

FORMULAÇÕES DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA PARA ELABORAÇÃO DE FUNDOS DE ÍNDICES: COMPARAÇÕES E EVIDÊNCIAS DE DESEMPENHO

José Mauricio Brasil Gonçalves

Dep. de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense (UFF)
Rua Passo da Pátria 156, Bloco D, São Domingos, Niterói – RJ. 22210-240
josemauriciobrasil@gmail.com

Eduardo Uchoa Barboza

Dep. de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense (UFF)
Rua Passo da Pátria 156, Bloco D, São Domingos, Niterói – RJ. 22210-240
uchoa@producao.uff.br

RESUMO

Fundos de índices buscam acompanhar o desempenho de índices de bolsas de valores. Apresentaram, nos últimos anos, um elevado crescimento no mercado financeiro brasileiro e internacional. Este trabalho realiza uma exaustiva avaliação e comparação de três modelos de programação inteira propostos na literatura para resolver o problema do rastreamento de índice. Os testes foram realizados sobre dados históricos de alguns dos principais índices de ações: S&P 100, FTSE 100, HDAX, Hang Seng e Ibovespa. Diferentemente de trabalhos anteriores, foi empregada neste artigo uma base de dados recente, com início em 2008 e término em 2014, bem como foram realizados testes estatísticos para comprovar ou refutar hipóteses relacionadas à aplicabilidade dos modelos. Entre outros resultados obtidos, os testes estatísticos comprovam a eficácia dos modelos de programação inteira em comparação a modelos de hipótese nula, bem como identificam elementos chaves para o melhor desempenho das formulações.

PALAVRAS CHAVE. Programação Inteira, Gestão Passiva, Rastreamento de Índices.

Área principal: Programação Matemática

ABSTRACT

Index funds seek to replicate the performance of certain indexes of a stock market. They have, in recent years, presented a high growth in domestic and international financial markets. This work performs an exhaustive evaluation and comparison of three integer programming models proposed in the literature for the index tracking problem. The tests were performed over historical data from some of the most important stock indices: S&P 100, FTSE 100, HDAX, Hang Seng e Ibovespa. Unlike previous studies, it was employed in this work a recent database, starting in 2008 and ending in 2014, as well as statistical tests to prove or disprove hypotheses regarding the applicability of the models were performed. Among other results, the statistical tests prove the effectiveness of integer programming models when compared to null models, as well as identify key elements for the best performance of formulations.

KEYWORDS: Integer Programming, Passive Management, Index Tracking.

Main area: Mathematical Programming

1. Introdução

Um investimento pode ser definido como o comprometimento presente de recursos na expectativa de colher benefícios futuros. Este pode ser realizado em ativos reais, como imóveis, máquinas e terrenos, ou em ativos financeiros (ações, títulos de dívida ou derivativos) que representam direitos sobre a receita gerada pelos ativos reais (BODIE et al. 2010, *apud* Gonçalves et al. 2015). Graham et al. (1973), um dos pioneiros na avaliação de investimentos, diferencia investimento de especulação, destacando que uma operação de investimento é aquela que, após análise profunda, promete a segurança do principal e um retorno adequado. As operações que não atendem a estas condições são especulativas. Bogle (2010) destaca que o investimento é um ato de fé. Ao investir recursos numa ação (por exemplo), tem-se a fé – ou pelo menos a esperança – de que os esforços dos administradores da companhia produzirão boas taxas de retorno.

Fundos de investimentos aplicam recursos em ações ou outros instrumentos financeiros. O objetivo do fundo é aumentar, no médio e longo prazo, o capital inicialmente investido. Bodie et al. (2010) definem fundos de investimento como sendo intermediários que recolhem fundos de investidores pessoa física e os investem em uma gama potencialmente ampla de títulos ou outros ativos. O agrupamento de ativos é a principal ideia por trás da formação de um fundo. Cada investidor tem direito proporcional ao montante investido. A comissão de valores mobiliários (CVM), autarquia pública federal, denomina fundos de investimento como uma comunhão de recursos, captados de pessoas físicas ou jurídicas, com o objetivo de obter ganhos financeiros a partir da aplicação em títulos e valores mobiliários. São regidos por um regulamento e têm na Assembleia Geral seu principal fórum de decisões. A CVM classifica os diversos fundos existentes em sete grupos: “curto prazo”, “referenciado”, “renda fixa”, “multimercado”, “ações”, “cambial” e “dívida externa”. Todos os fundos de investimento possuem um regulamento. A associação brasileira das entidades dos mercados financeiro e de capitais (ANBIMA) lembra que o regulamento é o documento oficial de constituição do fundo, e contém todas as regras a serem adotadas em suas operações, tais como taxas, prazo de resgate, política de investimento, e o *benchmark* (um índice do mercado financeiro, tal com um índice da bolsa ou a taxa média do CDI). Investidores costumam comparar a rentabilidade do seu fundo com algum desses índices para avaliar se ele foi bem ou mal. O Ibovespa, principal índice brasileiro de ações, é *benchmark* para inúmeros fundos de ações.

No que tange a gestão do fundo, duas estratégias básicas podem ser seguidas pelo gestor (GONÇALVES, J. M.B., UCHOA, E., 2014).

Gestão ativa: neste caso, o gestor possui flexibilidade para escolher e alterar as ações que integram o fundo. Está livre para utilizar, ao longo do processo de seleção, métodos da análise fundamentalista e da análise técnica. A premissa é de que o julgamento e a experiência do gestor do fundo são capazes de selecionar as ações com maior probabilidade de retorno do capital no futuro, superando o *benchmark* estabelecido pelo fundo.

Gestão passiva: aqui o gestor possui menor flexibilidade no processo de seleção e mudança da composição da carteira de ativos ao longo do tempo. É esperado que o fundo permaneça fiel a um determinado critério pré-estabelecido.

O debate entre qual a melhor estratégia a adotar na gestão de recursos é bastante antigo, estando fora do escopo deste trabalho defender uma ou outra estratégia. Defensores da gestão passiva destacam os baixos custos de transação envolvidos na administração do fundo (não é necessário remunerar uma equipe de gestão especializada e alocada na busca de ativos com promessas de maior rentabilidade). O baixo custo é transmitido ao cotista do fundo, através de uma reduzida taxa de administração anual. Os críticos à gestão ativa lembram também que, nem mesmo os melhores gestores de recursos (resguardadas poucas exceções) conseguem, ano após ano, superar um índice de mercado. Por sua vez, defensores da gestão ativa advogam ser possível encontrar ações subavaliadas. Para esses defensores, investir num fundo passivo, tal como um fundo de índice, é uma estratégia “mediocre”, pois segue estritamente os movimentos do mercado (de alta e de baixa).

Um tipo de fundo de gestão passiva comum é representado pelos fundos de índices. Fundos de índices buscam acompanhar o desempenho de um índice de ações conhecido, tal como o Ibovespa (bolsa de valores de São Paulo), Dow Jones, S&P 500 ou S&P 100, (bolsa de Nova Iorque), DAX 100

(bolsa de Frankfurt), FTSE (bolsa de Londres), NIKKEI 225 (bolsa de Tóquio), HANG SENG (bolsa de Hong Kong) selecionando e adquirindo algumas ações que integram o índice. Invariavelmente, o *benchmark* destes fundos é o próprio índice perseguido. Um fundo de índice busca reproduzir o desempenho do índice, e não superá-lo. Especificamente, o nome desta estratégia é “seguir o índice” (*index tracking*), sendo este o objeto principal deste trabalho.

Formalmente, *index tracking* descreve o processo de tentativa de rastrear (reproduzir) o desempenho de um determinado índice. Um fundo de gestão passiva cujo objetivo é reproduzir o retorno de um índice é conhecido como fundo de índice (Beasley et al, 2003).

Cumprе ressaltar que seguir o índice em princípio é algo simples. A composição do índice (quais ações fazem parte, juntamente com suas proporções) é divulgada e atualizada sempre quando há mudança na composição do mesmo. Dessa forma, bastaria comprar todas as suas N ações na proporção da sua composição e ir atualizando a carteira na medida em que a composição for mudando. Contudo, isto é de difícil gerenciamento, dado que algumas das ações teriam de ser adquiridas em diminutas proporções (sendo algumas delas sem liquidez) e, os custos de transação seriam altos. Esses custos já seriam suficientes para inviabilizar essa estratégia para um pequeno ou médio investidor (por exemplo, para seguir o S&P 500, o investidor teria de adquirir quinhentas ações diferentes, em proporções distintas). Mesmo para investidores de grande porte, que até poderiam comprar as N ações, um problema complexo ocorre no momento da mudança da composição do índice. No exato instante em que a nova composição do fundo é divulgada, as ações que saem sofrem desvalorização e as que entram se valorizam. Isso ocorre justamente porque é de conhecimento geral que alguns desses grandes fundos baseados no índice têm a obrigação contratual de vender e comprar esses papéis causando, em alguns casos, prejuízos consideráveis a eles (PETAJISTO, 2011).

Dessa forma, surge a ideia de seguir aproximadamente o índice, comprando um número K relativamente pequeno de ações ($K \ll N$), mas que ainda sejam capazes de representar bem o índice. A programação inteira mista surge então como uma ferramenta para escolher quais devem ser as ações K compradas e em quais proporções. Na literatura especializada de pesquisa operacional, este problema é conhecido por *index tracking problem*.

Este trabalho tem por objetivo comparar as principais formulações de programação inteira desenvolvidas para elaboração de fundos de índices. Serão utilizados como dados de entrada informações dos mercados de ações de Nova Iorque, Londres, Frankfurt e Hong Kong e São Paulo. Para cada intervalo de tempo e índice perseguido, foram formados portfólios com $K = [1, 2, 4, 6, 8, 10]$. Diferentemente dos trabalhos de Gonçalves e Uchoa (2013) e Gonçalves e Uchoa (2014), o presente trabalho emprega uma base de dados recente, com dados de 2008 a 2014. A base de dados compreende os valores das ações e dos índices ao longo do período acima. Além disso, o trabalho emprega testes de hipótese, de forma a validar ou refutar as comparações realizadas em trabalhos anteriores. Adicionalmente, uma das formulações será apresentada e testada incluindo um parâmetro adicional, não contemplado nos trabalhos anteriores.

O artigo é composto por esta introdução, uma revisão da literatura, que inclui a apresentação das formulações utilizadas, a comparação de desempenho das formulações apresentadas, bem como as conclusões e recomendações para novos estudos.

2. Revisão da Literatura

Conforme exposto por Gonçalves et al. (2013) as formulações desenvolvidas e apresentadas na literatura de programação inteira diferem em vários aspectos, destacando-se: a medida utilizada para mensurar o erro de rastreamento (diferença entre o desempenho do índice e o desempenho do fundo de índice), a inclusão ou não de restrições quanto aos custos de transação, a presença de limites (máximo e mínimo) de ações na carteira, a utilização de medidas de correlação entre o desempenho de uma ação e o desempenho do índice.

A seguir, serão apresentadas três formulações de programação inteira, elaboradas para formação de fundos de índice. Tais modelos representam o estado da arte em formulações de programação inteira para o problema de seguir um dado índice. De forma a melhorar a exposição, será padronizada a notação empregada em seus coeficientes, parâmetros e variáveis.

Parâmetros:

N : Número total de ações (empresas) passíveis de serem incluídas no portfólio.

K : Número máximo de ações diferentes que o portfólio deve possuir.

T : Número de períodos de observação do índice. Será assumido que foram observados os valores históricos do índice e das ações ao longo dos períodos $[1, 2, \dots, T]$, e que o tempo T representa o momento onde o portfólio será construído. O conjunto dos períodos de observação é chamado de *in-sample*. Em contraste, o conjunto dos períodos posteriores a T , onde o comportamento do portfólio será avaliado, é o *out-of-sample*.

V_{it} : Representa o valor de uma unidade da ação i ($i = 1, \dots, N$), no tempo t ($t = 1, \dots, T$).

I_t : Representa o valor do índice a ser seguido no tempo t ($t = 1, \dots, T$).

Variáveis de decisão:

w_i : Percentual do fundo que será investido na ação i .

z_i : 1, se a ação i ($i = 1, \dots, N$) foi escolhida para compor o fundo de índice. 0 caso contrário.

2.1 Formulação 1

A formulação a seguir foi introduzida por Beasley, Meade e Chang (2003). De forma a organizar os resultados mais a frente, este modelo será denominado por Formulação 1. Para essa formulação definem-se ainda os seguintes parâmetros e variável, adicionalmente ao já apresentados:

R_t : Parâmetro que representa o retorno observado para o índice num período t ($t = 2, \dots, T$). Será empregada a expressão $R_t = \log_e \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right)$, $t = 1, \dots, T$.

R_{it} : Parâmetro que representa o retorno observado da ação i no período t ($t = 2, \dots, T$). Será empregada a expressão $R_{it} = \log_e \left(\frac{V_{it}}{V_{it-1}} \right)$, $t = 1, \dots, T$.

r_t : variável de decisão, que representa o retorno do fundo no período t ($t = 2, \dots, T$).

As restrições da formulação 1 são:

$$\sum_{i=1}^N z_i \leq K \quad (1)$$

$$w_i \leq z_i, \quad \forall \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

$$r_t = \sum_{i=1}^N R_{it} w_i \quad \forall \quad t = 2, \dots, T \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (4)$$

$$w_i \geq 0, \quad \forall \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

$$z_i \in [0,1], \quad \forall \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

A restrição (1) assegura que no máximo K ações comporão o portfólio. A restrição (2) faz com que, se a ação i não estiver no portfólio, então a variável w_i (participação da ação i no fundo) seja zero. A restrição (3) declara que o retorno do portfólio, para cada tempo t , é a soma dos retornos das ações i selecionadas, multiplicado pelo peso de cada ação no portfólio. A restrição (4) obriga que o portfólio seja totalmente preenchido pelas ações i selecionadas. Os autores mensuram o erro de rastreamento utilizando a Equação (7):

$$E = \left[\left[\sum_{t=1}^T |r_t - R_t|^\alpha \right]^{1/\alpha} \right] / T \quad (7)$$

Na expressão acima, α define a métrica que será usada para medir as diferenças entre r_t e R_t . Neste trabalho, será utilizada a métrica linear, ou seja $\alpha = 1$. Para linearizar a função módulo, serão introduzidas novas variáveis E_t que correspondem ao valor absoluto da diferença entre o retorno do portfólio e o retorno do índice no período t . A formulação completa fica então:

$$\text{Minimizar } \sum_{t=2}^T E_t \quad (8)$$

Sujeito a: (1), (2), (3), (4), (5), (6) e:

$$E_t \geq R_t - r_t \quad (9)$$

$$E_t \geq r_t - R_t \quad (10)$$

2.2 Formulação 2

Uma segunda maneira de formular o problema do fundo de índice foi proposta por Cornuejols e Tüntüçü (2007). Os autores apresentam um modelo de programação inteira que agrupa as ações em função de suas similaridades (o coeficiente de correlação é utilizado para realizar o agrupamento). Definem-se os seguintes parâmetros e variáveis do modelo, em adição aos já apresentados anteriormente:

ρ_{ji} : Parâmetro que representa a similaridade entre a ação j e a ação i

s_{ji} : Variável de decisão que indica qual ação i representará a ação j no fundo de índice.

P_i : Peso da ação i no índice, no instante T .

$$\text{Maximizar } \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (P_i \rho_{ji}) s_{ji} \quad (11)$$

Sujeito a: (1) e:

$$\sum_{i=1}^N s_{ji} = 1 \quad \forall \quad j = 1, \dots, N \quad (12)$$

$$s_{ji} \leq z_i \quad \forall \quad j = 1, \dots, N; \quad i = 1, \dots, N \quad (13)$$

$$s_{ji} \in [0,1], \quad \forall \quad j = 1, \dots, N; \quad i = 1, \dots, N \quad (14)$$

A função objetivo (11) busca incluir no fundo um grupo de ações que tenham comportamento similar às ações não escolhidas. Os autores, na publicação inicial, apresentaram a função objetivo incluindo o peso (conforme a equação 11), bem como suprimindo tal parâmetro (conforme equação 15).

$$\text{Maximizar } \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \rho_{ji} S_{ji} \quad (15)$$

Os experimentos apresentados na seção seguinte demonstrarão que a função objetivo (11) produz portfólios claramente superiores aos obtidos com a função (15). Para esta formulação, serão apresentados os resultados tanto utilizando a função objetivo (11) quanto a função objetivo (15).

As restrições (12-14) definem um problema clássico da p-mediana. Esse problema, apesar de ser NP-difícil, costuma ser muito bem resolvido para instâncias com valores N chegando a alguns milhares (AVELLA et al. 2007). De fato, mesmo um resolvidor de programação inteira padrão já consegue resolver de forma exata instâncias com várias centenas de ações. A restrição (12) assegura que uma e somente uma ação i representará a ação j no fundo de índice. A restrição (13) assegura que a ação i só representa uma ação j se a ação i foi selecionada para compor o fundo.

Após o modelo ser aplicado e um grupo de K ações selecionado, o peso (participação) de cada uma das K ações no fundo de índice é calculado da seguinte forma:

$$w_i = \sum_{j=1}^N H_j S_{ji} \quad (16)$$

Dessa forma, w_i representa o valor total das ações representadas pela ação i . O percentual que deve ser investido na ação i é, assim, proporcional ao peso de i . H_j por sua vez, corresponde ao percentual da ação j na composição do índice.

2.3 Formulação 3

A última formulação utilizada foi publicada originalmente por Guastaroba e Speranza (2012). Utiliza como premissa seguir o índice, minimizando os desvios entre o valor do portfólio e o valor do índice a ser acompanhado, período a período. As variáveis v_t representam o valor do portfólio no período t . As cotações das ações e o valor do índice foram normalizados para terem valor unitário no período T . A variável d_t é a diferença entre o valor do portfólio e o valor do índice perseguido (já linearizado).

$$\text{Minimizar } \sum_{t=1}^T d_t \quad (17)$$

Sujeito a: (1), (2), (4), (5), (6) e:

$$d_t \geq \frac{I_t}{I_T} - v_t \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (18)$$

$$d_t \geq v_t - \frac{I_t}{I_T} \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (19)$$

$$v_t = \sum_{i=1}^N \frac{V_{it}}{V_{iT}} w_i \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (20)$$

As restrições (18) e (19) asseguram que a variável d_t represente o valor absoluto da diferença entre o valor do portfólio e o valor do índice, para cada tempo t . O somatório destes desvios d_t é minimizado na função objetivo (17). A restrição (20) faz com que o valor do portfólio no período t seja igual ao valor de todas as ações i que integram o portfólio, multiplicadas pelos seus respectivos pesos w_i .

3. Comparação do desempenho das formulações

As três formulações apresentadas foram aplicadas a cinco diferentes índices (FTSE 100, SP 100, HDAX, Hang Seng e Ibovespa). Os dados de entrada são os valores dos índices, e os valores de todas as ações que integraram estes índices ao longo do período. Foi empregada uma série histórica de 352 semanas, compreendida entre 2008 e 2014. As cotações e os valores dos índices foram agrupados em vinte e três intervalos de tempo. Em doze deles, utilizou-se um período de análise (formação do portfólio, ou período *in-sample*) de seis meses. A avaliação de desempenho foi feita nos doze meses seguintes (comparação da rentabilidade do fundo com o desempenho do índice ou período *out-of-sample*). Nos demais onze intervalos de tempo considerados, tanto os períodos *in-sample* quanto *out-of-sample* foram de doze meses. Para cada um dos dezessete períodos e para cada formulação considerada, utilizou-se $K = [1, 2, 4, 6, 8, 10]$. Foi utilizado o CPLEX 12.5.1, num computador com processador Core i7 com 16 GB de memória RAM. O tempo limite, para execução de cada um dos 3.700 testes, fornecido como parâmetro ao CPLEX, foi de 600 segundos. Notou-se que, nos casos onde K era elevado ($K=8$ e $K=10$), não foi obtida a solução ótima no tempo estipulado. Utilizou-se a melhor solução encontrada até aquele instante.

Como forma de avaliar a eficácia da utilização das formulações de programação inteira, foram utilizados adicionalmente dois modelos de hipótese nula. No primeiro, integrarão o portfólio as K ações com maior peso no índice perseguido (nas proporções de cada ação no tempo T). No segundo, o portfólio contém K ações escolhidas aleatoriamente, em iguais proporções. Para cada geração aleatória, foram executadas 100 iterações, tomando-se a média dos resultados como o resultado final.

A métrica utilizada, para a avaliação de desempenho das formulações ao rastrear os índices, está representada pela equação (21).

$$\sum_{t=T+1}^{T+52} (\text{máximo}\{v_t, I_t\} / \text{mínimo}\{v_t, I_t\}) / 52 \times 100\% \quad (21)$$

Esta métrica é mais intuitiva do que a métrica empregada em trabalhos anteriores de Gonçalves e Uchoa (2013) e (2014). Naqueles trabalhos, empregou-se a métrica (22), exposta abaixo:

$$\sum_{t=T+1}^{T+52} \left| \ln \left(\frac{I_t}{v_t} \right) \right| / 52 \quad (22)$$

Os resultados foram agrupados entre os períodos diferentes do *in-sample*. Quanto mais próximo de zero, maior o sucesso do portfólio em seguir o índice nos 12 meses subsequentes. Em destaque (negrito), os modelos com melhor desempenho em cada mercado considerado. A formulação Cornuejols e Tuntucu (SP) representa a formulação 2 sem incluir as participações na função objetivo, conforme equação (15).

<i>In-Sample</i>	Nº K de ações	1	2	4	6	8	10	Média Geral
12 meses	BEASLEY, MEADE E CHANG	9,60	7,76	5,96	6,21	4,44	3,71	6,28
	CORNUEJOLS E TUNTUCU	10,01	8,38	6,27	6,59	4,86	4,06	6,70
	CORNUEJOLS E TUNTUCU (SP)	11,58	9,84	7,76	6,01	5,73	5,80	7,79
	GUSTAROBIA E SPERANZA	8,07	6,38	4,63	4,61	4,07	5,11	5,48
	K REPRESENTATIVAS	7,06	6,02	4,17	4,02	3,54	3,61	4,74
	COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	17,06	14,59	10,87	10,47	9,95	9,32	12,04
6 meses	BEASLEY, MEADE E CHANG	11,82	7,74	7,48	6,18	5,61	4,74	7,26
	CORNUEJOLS E TUNTUCU	12,35	10,86	5,65	5,02	4,76	4,01	7,11

<i>In-Sample</i>	Nº K de ações	1	2	4	6	8	10	Média Geral
	CORNUEJOLS E TUNTUCU (SP)	17,30	10,62	9,25	8,23	7,83	7,95	10,20
	GUSTAROBÁ E SPERANZA	12,87	9,17	6,50	5,57	6,38	6,81	7,88
	K REPRESENTATIVAS	7,06	6,02	4,17	4,02	3,54	3,61	4,74
	COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	18,06	13,24	11,50	10,53	9,93	9,56	12,14

Tabela 1: resultados obtidos ao seguir o índice HDAX 100

<i>In-Sample</i>	Nº K de ações	1	2	4	6	8	10	Média Geral
12 meses	BEASLEY, MEADE E CHANG	9,48	5,90	2,94	2,71	2,62	2,63	4,38
	CORNUEJOLS E TUNTUCU	9,35	8,32	3,65	2,82	2,35	2,21	4,79
	CORNUEJOLS E TUNTUCU (SP)	9,42	8,46	4,13	4,03	3,72	3,64	5,57
	GUSTAROBÁ E SPERANZA	11,57	8,64	5,64	3,45	2,76	1,95	5,67
	K REPRESENTATIVAS	8,45	5,40	3,58	3,53	3,32	2,65	4,49
	COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	14,05	11,12	8,50	7,54	7,08	6,69	9,16
6 meses	BEASLEY, MEADE E CHANG	9,19	6,95	4,03	3,63	2,81	2,87	4,91
	CORNUEJOLS E TUNTUCU	7,51	4,91	3,09	2,96	2,60	2,16	3,87
	CORNUEJOLS E TUNTUCU (SP)	8,91	6,88	6,15	5,27	3,71	4,26	5,86
	GUSTAROBÁ E SPERANZA	10,04	7,36	3,94	4,24	2,94	2,90	5,24
	K REPRESENTATIVAS	8,45	5,40	3,58	3,53	3,32	2,53	4,47
	COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	14,93	11,33	8,41	7,61	6,96	6,65	9,31

Tabela 2: resultados obtidos ao seguir o índice FTSE 100

<i>In-Sample</i>	Nº K de ações	1	2	4	6	8	10	Média Geral
12 meses	BEASLEY, MEADE E CHANG	7,80	5,16	2,15	2,45	2,78	2,11	3,74
	CORNUEJOLS E TUNTUCU	9,23	5,47	4,28	2,39	2,39	1,90	4,28
	CORNUEJOLS E TUNTUCU (SP)	10,17	6,39	4,29	3,68	2,97	2,76	5,04
	GUSTAROBÁ E SPERANZA	9,58	5,54	3,40	3,24	2,71	2,85	4,55
	K REPRESENTATIVAS	25,16	16,04	8,50	6,34	4,84	3,83	10,79
	COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	10,88	7,67	5,58	4,63	4,16	3,96	6,15
6 meses	BEASLEY, MEADE E CHANG	8,72	5,71	4,16	4,16	3,15	3,36	4,88
	CORNUEJOLS E TUNTUCU	8,80	4,47	4,07	3,02	2,56	2,31	4,20
	CORNUEJOLS E TUNTUCU (SP)	9,40	6,77	5,91	3,78	2,83	2,76	5,24
	GUSTAROBÁ E SPERANZA	6,47	6,26	4,10	3,53	3,53	2,62	4,42
	K REPRESENTATIVAS	25,16	16,04	8,50	6,34	4,84	3,83	10,79
	COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	11,13	7,74	5,57	4,78	4,12	3,92	6,21

Tabela 3: resultados obtidos ao seguir o índice SP 100

<i>In-Sample</i>	Nº K de ações	1	2	4	6	8	10	Média Geral
12 meses	BEASLEY, MEADE E CHANG	7,30	4,46	2,96	2,70	2,79	2,16	3,73
	CORNUEJOLS E TUNTUCU	7,32	4,81	3,48	2,82	2,46	2,61	3,92
	CORNUEJOLS E TUNTUCU (SP)	8,61	6,27	4,77	4,22	3,85	3,38	5,18
	GUSTAROBA E SPERANZA	6,26	4,11	4,29	2,71	3,17	2,08	3,77
	K REPRESENTATIVAS	7,38	10,75	6,03	4,30	3,70	3,52	5,95
	COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	12,75	9,94	7,18	6,22	5,56	5,14	7,80
6 meses	BEASLEY, MEADE E CHANG	6,94	5,69	3,65	3,86	3,30	2,21	4,27
	CORNUEJOLS E TUNTUCU	7,95	3,81	2,93	2,69	2,27	2,57	3,70
	CORNUEJOLS E TUNTUCU (SP)	6,48	6,08	4,37	3,63	3,13	2,97	4,44
	GUSTAROBA E SPERANZA	8,20	7,16	4,62	3,73	2,98	2,55	4,87
	K REPRESENTATIVAS	7,38	10,75	6,15	4,41	3,72	3,57	6,00
	COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	13,27	10,25	7,24	6,29	5,73	5,30	8,01

Tabela 4: resultados obtidos ao seguir o índice Hang Seng

<i>In-Sample</i>	Nº K de ações	1	2	4	6	8	10	Média Geral
12 meses	BEASLEY, MEADE E CHANG	12,28	9,07	7,99	7,39	8,25	6,61	8,60
	CORNUEJOLS E TUNTUCU	10,45	10,3	7,64	7,57	6,99	7,05	8,34
	CORNUEJOLS E TUNTUCU (SP)	9,92	10,6	10,19	10,09	9,59	9,34	9,96
	GUSTAROBA E SPERANZA	13,17	10,8	8,28	9,42	8,32	8,79	9,80
	K REPRESENTATIVAS	10,97	8,91	7,13	7,01	6,94	7,28	8,04
	COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	19,44	15,0	11,47	10,79	9,90	9,47	12,69
6 meses	BEASLEY, MEADE E CHANG	15,44	9,59	7,74	10,49	10,17	9,84	10,55
	CORNUEJOLS E TUNTUCU	9,01	9,44	6,46	7,80	7,05	6,40	7,69
	CORNUEJOLS E TUNTUCU (SP)	12,91	8,63	9,61	8,62	7,88	7,28	9,15
	GUSTAROBA E SPERANZA	15,99	11,3	11,60	9,30	8,42	10,06	11,11
	K REPRESENTATIVAS	10,97	8,91	7,13	7,02	6,84	7,21	8,01
	COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	19,28	15,2	11,56	10,88	10,16	9,77	12,82

Tabela 5: resultados obtidos ao seguir o índice Bovespa

Nº K de ações	1	2	4	6	8	10	Média Geral
BEASLEY, MEADE E CHANG	9,86	6,80	4,91	4,98	4,59	4,02	5,86
CORNUEJOLS E TUNTUCU	9,20	7,08	4,75	4,37	3,83	3,53	5,46
CORNUEJOLS E TUNTUCU (SP)	10,47	8,06	6,64	5,76	5,12	5,02	6,84
GUSTAROBA E SPERANZA	10,22	7,68	5,70	4,98	4,53	4,57	6,28
K REPRESENTATIVAS	11,80	9,42	5,89	5,05	4,46	4,16	6,80
COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	15,08	11,62	8,79	7,97	7,36	6,98	9,63

Tabela 6: resultados consolidados para diferentes intervalos de amostra, ao seguir todos os índices deste trabalho.

Os resultados obtidos demonstram que:

- As formulações 1, 2 e 3 foram superiores, em todos os mercados e instâncias, quando comparados aos resultados de uma composição aleatória.
- No Modelo 2, proposto por Cornuejols e Tüntüciü, a inclusão na função objetivo do parâmetro com a participação (peso) da ação no índice melhora bastante o seu desempenho. O Modelo 2 sem usar a participação na função objetivo não é competitivo com os Modelos 1 e 3 e perde para o modelo de hipótese nula da K ações mais representativas.
- Os resultados obtidos com *in-sample* englobando 12 meses foram superiores, quando comparados aos resultados gerados com *in-sample* de 6 meses.
- Os resultados obtidos nas instâncias com $K \geq 8$ (principalmente, nas formulações 1 e 3) foram afetados pelo limite de tempo imposto ao CPLEX (600 segundos). Nos casos com *in-sample* de 12 meses, os impactos podem ter sido ainda maiores. Ou seja, é possível que com técnicas heurísticas desenvolvidas especificamente para esses modelos seja possível obter melhores resultados. Por outro lado, o Modelo 2 não apresentou problemas em sua resolução computacional. Todas as instâncias, mesmo com $K = 10$, foram resolvidas de forma ótima. Isso sem dúvida é uma vantagem desse modelo. Utilizando-se técnicas já conhecidas para o problema da p-mediana talvez seja possível usar esse modelo para gerar portfólios para rastreamento de índices com grande número de ações, tal como o S&P 500.

De forma a verificar a significância estatística das comparações de desempenho das formulações, foi empregado o Teste T de *Student*, ou simplesmente Teste T, de forma a testar as quatro hipóteses a seguir:

- Os portfólios gerados pelos modelos de programação inteira, utilizando período *in-sample* de 12 meses são superiores aos resultados obtidos pelos mesmos modelos, quando utilizado um período *in-sample* de 6 meses:
- O modelo 2, incluindo na função objetivo a informação das participações das ações no índice, obtêm melhor desempenho que o mesmo modelo, quando não utilizada a informação das participações.
- Os modelos de programação inteira geram melhores portfólios para rastreamento dos índices, quando comparados aos portfólios gerados pelos modelos de hipótese nula.

O Teste T é um teste hipóteses aplicável para inferências baseadas em duas amostras, em que pelo menos um tamanho de amostra é pequeno e as variâncias da população possuem valores desconhecidos (DEVORE, p. 2006). No nosso estudo, as duas amostras possuem exatamente o mesmo tamanho e são pareadas, correspondendo ao desempenho de dois modelos na mesma instância. Serão realizados Testes T bicaudais para testar se diferença entre a média das duas amostras é estatisticamente significativa ou se pode ser explicada pelo acaso, refutando ou endossando as hipóteses sobre a superioridade de um modelo sobre outro.

A tabela 7 expõe os resultados do Teste T ao avaliar os resultados com *in-sample* de 12 meses versus *in-sample* de 6 meses.

Modelo	Nº de Comparações	Média (12 meses)	Média (6 meses)	Resultados 12 meses superiores aos resultados 6 meses	Resultados 12 meses igual aos resultados 6 meses	Resultados 12 meses inferiores aos resultados 6 meses	Teste T
BEASLEY	352	4,869	5,603	298	38	186	1,07367E-05
CORNUEJOLS	352	5,388	5,147	237	20	265	0,202468143
CORNUEJOLS (SP)	352	6,552	6,319	242	15	265	0,365093589
GUASTAROBA	352	5,254	5,835	287	19	216	0,004415241

Tabela 7 – Comparação dos resultados entre os períodos *in-sample* de 6 ou 12 meses.

Com base no resultado do Teste T, observa-se que tanto o modelo 1, quanto o modelo 2 apresentam desempenho significativamente superior ao utilizar um período de observação de 12 meses. Em ambos os modelos, a média dos resultados obtidos com *in-sample* de 12 meses é inferior, e o Teste T transmite (com valor inferior à 0,05) que tal diferença é consistente. Quanto ao modelo 3, não é possível concluir que os resultados com um período de observação de 12 meses são superiores.

A Tabela 8 apresenta o resultado do Teste T, ao comparar os resultados do modelo 2 incluindo a participação das ações na função objetivo, versus os resultados sem a referida participação.

Modelo	Nº de Comparações	Média (12 meses)	Resultados onde Cornuejols (com participação) foi superior	Resultados idênticos	Resultados onde Cornuejols (sem participação) foi superior	Teste T
CORNUEJOLS	352	5,3877	301	45	176	3,6165117E-10
CORNUEJOLS (SP)	352	6,5518				

Tabela 8 – Comparação dos resultados obtido com o modelo 2, com variações na função objetivo

A média dos resultados obtidos pelo Modelo 2, incluindo as participações das ações na função objetivo é 17% inferior a média dos resultados sem incluir a participação (Cornuejols SP). O resultado do Teste T aponta, com alto nível de significância, que os portfólios obtidos com a função objetivo incluindo informações de participação das ações no índice são superiores, quando comparados àqueles gerados com a função objetivo não incluindo a participação.

A terceira hipótese a ser testada, segunda a qual os modelos de programação inteira, quando comparados aos modelos de hipótese nula, são capazes de gerar portfólios superiores para o rastreamento de índices, tem seus resultados apresentados na Tabela 9.

Modelo de PI considerado	Modelo de Hipótese Nula considerado	Nº de Comparações	Média obtida pelo modelo de PI	Média obtida pelo modelo de hipótese nula	Modelo de PI superior	Modelo de PI obteve o mesmo resultado do modelo de hipótese nula	Modelo de hipótese nula superior	Teste T
BEASLEY	K-REPRESENTATIVAS	352	4,8688	5,9497	300	10	212	2,02974E-05
BEASLEY	COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	352	4,8688	8,6889	457	0	65	7,49636E-64
CORNUEJOLS	K-REPRESENTATIVAS	352	5,3877	5,9497	279	1	242	0,03504463
CORNUEJOLS	COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	352	5,3877	8,6889	445	0	77	7,45483E-48
GUASTAROBA	K-REPRESENTATIVAS	352	5,2543	5,9497	293	1	228	0,007833249
GUASTAROBA	COMPOSIÇÃO ALEATÓRIA	352	5,2543	8,6889	442	0	80	1,84007E-50

Tabela 9 – Comparação dos resultados entre os períodos *in-sample* de 6 ou 12 meses.

O resultado do Teste T demonstra que todos os modelos de programação inteira foram superiores, quando comparados aos modelos de hipótese nula.

4. Considerações Finais

O presente trabalho avaliou e comparou as principais formulações de programação inteira, desenvolvidas para o problema do rastreamento do índice (*index tracking problem*). Para isto, utilizou informações dos principais mercados secundários de ações, dentre eles o Brasil. Os testes, realizados sobre uma base de dados recente (iniciada em 2008 e finalizada em 2014), reforçam os resultados já apresentados em trabalhos anteriores, onde foram empregados dados referentes à década de 1990 (disponíveis na *OR-Library*). A utilização do Teste T de *Student* valida (com grau de significância acima de 95% na maioria dos testes) que a utilização de um período *in-sample* de doze meses traz resultados superiores àqueles com período *in-sample* de seis meses. Os testes estatísticos endossam também que a formulação 2, proposta originalmente por Cornuejols e Tütüncü (2007) apresenta resultados superiores quando utiliza a informação de participação das ações na função objetivo, bem como o fato de que as formulações de programação inteira são superiores aos modelos de hipótese nula.

Referências

- Avella, P., Sassano, A. E., Vasil'ev, I.** (2007). Computational study of large-scale p-median problem. *Mathematical Programming*, v. 109, p. 89–114.
- Beasley, J. E., Meade, N., Chang T. J.** (2003), An evolutionary heuristic for the index tracking problem, *European Journal of Operational Research*, 148, 621–643.
- Bodie, Z., Marcus, A., Kane, A.** Investimentos, Bookman, Porto Alegre, 2010.
- Bogle, J. C.** Common Sense on Mutual Funds. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc (2010)
- Canakgoz, N. A. e Beasley, J. E.** (2008), Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation, *European Journal of Operational Research*, 196, 384-399.
- Cornuejols, G., Tütüncü, R.** Optimization Methods in Finance, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- Devore, J. L.** Probabilidade e Estatística: para Engenharia e Ciências, São Paulo, Pioneira Thomson Learning, 2006.
- Elton, E. E., Gruber, M. J., Brown, S. J., Goetzmann, W. N.** Moderna teoria de carteiras e análise de investimentos, Elsevier, Rio de Janeiro, 2012.
- Gonçalves, J. M. B., Uchoa, E.** (2013), Formulações de programação inteira para elaboração de fundos de índice: aplicações ao Ibovespa. XLV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional.
- Gonçalves, J. M. B., Uchoa, E.** (2014), Avaliação de Formulações de Programação Inteira para elaboração de fundos de índice. XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional.
- Gonçalves, J. M. B., Uchoa, E.** Avaliação de Formulações de Programação Inteira para o problema do rastreamento de índices. Tese de Doutorado, Niterói, Universidade Federal Fluminense, 2015.
- Graham, B.** O investidor inteligente, Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1973.
- Guastaroba, G. e Speranza, M. G.** (2012), Kernel Search: An application to the index tracking problem. *European Journal of Operational Research*, 217, 54–68.
- Konno, H., Yamazaki, H.** (1991), Mean absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market. *Management Science*, 37, 519–531.
- Ogryczak, W., Ruszczyński, A.** (1999), From stochastic dominance to mean-risk model: Semideviations as risk measures. *European Journal of Operational Research*, 116, 33–50.
- Petajisto, A.** (2011) The index premium and its hidden cost for index funds, *Journal of Empirical Finance*, 18, 271-288.
- Ross, S. A., Westerfield, R. W., Jaffe, J. F.** Administração Financeira, Atlas, São Paulo, 2010.
- Wolsey, L.** Integer Programming, New York, Wiley, 1998.