

MODELO MATEMÁTICO E HEURÍSTICAS PARA O PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO NA INDÚSTRIA DE RECIPIENTES DE VIDRO

Flaviana Moreira de Souza Amorim

Márcio da Silva Arantes

Claudio Fabiano Motta Toledo

Universidade de São Paulo
Instituto de Ciências Matemática e de Computação (USP-ICMC)
13566-590 – São Carlos, SP – Brasil
joflaviana@yahoo.com.br
{marcio,claudio}@icmc.usp.br

Bernardo Almada-Lobo

INESC-TEC, Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto
4200-465 – Porto – Portugal
almada.lobo@fe.up.pt

RESUMO

Este trabalho apresenta uma modelagem matemática para o problema de planejamento da produção em indústrias de fabricação de recipiente de vidro. O modelo proposto considera dois níveis hierárquicos de planejamento: curto e longo prazo. O dimensionamento de lotes no processo produtivo também deve ser considerado. O processo de fabricação neste tipo de indústria apresenta duas fases. Na primeira fase, a fusão do vidro nos fornos é realizada enquanto a produção dos recipientes nas máquinas de moldagem ocorre na segunda fase. Instâncias foram geradas baseadas em dados fornecidos por uma indústria do setor de recipientes de vidro. Heurísticas do tipo Relax-and-Fix e Fix-and-Optimize são combinadas e aplicadas ao problema. Os resultados obtidos indicam que as heurísticas propostas são promissoras na resolução dessas instâncias.

PALAVRAS CHAVE. Modelagem Matemática, Planejamento da Produção, Heurísticas, Dimensionamento de Lotes.

Área Principal: PM – Programação Matemática, OC – Otimização Combinatória

ABSTRACT

This paper presents a mathematical model for the production planning problem in glass container industries that appear in two different hierarchical levels: short and long term. The lot sizing in the production process must be considered. The underlying manufacturing process contains two stages. In the first stage, the glass melting is performed in furnaces while the containers production take place in the molding machine at the second stage. Instances were generated based on data from a glass container manufacturing industry. Heuristics as Relax-and-Fix and Fix-and-Optimize are combined and applied to the problem. The results indicate that the proposed heuristics are promising in solving these instances.

KEYWORDS. Mathematical Modeling. Production Planning. Heuristics. Lot Sizing.

Main Area: MP – Mathematical Programming, CO – Combinatorial Optimization

1. Introdução

O planejamento da produção está se tornando cada vez mais sofisticado e capaz de permitir maior flexibilidade nas operações de produção como apresentado em Jans (2009). Desta forma, tal planejamento consegue refletir as possíveis especificidades dos processos industriais. O presente artigo estuda o problema de produção de recipientes de vidro (PPRV). O processo de produção neste tipo de indústria é composto por duas principais fases. Na primeira fase, ocorre a fusão dos componentes que constituem o vidro como areia, barrilha, calcário, óxidos e cacos recicláveis nos fornos, enquanto a formação dos produtos finais (recipientes) pelas máquinas de moldagem acontece na segunda fase. O processo produtivo é descrito aqui como um problema de dimensionamento de lotes onde as quantidades dos produtos finais devem ser definidas de forma a atender as demandas do período, satisfazendo restrições relacionadas aos fornos e às máquinas.

O foco deste trabalho está em um modelo que faz a junção de características do planejamento da produção no curto e longo prazo. Isso ocorre uma vez que estoques são definidos dentro de um horizonte de planejamento abrangendo vários meses, ao mesmo tempo em que a produção diária é definida. Além disso, a configuração ideal para cada máquina é outro aspecto determinado pelo modelo proposto. Almada-Lobo *et al.* (2010) aborda características do problema mencionado que resultam em um modelo matemático intratável para instâncias de tamanho moderado a grande porte.

Logo, a principal contribuição deste trabalho é a proposição de uma formulação matemática, baseada em modelo de programação inteira mista, capaz de descrever o planejamento da produção no curto e longo prazo. A segunda contribuição dada pelo modelo proposto está na determinação das características (ajustes) ideais para as máquinas durante todo o planejamento. A terceira contribuição está na definição de um conjunto de instâncias de pequeno porte geradas a partir de dados fornecidos por uma indústria de recipiente de vidro localizada em Portugal. Tais instâncias poderão ser utilizadas para avaliar novos modelos ou métodos propostos para o mesmo problema. Por último, duas heurísticas são propostas para solucionar o PPRV.

O presente artigo está estruturado como descrito a seguir. A seção 2 apresenta uma breve revisão de trabalhos relacionados ao problema estudado. Detalhes sobre o problema estudado são apresentadas na seção 3. A modelagem proposta para o PPRV é introduzida na seção 4. Os métodos propostos para este problema são descritos na seção 5 e os resultados computacionais obtidos são avaliados na seção 6. As considerações finais seguem na seção 7.

2. Trabalhos Relacionados

Existem várias revisões na literatura sobre os problemas de dimensionamento de lotes e planejamento da produção como Drexl e Kimms (1997) e Karimi *et al.* (2003). Uma revisão de modelos propostos para o problema de dimensionamento de lotes é apresentado em Jans (2009), enquanto outra revisão considerando meta-heurísticas aplicadas a problemas de dimensionamento de lotes pode ser encontrada em Jans e Degraeve (2007). A combinação entre métodos exatos, heurísticos e meta-heurísticos tem sido uma abordagem empregadas em diversos estudos para resolução de problemas em Pesquisa Operacional. Por exemplo, uma revisão sobre heurísticas baseadas em programação matemática é apresentado em Ball (2011). Estratégias de fixação do valor encontrado para uma ou várias variáveis, a fim de se reotimizar um problema reduzido, vem sendo empregadas tais como *Relax-and-Fix* em Beraldi *et al.* (2008), *Fix-and-Optimize* por Sahling *et al.* (2009) e *Hamming* apresentada em Camargo *et al.* (2014). O método construtivo *Relax-and-Fix* (R&F) resolve uma sequência parcialmente relaxada (Pochet e Wolsey, 2006). Em cada subproblema, parte das variáveis binárias previamente otimizadas são fixadas, outra parte dessas variáveis são otimizadas, enquanto o restante delas permanece relaxada. Logo, as

variáveis binárias são progressivamente fixadas nos valores obtidos em iterações anteriores. Araújo (2008) aplica a heurística R&F para resolver um problema de dimensionamento de lotes na indústria de fundição. Uma abordagem semelhante é aplicado por Toso e Morabito (2009) e Clark *et al.* (2010) para um problema de dimensionamento de lotes na indústria de nutrição animal. Ferreira *et al.* (2009) e Ferreira *et al.* (2012) também aplica tal técnica na resolução de um problema de produção na indústria de bebidas.

A heurística *Fix-and-Optimize* (F&O) é um método de melhoria iterativa (Pochet e Wolsey, 2006). As variáveis inteiras são fixadas no melhor valor encontrado anteriormente, exceto por um conjunto limitado de tais variáveis que passam a ser reotimizadas. Esta abordagem foi aplicada por Sahling *et al.* (2009) e Helber e Sahling (2010) para resolver variantes do problema multiestágio de dimensionamento de lotes e planejamento da produção. Toledo *et al.* (2013a) combinam F&O e algoritmo genético em uma meta-heurística híbrida para solucionar o problema multiestágio de dimensionamento de lotes. No contexto de problemas de dimensionamento de lotes na indústria de recipiente de vidro, Almada-Lobo *et al.* (2008) trata um sistema de produção com múltiplas instalações, onde cada unidade (planta) tem um conjunto de fornos em que a pasta de vidro é produzido. Almada-Lobo *et al.* (2010) e Toledo *et al.* (2013b) modelaram e propuseram métodos para planejamento da produção no curto prazo em uma única planta industrial com um único forno. O presente trabalho introduz um modelo que também considera uma única planta, mas com vários fornos.

3. Problema de Produção de Recipientes de Vidro (PPRV)

Indústrias que fabricam embalagens de vidro costumam possuir várias plantas produtivas, onde cada uma delas pode apresentar um número diferente de fornos com capacidade de produção variada. A Figura 1 ilustra plantas com diversas linhas de produção (fornos e máquinas), onde os fornos ($Y_i, i = 1, \dots, 6$) podem estar ligados a máquinas ($K_j, j = 1, \dots, 12$) com diferentes configurações. O presente artigo considera uma única planta produtiva e avalia decisões relacionadas à configuração das máquinas bem como dimensionamento de lotes dos produtos finais.

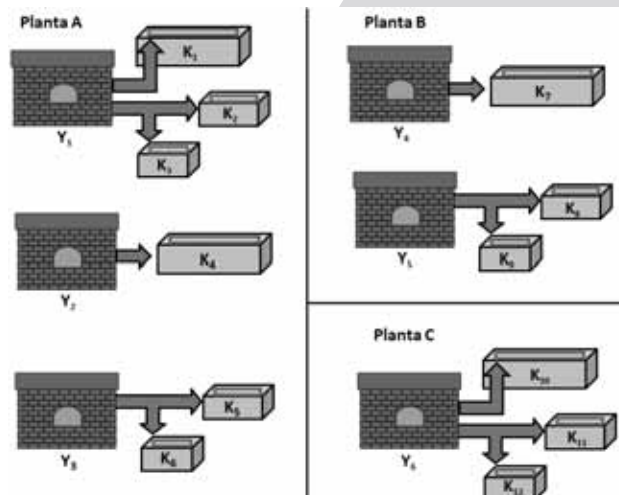


Figura 1: Linha de produção definida por vários fornos.

Uma mistura de matérias-primas, que determina a cor do vidro, é fundida nos fornos. A pasta resultante da mistura é transferida para um conjunto de máquinas que podem apresentar uma configuração específica com um número variável de cavidades para moldagem. Tais variações de configuração permitem a produção de diferentes tipos de

recipientes. As máquinas estão associadas a um forno estabelecendo um processo produtivo em duas fases. Assim, cada fornalha define uma linha de produção onde o forno produz a pasta de vidro na primeira fase e as máquinas produzem os recipientes na segunda fase. Cada máquina só é ligada a um único forno a partir do qual a pasta de vidro será recebida. Um forno, por outro lado, pode alimentar simultaneamente várias máquinas ligadas a ele. Depois que os recipientes são moldados, eles são submetidos a um processo de acabamento, através de um forno de reaquecimento para a secagem, uma inspeção automática para a remoção de produtos defeituosos e paletas para embalagem. Pastas de vidro com cores diferentes não podem ser misturadas. Logo, o forno só pode fundir matéria-prima para produção de uma determinada cor de cada vez e, conseqüentemente, todas as máquinas ligadas a esse forno irão produzir recipientes da mesma cor. Uma vez que os fornos são operados continuamente e a composição para formar o vidro leva cerca de 24 horas para passar pela fase de fusão, há um tempo de preparação nos fornos dependente da troca de cores realizadas. Isso leva a duas conseqüências principais: especialização dos fornos e não atendimento de demandas reduzidas. Os fornos podem se tornar especializados, ou seja, passam a produzir apenas algumas cores durante todo o horizonte de tempo visando minimizar custos relacionados ao tempo de preparo nas trocas de cores. Logo, cores cuja demanda total seja reduzida em termos de produtos finais podem ser desconsideradas no processo produtivo, principalmente se os custos relacionados ao seu tempo de preparo não compensar sua produção.

Há três cores de vidro no processo aqui estudado: âmbar, pederneira ou verde. A mistura que resulta numa destas cores é transportada para dentro do forno, onde é fundida a cerca de 1500° C. O material depositado para fornada leva até 24 horas para passar através da fase de fusão, dependendo da capacidade do forno que é medida em toneladas derretidas por dia. A pasta de vidro obtida é cortada de acordo com o tamanho do recipiente a ser fabricado. Em seguida, os cortes obtidos são distribuídos pelos alimentadores a seções paralelas e independentes, onde estão as máquinas de moldagem do vidro. As máquinas retornam o produto final a 600° C mantidas por meio de câmaras sustentadas por maçaricos. Os recipientes formados são então passados sequencialmente através de procedimentos de acondicionamento, tratamento de superfície, inspeção automática e embalagem. Almada-Lobo *et al.* (2010) apresentam um modelo matemático inteiro misto para o caso de uma planta com um único forno. Porém, o modelo se revelou intratável para instâncias de tamanho considerado moderado a grande. Os autores desenvolveram uma heurística baseada em Decomposição Lagrangiana para gerar soluções viáveis. No entanto, apenas instâncias de pequeno a médio porte (máximo de 15 tipos de recipientes) foram solucionadas. Toledo *et al.* (2013) apresentaram um novo modelo e uma meta-heurística híbrida que combina algoritmo genético, *simulated annealing* e uma heurística gulosa. O método foi capaz de retornar soluções para instâncias de grande porte.

4. Modelo Matemático

O modelo matemático combina restrições capazes de definir a configuração das linhas de produção bem como o atendimento das demandas, considerando o comportamento da fábrica dentro de um planejamento de longo e curto prazo. Logo, o planejamento dentro de um horizonte de T meses foi avaliado, onde o comportamento diário da produção dentro de cada mês é estabelecido. Além disso, variáveis são introduzidas para permitir a determinação da melhor configuração (cavidades ativas) para cada máquina.

Parâmetros:

- i, j : índices para produtos, l, u : índices para cores do produto
- s : índice para dias, t : índice para períodos com $t = 1, \dots, T$.
- y : índice para fornos, k : índice para máquinas.

K_y : Conjunto de máquinas alimentadas pelo forno y .

N_l : Conjunto de produtos da cor l .

Ω_t : Conjunto de dias do mês t com $s = 1, \dots, |\Omega_t|$.

sc_{uly}^{color} : Custo de troca da cor u para cor l no forno y (\$).

$sc_{jik}^{product}$: Custo de troca do produto j para o produto i na máquina k (\$).

h_i : Custo de estoque por tonelada do produto i (\$).

P_i : Penalidade por tonelada de demanda não atendida do produto i (\$).

p_{ik} : Quantidade do produto i produzido por cavidade ativa na máquina k por dia (ton/dia).

η_k : Eficiência da máquina k ($\eta_k \in [0, 1]$).

\bar{n}_{ik} : Número máximo de cavidades que podem ser ativas na máquina k para o produto i .

\underline{n}_{ik} : Número mínimo de cavidades que podem ser ativas na máquina k para o produto i .

C_y : Capacidade de derretimento do forno y (ton/dia).

st_{uly} : Tempo gasto no forno y na troca da cor l para cor u (dia).

d_{it} : Demanda do produto i no fim do período t (ton).

Q_t : Quantidade de dias no período t (dias).

I_{i0} : Estoque do produto i no início do horizonte de planejamento (ton).

α_{ly0} : 1, Se o forno y está configurado com a cor l no início do horizonte de planejamento;
0, caso contrário.

Variáveis:

I_{it} : Estoque do produto i ao final do período t (ton).

q_i^0 : Quantidade fictícia do produto i no início do horizonte de planejamento (ton).

Z_{yt} : 1, Se o forno y produziu por todos os dias do período t ; 0, caso contrário.

α_{lyt} : 1, Se o forno y está configurado com a cor l no início do período t ; 0, caso contrário.

T_{luyt} : 1, Se ocorre troca da cor l para cor u no forno y no período t ; 0, caso contrário.

X_{ikts} : 1, se o produto i é produzido na máquina k no mês t no dia s ; 0, caso contrário.

N_{ikts} : Número de cavidade ativas na máquina k no mês t no dia s na produção de i .

B_{lyt} : Tempo de troca mais tempo em que o vidro da cor l foi derretido no forno y no período t .

Formulações:

$$\text{Min} \sum_{it} h_i \cdot I_{it} + \sum_i P_i \cdot q_i^0 + \sum_{luyt} sc_{uly}^{\text{color}} \cdot T_{luyt} \quad (1)$$

Sujeita a:

$$I_{it} = I_{i0} + q_i^0 - d_{it} + \sum_y \sum_{k \in K_y} \left(\sum_{s \in \Omega} p_{ik} \cdot \eta_k \cdot N_{ikts} + \sum_u p_{ik} \cdot \eta_k \right) \quad \forall l, t = 1, i \in N_l \quad (2)$$

$$I_{it} = I_{i(t-1)} - d_{it} + \sum_y \sum_{k \in K_y} \left(\sum_{s \in \Omega} p_{ik} \cdot \eta_k \cdot N_{ikts} + \sum_u p_{ik} \cdot \eta_k \right) \quad \forall l, t > 1, i \in N_l \quad (3)$$

$$N_{ikts} \leq \bar{n}_{ik} \cdot X_{ikts} \quad \forall i, k, t, s \quad (4)$$

$$N_{ikts} \geq \underline{n}_{ik} \cdot X_{ikts} \quad \forall i, k, t, s \quad (5)$$

$$\sum_i X_{ikts} \leq 1 \quad \forall k, t, s \quad (6)$$

$$\sum_u st_{uly} \cdot T_{ulyt} + \sum_{i \in N_l} \sum_{s \in \Omega_t} X_{ikts} = B_{lyt} \quad \forall l, y, t, k \in K_y \quad (7)$$

$$Z_{yt} \leq Z_{y(t-1)} \quad \forall y, t > 1 \quad (8)$$

$$\sum_l B_{lyt} \leq Q_t \quad \forall y, t = 1 \quad (9)$$

$$\sum_l B_{lyt} \leq Q_t \cdot Z_{y(t-1)} \quad \forall y, t > 1 \quad (10)$$

$$\sum_l B_{lyt} \geq Q_t \cdot Z_{yt} \quad \forall y, t \quad (11)$$

$$\sum_{k \in K_y} \sum_{i \in N_l} \left(\sum_{s \in \Omega_t} N_{ikts} \right) \cdot p_{ik} + C_y \cdot \sum_u (st_{uly} \cdot T_{ulyt}) \leq C_y \cdot B_{lyt} \quad \forall (l, y, t) \quad (12)$$

$$\sum_l \alpha_{lyt} = 1 \quad \forall y, t \quad (13)$$

$$\alpha_{lyt} + \sum_u T_{ulyt} = \alpha_{ly(t+1)} + \sum_u T_{luyt} \quad \forall l, y, t \quad (14)$$

$$\sum_{s \in \Omega_t} X_{ikts} \leq Q_t \cdot \left(\alpha_{lyt} + \sum_{u \neq l} T_{ulyt} \right) \quad \forall l, y, t, k \in K_y, i \in N_l \quad (15)$$

$$B_{lyt}, I_{it}, q_i^0 \geq 0 \quad (16)$$

$$\alpha_{lyt}, T_{luyt}, Z_{yt}, X_{ikts} \in \{0, 1\} \quad (17)$$

$$N_{ikts} \in \mathbb{Z}^+ \quad (18)$$

A função objetivo a ser minimizada é definida como a soma dos custos de troca de cores, estoque e demanda não atendida (1). As restrições (2) e (3) representam o balanço de estoque, onde as demandas não atendidas são acumuladas na variável q_i^0 . As restrições (4) e (5) são introduzidas nesta modelagem e impõem, respectivamente, o número máximo e mínimo de seções de moldes ativos que podem ser definidos para cada produto na máquina em um determinado período. Por outro lado, se um produto não está configurado para a

produção ($X_{ikts} = 0$), não existem moldes ativos fixados. A restrição (6) garante que no máximo um produto seja produzido em cada máquina. A restrição (7) determina o tempo da produção de cores B_{lyt} . Esse tempo é calculado como o tempo de troca da cor u para cor l mais o tempo de produção de todos os produtos i da cor l . A restrição (8) garante que, uma vez que o forno seja desativado, ele permanecerá desativado até o fim do horizonte de planejamento. A restrição (9) define que a produção do primeiro período não deve exceder o número de dias do período. De forma semelhante, a restrição (10) não permite a produção caso o forno esteja desativado. A restrição (11) estabelece que os fornos trabalham com força ininterrupta durante todo o período que estão ativo. Assim, as restrições (10) e (11) em conjunto permitem que os fornos sejam utilizados parcialmente, dentro do período no qual foram desativados ($Z_{y(t-1)} = 1$ e $Z_{yt} = 0$). A restrição (12) garante o equilíbrio de capacidade dentro do tempo de produção. Há apenas uma cor inicial atribuída na restrição (13) para um forno a cada período, enquanto que a restrição (14) define o fluxo de trocas que partem da cor inicial (α_{lyt}) até a cor final ($\alpha_{ly(t+1)}$). A restrição (15) garante que nenhum produto da cor l seja produzido caso não exista campanha (produção) da cor l no período. As restrições (16), (17) e (18) apresentam os respectivos domínios das variáveis de decisão.

5. Métodos de Resolução

Duas heurísticas foram implementadas para o PPRV. A primeira é uma heurística construtiva baseada no método *Relax-and-Fix*. A segunda é uma heurística de melhoria baseada no método *Fix-and-Optimize*. R&F é uma heurística construtiva que reduz o número de variáveis binárias do problema, tornando o submodelo simples de resolver. Assim, deve ser escolhida uma partição do conjunto de variáveis e o critério de seleção tem influência na dificuldade de solução dos submodelos. A definição das partições deve ser relevante para as decisões a serem tomadas iterativamente. No algoritmo 1, o pseudo código proposto para o R&F é descrito, onde a variável relaxada foi Z_{yt} . Os períodos foram utilizados como critério para escolha das partições como apresentado no pseudo código.

Algoritmo 1: PROCEDIMENTO DO *Relax-and-Fix*

Entrada: variável Z_{yt} relaxada (contínua)

- 1 **início**
- 2 Resolve o modelo com Z_{yt} ;
- 3 **para** partição $< t$ **faça**
- 4 Converter variável Z_{yt} para binária;
- 5 Resolve o modelo novamente com Z_{yt} ;
- 6 **se** houver solução viável **então**
- 7 Fixa-se o valor da Z_{yt} em binária;
- 8 **fim**
- 9 **senão**
- 10 Solução inviável;
- 11 **fim**
- 12 **fim**
- 13 **fim**
- 14 **retorna:** ObjValue, BestObjValue, Time

A Figura 2 ilustra o funcionamento da heurística R&F. Após definida a partição (T_1) e convertidos os valores contínuos para binário, o restante das variáveis binárias são relaxadas na iteração seguinte. Ao final de cada iteração, fixa-se as decisões tomadas para as variáveis dentro da partição considerada.

O método *Fix-and-Optimize* (F&O) é uma heurística de melhoria, ou seja, parte de uma solução inicialmente estabelecida e tenta melhorá-la. A presente abordagem combina o uso de F&O com R&F, onde abordagem semelhante integrando um AG com F&O foi proposta em [?]. F&O reduz o número de variáveis binárias do problema, utilizando uma partição iterativa. No algoritmo 2, o pseudo código para o F&O implementado neste trabalho é apresentado. A solução inicial é dada pela heurística construtiva R&F que passa

Fornos/ Períodos	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆
Y ₁	0.91	0.2	0.4	0.93	0.3	0.9
Y ₂	0.26	0.3	0.57	0.5	0.8	0.96

Fornos/ Períodos	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆
Y ₁	1	0.2	0.4	0.93	0.3	0.9
Y ₂	0	0.3	0.57	0.5	0.8	0.96

Fornos/ Períodos	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆
Y ₁	1	0.2	0.4	0.93	0.3	0.9
Y ₂	0	0.3	0.57	0.5	0.8	0.96

Fornos/ Períodos	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆
Y ₁	1	1	0.4	0.93	0.3	0.9
Y ₂	0	1	0.57	0.5	0.8	0.96

Partições
Relaxadas

Partição
Fixada

Partição
a ser Fixada

Figura 2: Ilustrando o procedimento da R&F.

agora a ser melhorada pelo F&O proposto.

Algoritmo 2: PROCEDIMENTO DO *Fix-and-Optimize*

Entrada: uma solução viável do R&F (binária)

- 1 início
- 2 para cada partição faça
- 3 Altera-se o valor binário da Z_{yt} corrente;
- 4 Resolve o modelo novamente com Z_{yt} atual;
- 5 se solução viável for melhor que atual então
- 6 Fixa-se a Z_{yt} modificada;
- 7 fim
- 8 senão
- 9 Descarta solução;
- 10 fim
- 11 fim
- 12 fim
- 13 retorna: ObjValue, BestObjValue, Time

A Figura 3 ilustra o procedimento adotado na heurística F&O. Dado uma solução inicial herdada do R&F, define-se a partição (T_1) cujas variáveis binárias serão reotimizadas. As demais variáveis binárias permanecem fixadas. Se houver melhora na solução corrente, fixa-se as decisões tomadas e uma nova partição é definida. Caso contrário, aumenta-se o tamanho da partição corrente visando reotimizar um submodelo com maior número de variáveis binárias.

6. Resultados Computacionais

As instâncias a serem avaliadas foram criadas por um gerador aleatório que definiu os parâmetros a partir de dados fornecidos por uma indústria de recipientes de vidro localizada em Portugal. Dois grupos de instâncias foram elaborados: *Small-Factory* (SF) e *Small-Horizon* (SH). Um total de sete subgrupos de instâncias foram criados para cada caso, onde cada subgrupo contém 10 instâncias. As instâncias SF avaliam cenários com fábricas que apresentam um número crescente de fornos, ou seja, diferentes capacidades de produção. Para isso, os parâmetros usados na criação de tais instâncias foram: $Q_t = 15$, $K \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $T = 6$ e $\omega = 1$ que é a regulação da taxa de produtos. Os nomes dos subgrupos foram associados ao valor utilizado para K na geração das 10 instâncias de

Fornos/ Períodos	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆
Y ₁	1	1	1	1	1	0
Y ₂	0	1	1	1	1	1

Fornos/ Períodos	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆
Y ₁	1	1	1	1	1	0
Y ₂	0	1	1	1	1	1

Fornos/ Períodos	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆
Y ₁	0	1	1	1	1	1
Y ₂	1	1	1	1	1	0

Partições Binárias do R&F
 Partição a ser Alterada
 Partição resultante do F&O

Figura 3: Ilustrando o procedimento da F&O.

cada subgrupo: SF1, ..., SF7. Para as instâncias SH, foi avaliado o que ocorre quando o horizonte planejamento da fábrica aumenta. Os parâmetros utilizados foram: $Q_t = 15$, $K = 4$, $T \in \{3, 4, 5, \bar{6}, 7, 8, 9\}$ e também $\omega = 1$. Os nome dos subgrupos foram distribuídos da seguinte forma: SH3, ..., SH9.

A formulação do modelo inteiro misto proposto foi codificada na linguagem C/C++ usando a *interface* OPL (*Optimization Programming Language*) do pacote IBM ILOG CPLEX 12.6. O modelo em OPL e o *solver* CPLEX também foram utilizados, respectivamente, na codificação das heurísticas e resolução dos submodelos gerados por elas. Os três métodos apresentados neste artigo foram testados em um total de 140 instâncias, 70 instâncias com as características SF e 70 com as características SH. O tempo limite foi de uma hora para execução de cada método. Todos os testes foram realizados em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i7, 2,67 GHz e 18,099 GB RAM, e sistema operacional Linux (versão 3.2.0-4-amd64/Debian 4.6.3-14). A resolução de instâncias a partir do modelo proposto, usando o *solver* CPLEX, permitiu a obtenção de algumas soluções ótimas como pode ser observado na Figura 4.

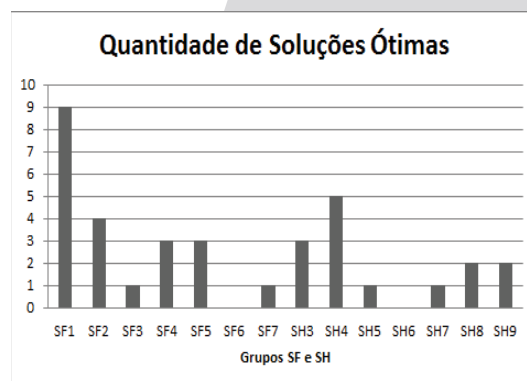


Figura 4: Número de soluções ótimas utilizando o modelo proposto.

Observa-se que para instâncias do grupo SF, o *solver* CPLEX encontra 9 soluções ótimas no cenário com 1 forno (SF1). Nos demais cenários, foi possível encontrar no máximo 4 soluções ótimas. No grupo SH, um total de 3 e 4 soluções ótimas são obtidas para os dois cenários mais simples (SH3 e SH4), nos demais casos apenas 1 solução ótima foi retornada

dentro de 1 hora de execução do *solver*. Ambos os casos refletem o aumento no número de variáveis e restrições do modelo quando os parâmetros K e T crescem. Isso impacta diretamente na performance do método exato. Os próximos resultados são dados em termos de média do GAP.

O GAP avalia a solução obtida a partir da diferença entre o Limitante Superior (LS) e o Limitante Inferior (LI), ambos fornecidos pelo *solver* CPLEX, dividido pelo Limitante Superior (LS), quanto mais perto de zero for o resultado da expressão, mais próximo da solução ótima. A expressão 19 apresenta o cálculo do GAP onde $CPLEX^{LS}$ e $CPLEX^{LI}$, representam o LS e o LI do CPLEX, respectivamente. E o GAP em relação as heurísticas é calculado de maneira similar, substituindo o LS do CPLEX pelo LS da heurística, a diferença deve ser positiva para garantir a qualidade da solução. A Figura 5 compara os resultados médios obtidos.

$$Gap(\%) = 100 * \frac{CPLEX^{LS} - CPLEX^{LI}}{CPLEX^{LS}} \quad (19)$$

Para instâncias do grupo SF na Figura 5, os métodos ficaram empatados nos resultados dos subgrupos SF1 a SF3, enquanto o *solver* CPLEX obteve soluções melhores em média que as heurísticas no subgrupo SF7. Nos subgrupos SF5 e SF6, as heurísticas obtiveram soluções melhores que o CPLEX. No subgrupo SF5 o F&O não consegue em média melhorar as soluções obtidas pelo R&F. A heurística F&O obteve melhores soluções do que CPLEX e R&F no subgrupo SF4. No grupo SH, as heurísticas obtiveram melhores soluções para SH4, SH6, SH8 e SH9. O CPLEX retornou melhores solução nos subgrupos SH3 e SH7, entretanto, o F&O também não melhora as soluções retornadas pelo R&F no subgrupo SH5.

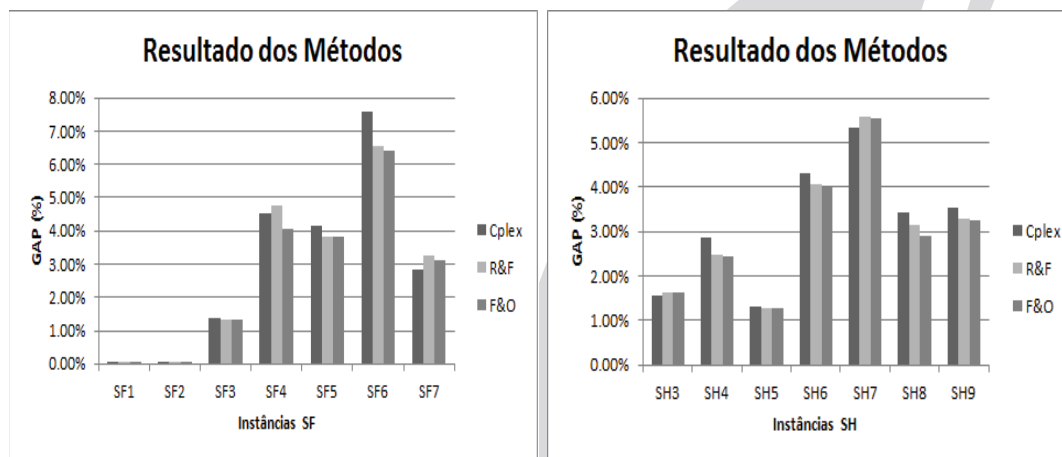


Figura 5: Resultados em média para os métodos.

A Tabela 1 apresenta a quantidade de melhores soluções retornadas por um método (Vitórias) e a quantidade de empates obtidos. Um empate ocorre quando $|solMetodo1 - solMetodo2| < 0.01$. Observa-se que o F&O consegue retornar as melhores soluções já que utiliza a solução do R&F como ponto de partida. Todavia, o maior número de empates ocorre entre F&O e R&F, indicando que na maioria dos casos o F&O enfrenta dificuldades para melhorar a solução final encontrada por R&F.

Grupos	Vitórias dos Métodos			Empates entre os Métodos		
	Modelo	R&F	F&O	Modelo/R&F	Modelo/F&O	R&F/F&O
SF						
SF1	0	0	1	10	10	10
SF2	0	0	1	10	10	10
SF3	1	1	3	10	10	10
SF4	2	2	2	8	9	9
SF5	3	2	1	9	9	10
SF6	1	2	7	7	7	9
SF7	3	4	1	8	9	9
Total SF	10	11	16	62	64	67
SH						
SH3	2	0	0	10	10	10
SH4	2	0	3	9	9	10
SH5	0	1	2	10	10	10
SH6	0	1	3	8	8	10
SH7	3	0	5	9	9	10
SH8	3	2	3	8	9	8
SH9	1	0	3	9	9	10
Total SH	11	4	19	63	64	68
Total (SF + SH)	21	15	35	125	128	135

Tabela 1: Número de vitórias e empates entre os métodos.

7. Considerações Finais

O presente trabalho introduziu um modelo matemático para o PPRV, onde decisões relacionadas a produção no curto e longo prazo são tomadas bem como relativas à configuração utilizada nas máquinas. Instâncias foram geradas para o PPRV a partir de dados reais de uma indústria de recipientes de vidro. Os métodos propostos se mostraram promissores, pois na média dos GAPs desempenho satisfatório, onde dos 14 subgrupos as heurísticas foram melhores em 6 subgrupos, o CPLEX em outros 6 subgrupos e houve praticamente empate em 2 subgrupos. Na média do tempo para retornar a melhor solução, as heurísticas foram melhores em 6 subgrupos e o CPLEX em 8 subgrupos.

Todavia, isso representa a média de tempo para cada método alcançar sua melhor solução, uma vez que todos foram executados dentro de um tempo máximo de 1 hora. Logo, pode-se concluir que mesmo para as instâncias de pequeno porte propostas, as heurísticas conseguem retornar solução de melhor qualidade em metade dos subgrupos, gastando mais tempo para alcançar tais soluções. O *solver* CPLEX consegue retornar soluções de melhor qualidade na outra metade dos subgrupos, levando, em média, menos tempo para atingir tais soluções.

Considerando os valores retornados em cada instância, as heurísticas superaram o resultado do CPLEX em torno de 54% dos subgrupos das instâncias. Dado que as instâncias foram elaboradas prezando situações simples com o propósito de obter soluções ótimas ou factíveis, o desempenho das heurísticas foi satisfatória. Desta forma, espera-se que o comportamento das heurísticas em instâncias de médio e grande porte sejam ainda mais eficientes. Trabalhos futuros serão conduzidos na geração de instâncias de médio e grande porte, avaliação das heurísticas propostas nessas instâncias e proposição de novos métodos combinando meta-heurísticas e técnicas de programação matemática.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer a CAPES e CNPQ (processos 83474/2013-4 e 312967/2014-4) pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho. O último autor gostaria de agradecer ao ERDF - European Region Development Fund, através do programa COMPETE e por fundos nacionais, através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito do projeto NORTE-07-0124-FEDER-000057.

Referências

- Almada-Lobo, B. Oliveira, J. e Carravilla, M.** (2008), Production planning and scheduling in the glass container industry: A VNS approach, *International Journal of Production Economics* 114 (1) 363–375.
- Almada-Lobo, B., Klabjan, D., Carravilla, M.A. e Oliveira, J.F.** (2010), Multiple machine continuous setup lot sizing with sequence dependent setups, *Computational Optimization and Applications*, 47(3):529–552.
- Araujo, S. e Arenales, M. e Clark, A.** (2008), Lot Sizing and Furnace Scheduling in Small Foundries, *Comput. Oper. Res.* 35 (3) 916–932.
- Ball, M.** (2011), Heuristics based on mathematical programming, *Surveys in Operations Research and Management Science* 16 (1) 21–38.
- Beraldi, P. Ghiani, G., Grieco, A. e Guerriero, E.** (2008), Rolling-horizon and fix-and-relax heuristics for the parallel machine lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent set-up costs, *Computers & Operations Research* 35 (11) 3644–3656.
- Camargo, V. Toledo, F. e Almada-Lobo, B.** (2014), HOPS: Hamming-Oriented Partition Search for production planning in the spinning industry, *European Journal of Operational Research* 234 (1) 266–277.
- Clark, A., Morabito, R. e Toso, E.** (2010), Production setup-sequencing and lot-sizing at an animal nutrition plant through atsp subtour elimination and patching, *Journal of Scheduling* 13 (2) 111–121.
- Drexel, A. e Kimms, A.** (1997), Lot-sizing and scheduling – survey and extensions, *European Journal of Operational Research*, 99:221–235.
- Ferreira, D., Morabito, R. e Rangel, S.** (2009), Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem, *European Journal of Operational Research* 196 (2) 697–706.
- Ferreira, D., Clark, A. Almada-Lobo, B. e Morabito R.** (2012), Single-stage formulations for synchronised two-stage lot sizing and scheduling in soft drink production, *International Journal of Production Economics* 136 (2) 255–265.
- Helber, S. e Sahling, F.** (2010), A Fix-and-Optimize approach for the multi-level capacitated lot sizing problem, *International Journal of Production Economics*, Vol 123, p.247–256.
- Jans, R.** (2009), Solving lot-sizing problems on parallel identical machines using symmetry-breaking constraints, *INFORMS Journal on Computing*, 21(1):123–136.
- Jans, R. e Degraeve, Z.** (2007), Meta-heuristics for dynamic lot sizing: A review and comparison of solution approaches, *European Journal of Operational Research*, 177:1855–1875.
- Karimi, B. Ghomi, S. M. T. F. e Wilson, J. M.** (2003), The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms, *Omega* 31 365–378.
- Sahling, F., Buschkühl, L., Tempelmeier, H. e Helber, S.** (2009), Solving a multi-level capacitated lot sizing problem with multi-period setup carry-over via a Fix-and-Optimize heuristic, *Computers & Operations Research* 37 2546–2553.
- Toledo, C.F.M., Oliveira, R.R.R., França, P.M.** (2013a), A hybrid multi-population genetic algorithm applied to solve the multi-level capacitated lot sizing problem with backlogging, *Computers & Operations Research* 40 (4) 910–919.
- Toledo, C.F.M., Arantes, M., Oliveira, R. e Almada-Lobo, B.** (2013b), Glass container production scheduling through hybrid multipopulation based evolutionary algorithm, *Applied Soft Computing* 13 (3) 1352–1364.
- Toso, E. e Morabito, R.** (2009), A. Clark, Lot Sizing and Sequencing Optimisation at an Animal-feed Plant, *Comput. Ind. Eng.* 57 (3) 813–821.
- Pochet, Y. e Wolsey, L. A.**, *Production Planning by Mixed Integer Programming*, Springer Science & Business Media, New York, (2006).