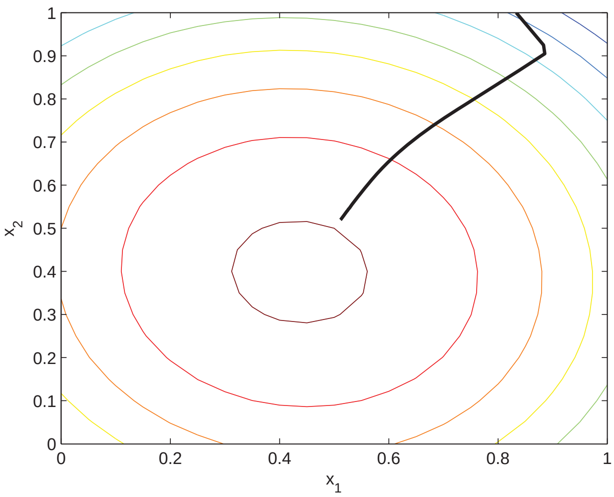

Figura 5: Efeito do método alisamento no problema de otimização com função penalidade

[5]Isso porque as equações (4) e (6) atingem seus pontos de ótimo em $x_j = 0.50$

Pela figura é possível notar que o vértice mais atrativo para a função objetivo quadrática é no qual $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$. Assim, a metodologia de alisamento direciona o problema para esta solução. No entanto, quando a restrição $Ax + bs = b$[6] é atingida o problema converge para solução $x_1 = 0.83$ e $x_2 = 1.0$, que não atende o critério binário das variáveis de decisão. Portanto, neste caso, esta metodologia não seria útil para solução do PMQ.

Contudo, o uso de pré-processamento do problema original pode ser alternativa para melhorar a formulação do problema e, consequentemente, melhorar o desempenho do método na busca da solução global do problema.

4. Discussão e Conclusões

Este trabalho discute a geometria do uso da função penalidade e alisamento, proposta por Murray e Ng (2010), para solução do problema da mochila quadrático. Como já foi indicado nas seções anteriores deste artigo, tanto a função de penalidade (melhora a forma do problema original) quanto a técnica de alisamento (leva a solução até o vértice certo) são ferramentas muito importantes na busca pela solução global de problemas de otimização não lineares.

Contudo, dependendo das caraterísticas do problema a ser otimizado o uso destas técnicas nem sempre leva até uma solução viável do problema original. Isso é claramente notado no exemplo apresentado na Seção 3, onde não são cumpridas as condições binárias requeridas pelo problema (3).

Isso acontece, pois, uma vez que o problema aproximado passa de convexo a côncavo, os métodos de otimização local não são capazes de fugir de ótimos locais. Sendo assim, para poder obter soluções ótimas para problemas quadráticos que apresentem restrições mochila, é necessário ter sorte suficiente para que a geometria do problema analisado seja o suficientemente favorável (se encaixe ‘as necessidades do problema analisado) para permitir-nos achar o minimo global ou de definir um bom ponto inicial de busca já que quando a técnica proposta por (MURRAY; NG, 2010) mantem um caminho errado, é impossível mudar para algum outro.

A dificuldade em alcançar uma solução ótima através do método de (MURRAY; NG, 2010) para o problema (3), de fato, tem a ver com a inclusão da variável de folga s. Isso ocorre, pois s é uma variável contínua e, portanto, não considera-se a função penalidade para ela. Assim, s introduz uma dimensão no espaço de solução no qual tem-se infinitas soluções, o que dificulta a utilização de métodos de otimização local.

Por todos os aspectos mencionados anteriormente podemos concluir que o método proposto por Murray e Ng (2010) pode se apresentar inviável para resolver de maneira ótima problemas misto-binário com função objetivo quadráticas, como é o caso do PMQ. Isso porque, como mostrado neste artigo, o problema pode convergir para uma solução local não-viável para o problema (3), sendo difícil sair desses pontos com uso de métodos de otimização local.

Considerando a discussão apresentada neste artigo, a busca de algumas técnicas complementares pode melhorar a performance proposta por Murray e Ng (2010) para encontrar soluções ótimas de problemas quadráticos com restrições mochila.

Referências

BILLIONNET, A.; CALMELS, F. Linear programming for the 0–1 quadratic knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 92, n. 2, p. 310–325, 1996.

BILLIONNET, A.; FAYE, A.; SOUTIF, É. A new upper bound for the 0-1 quadratic knapsack problem. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 112, n. 3, p. 664–672, 1999.

[6] Ou ainda $Ax \leq b$.

BORCHARDT, M. An exact penalty approach for solving a class of minimization problems with boolean variables. *Optimization*, Taylor & Francis, v. 19, n. 6, p. 829–838, 1988.

BRYAN, K.; SHIBBERU, Y. Penalty functions and constrained optimization. *Dept. of Mathematics, Rose-Hulman Institute of Technology. http:// www. rosehulman. edu/˜ bryan/lottamath/penalty. pdf*.

CAPRARA, A.; PISINGER, D.; TOTH, P. Exact solution of the quadratic knapsack problem. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 11, n. 2, p. 125–137, 1999.

FOMENI, F. D.; LETCHFORD, A. N. A dynamic programming heuristic for the quadratic knapsack problem. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 26, n. 1, p. 173–182, 2013.

GAIVORONSKI, A. A.; LISSER, A.; LOPEZ, R.; XU, H. Knapsack problem with probability constraints. *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 49, n. 3, p. 397–413, 2011.

GALLO, G.; HAMMER, P. L.; SIMEONE, B. Quadratic knapsack problems. In: *Combinatorial Optimization*. [S.l.]: Springer, 1980. p. 132–149.

HAMMER, P. L.; RADER, D. J. Efficient methods for solving quadratic 0-1 knapsack problems. *Infor-Information Systems and Operational Research*, Ottawa: INFOR Journal, 1971-, v. 35, n. 3, p. 170–182, 1997.

KELLERER, H.; PFERSCHY, U.; PISINGER, D. *Knapsack problems*. [S.l.]: Springer, 2004.

LI, D.; SUN, X. *Nonlinear integer programming*. [S.l.]: Springer, 2006.

LUCIDI, S.; RINALDI, F. Exact penalty functions for nonlinear integer programming problems. *Journal of optimization theory and applications*, Springer, v. 145, n. 3, p. 479–488, 2010.

LUCIDI, S.; RINALDI, F. An exact penalty global optimization approach for mixed-integer programming problems. *Department of Computer and System Sciences Antonio Ruberti Technical Reports*, v. 2, n. 17, p. 9, 2010.

MATHUR, K.; VENKATESHAN, P. A new lower bound for the linear knapsack problem with general integer variables. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 178, n. 3, p. 738–754, 2007.

MOUATASIM, A. E. Penalty method for integer programming. 2011.

MURRAY, W.; NG, K.-M. An algorithm for nonlinear optimization problems with binary variables. *Computational Optimization and Applications*, Springer, v. 47, n. 2, p. 257–288, 2010.

PISINGER, D. Algorithms for knapsack problems. Citeseer, 1995.

PISINGER, D. The quadratic knapsack problem - a survey. *Discrete applied mathematics*, Elsevier, v. 155, n. 5, p. 623–648, 2007.

PISINGER, W. D.; RASMUSSEN, A. B.; SANDVIK, R. Solution of large quadratic knapsack problems through aggressive reduction. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 19, n. 2, p. 280–290, 2007.

YU, C.; TEO, K. L.; BAI, Y. An exact penalty function method for nonlinear mixed discrete programming problems. *Optimization Letters*, Springer, v. 7, n. 1, p. 23–38, 2013.

ZHAO, C.; LI, X. Approximation algorithms on 0–1 linear knapsack problem with a single continuous variable. *Journal of Combinatorial Optimization*, Springer, p. 1–7, 2013.

ZHENG, X.; SUN, X.; LI, D.; XU, Y. On reduction of duality gap in quadratic knapsack problems. *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 54, n. 2, p. 325–339, 2012.

ZHU, W. Penalty parameter for linearly constrained 0–1 quadratic programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Springer, v. 116, n. 1, p. 229–239, 2003.