Uma proposta de risco de Bayes utilizado na análise de risco de ativos financeiros para decisores avessos a risco

Felipe Macedo de Morais Pinto
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE
Caixa Postal 7471, Recife - PE, 50.630-971.
felipe_mmp94@hotmail.com

Adiel Teixeira de Almeida Filho
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE
Caixa Postal 7471, Recife - PE, 50.630-971.
atalmeidafilho@yahoo.com.br

RESUMO

Este artigo apresenta uma modelagem de um problema clássico de decisão no mercado financeiro baseado na teoria moderna do portfólio de Markowitz através de uma abordagem bayesiana onde se deseja maximizar a utilidade esperada de um decisor avesso ao risco através da minimização do Risco de Bayes, utilizando dados financeiros para planejar investimentos futuros baseados em dados históricos. Em seguida apresenta-se um método analítico para calcular a função objetivo para o caso de função utilidade exponencial ilustrado através de uma aplicação numérica.

PALAVARAS CHAVE. Análise de Risco em Investimento, Risco de Bayes, Análise de Portfólio, Markowitz.

GF – Gestão Financeira

ABSTRACT

This study presents one modeling of the classical portfolio decision problem in the financial market based upon Markowitz's modern portfolio theory through Bayesian Decision Theory in order to maximize a risk-averse decision maker's expected utility by minimizing the Bayes Risk, utilizing financial data to plan future investments based on historical data. Then, an analytical method to calculate the objective function for exponential utility is developed and illustrated through a numerical application.

KEYWORDS. Investment Risk Analysis, Bayes Risk, Portfolio Analysis, Markowitz.

ADM – Multicriteria Decision Support

1. Introdução

Diversos estudos foram realizados sobre o processo de seleção de portfolios. O mais renomado e conhecido modelo de seleção de portfolios foi o desenvolvido por Markowitz (1952), que tinha como objetivo maximizar o retorno esperado e minimizar a variância do retorno.

Retrospectivas foram realizadas sobre os trabalhos derivados da teoria moderna de portfólio (Kolm et al, 2014; Rubinstein, 2002). Novamente, Markowitz (1991) disserta sobre a teoria moderna de portfólio, agregando a contribuição de dezenas de trabalhos nas quatro décadas transcorridas desde sua primeira publicação sobre o tema. Benati (2014) construiu um método de otimização de portfolios no uso da mediana em lugar da média. O problema de seleção de portfolios já foi abordado através de métodos de decisão multicritério (Abdelaziz et al., 2007; Ballestero et al., 2007; Ehrgott et al., 2004; Fliege & Werner, 2014; Prakash et al., 2003), *Simulated annealing* (Crama & Schyns 2003), algoritmos genéticos (Lin & Liu, 2007), lógica fuzzy (Liu & Zhang, 2015; Ramaswamy, 1998; Wang et al, 2008), *shrinkage estimators* (Behr et al, 2013; DeMiguel et al, 2013) *variance-based constraints* (Levy & Levy, 2014), Teoria da Matriz Aleatória (Sandoval et al, 2014) e métodos Bayesianos (Ando, 2009; Ferreira et al., 2009; Bade et al, 2009; Cover & Gluss, 1986; Deng et al., 2005; Frost & Savarino, 1986; Mao & Särndal, 1966; Young, 1998).

O modelo apresentado neste trabalho acrescenta como contribuição uma medida de risco que avalia os aspectos de retorno e variância na Teoria da Utilidade Esperada, incorporando estes aspectos para decisores avessos a risco com utilidade exponencial através da medida de Risco de Bayes para avaliação de ativos financeiros.

2. O modelo de decisão

Este artigo propõe um modelo para abordar o problema de seleção de portfólio baseado na teoria da decisão (Berger, 1985) para abordar problemas de escolha de portfólios de investimento. O modelo de decisão considerado neste artigo é constituído de 4 conjuntos de dados: Alternativas de Decisão, Estados da Natureza, Espaço de Bens e Observações. A partir destes conjuntos, é possível calcular as funções e distribuições que compõem a medida do Risco de Bayes de um determinado portfólio de investimento. A relação entre os conjuntos que interagem entre si para resultar nesta medida de Risco é descrita em Ferreira et al. (2009).

O Espaço de Bens deste problema é o lucro líquido percentual obtido sobre o investimento realizado. Seja r_t o retorno de uma ação no período t, e V_t o valor do ativo no período t, então a relação entre estas variáveis é dada pela equação (1) (Ferreira et al. 2009).

$$r_t = \frac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}} \qquad (1)$$

Seja l_t o lucro líquido percentual acumulado em t períodos. Então a relação entre l_t e r_t é dada pela equação (2).

$$l_t = \prod_{i=1}^{t}(1 + r_i) - 1 \qquad (2)$$

Dado que cada ativo possui um retorno diferente, o lucro líquido percentual acumulado é um vetor n-dimensional, onde n é o número de ativos, como apresentado na equação (3).

$$l_t = \{l_{t1}, l_{t2}, \dots, l_{tn}\} \quad (3)$$

Uma situação comum em um problema de formulação de portfólio é o investidor possuir uma quantia fixa, devendo decidir de que forma ele irá distribuir esse capital ao longo dos ativos, respeitando o limite de investimento. Neste artigo, é assumida a hipótese de que exatamente 100% do capital disponível é aplicado ou seja, não é facultado ao decisor o direito de optar por não aplicar uma fração ou totalidade da quantia que este possui para investir, restrição explicitada na equação (4), e o conjunto de ações será dado por um vetor A n-dimensional, onde n é o número de ativos, como apresentado na equação (5) (Berger, 1985; Ferreira et al. 2009).

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \quad (4)$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad (5)$$

Os estados da natureza são representados por um vetor com a taxa de retorno acumulada para cada ativo em que o decisor pode escolher durante os próximos t períodos, sendo por natureza um elemento de pura incerteza. Esta incerteza constitui a motivação para o desenvolvimento deste modelo de decisão.

O retorno acumulado de n ativos pode ser mais precisamente representado por um conjunto de n variáveis aleatórias contínuas, mas pela necessidade de uma amostra representativa para estimar a distribuição *a priori* e a função verossimilhança, é inviável representar na prática este conjunto através de uma distribuição de probabilidade multivariada. Portanto nestas circunstâncias é mais apropriado criar intervalos que agrupem quantidades representativas de ocorrências de estado da natureza graças à quantidade limitada de dados. Este espaço criado pode ser definido como um conjunto de variáveis aleatórias discretas, representado na equação (6) (Berger, 1985; Ferreira et al. 2009).

$$\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}\ ;\ \theta \in \mathbb{N}^n \quad (6)$$

O Conjunto de Observações X, é formado por um ou mais diferentes grupos de informações que são correlacionadas com os estados da natureza e podem ser avaliados antes da tomada da decisão e da revelação sobre qual forma a natureza assume junto à ação tomada (Berger, 1985; Ferreira et al. 2009). No modelo, estes conjuntos podem assumir a forma de variação nas taxas de juros, inflação, cotação do dólar, PIB e outros indicadores econômicos. Pelos mesmos motivos que o do conjunto de estados da natureza, estes conjuntos contínuos serão agrupados e classificados de acordo com em intervalos discretos finitos, como descrito na equação (7).

$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}\ ;\ X \in \mathbb{N}^m \quad (7)$$

A Função Utilidade serve como medida do valor que o decisor dá para determinado bem (no caso, o lucro percentual do portfólio). Esta função varia de pessoa para pessoa, assim como pode também se modificar para um mesmo decisor ao longo do tempo, e é também um indicador do comportamento em relação ao risco do decisor, permitindo o cálculo da aversão ao risco em qualquer altura do intervalo de bens que ela compreende (Berger, 1985). A Função Utilidade considerada neste modelo é uma função de utilidade exponencial (Von Neumann & Morgenstern, 1947), no formato da equação (8), com parâmetro γ, a fim de representar a utilidade do lucro líquido acumulado obtido pelo decisor:

$$U(p) = 1 - e^{-\gamma p} \tag{8}$$

A Função Consequência é um mecanismo de probabilidade com a função de estimar a probabilidade de se obter um *payoff* p dado que uma certa decisão foi tomada e um certo estado da natureza ocorreu (Berger, 1985). Neste modelo, ela é definida como o lucro percentual oferecido pelo portfolio, calculado através da soma dos ativos que compõem o portfólio ponderada pelo percentual de investimento em cada um, como descrito na equação (9).

$$P(p|\theta, a) = \iint_{\vec{a},\vec{p}} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot P(p_i|\theta) \ \forall\ (\vec{a}, \vec{p})\ onde\ p = \vec{a} \cdot \vec{p} \tag{9}$$

É assumido neste modelo a hipótese de que para todo ativo i a distribuição $P(p_i|\theta)$ pode ser modelada por uma normal, uma hipótese bastante razoável ao submeter os dados da natureza do problema a uma análise estatística.

A Distribuição *a priori* $\pi(\theta)$ é um mecanismo de probabilidade que estima a chance de ocorrência de cada estado da natureza, sendo geralmente obtida através de dados históricos ou do conhecimento de especialistas (Berger, 1985; Ferreira et al. 2009). A Função Verossimilhança $P(x|\theta)$ estabelece uma correlação entre os estados da natureza e as observações, permitindo a estimação de probabilidades mais precisas, servindo assim como um canal de comunicação entre a natureza e as observações (Berger, 1985; Ferreira et al. 2009). Caso tanto as observações quanto os estados da natureza sejam discretos, seja m o número de observações e n o número de estados da natureza, a Função Verossimilhança pode ser representada numa matriz de tamanho $(m\ x\ n)$.

A distribuição a *posteriori* $\pi(\theta|x)$ representa uma probabilidade condicional: a probabilidade da ocorrência de um estado da natureza θ uma vez que já se sabe que ocorreu a observação x (Berger, 1985; Ferreira et al. 2009). Ela pode ser obtida a partir da combinação da Função Verossimilhança com a distribuição a *priori*, segundo a equação (10).

$$\pi(\theta|x) = \frac{\pi(x|\theta) \cdot \pi(\theta)}{\sum_{i=0}^{k} \pi(x|\theta_i) \cdot \pi(\theta_i)} \tag{10}$$

A Função Perda $L(\theta, a)$, apresentada na equação (11), representa o simétrico da utilidade esperada dada a ocorrência de um estado da natureza θ. Desta forma, a partir da conversão da Função Consequência por ela, perde-se informações detalhadas sobre a natureza probabilística do retorno do portfólio (Berger, 1985; Ferreira et al. 2009). Contudo, a Função Perda integra todo o domínio deste retorno ponderado pela função utilidade do decisor, para obter uma medida unificada do valor do portfólio para o investidor, que não deve ser confundido com o valor financeiro do portfólio.

$$L(\theta, a) = -\int_p U(p) \cdot P(p|\theta, a) dp \tag{11}$$

O Risco de Bayes $r_a(x)$ de uma decisão é uma medida que mede a perda esperada de uma decisão a mediante a ocorrência de uma observação x em que cada estado da natureza θ ocorre com probabilidade $\pi(\theta|x)$ (Berger, 1985; Ferreira et al. 2009). Desta forma, a regra de decisão adotada consiste em escolher a alternativa que minimize o Risco de Bayes, ou seja, o problema da escolha de uma decisão ótima uma vez que ocorreu a observação x pode ser escrito no formato de um problema em que se deve minimizar (12) com as restrições da equação (13) e da inequação (14):

$$\min_{a} \sum_{\theta} L(\theta,a)\cdot\pi(\theta|x) \tag{12}$$

S/A:

$$\sum a_i = 1 \tag{13}$$

$$a_i \geq 0 \ \forall\ a \tag{14}$$

3.Propriedades da Função Perda

A Função Perda $L(\theta,a)$, que representa a perda de uma decisão feita dada a ocorrência de um determinado estado da natureza é medida como o negativo do valor esperado da função utilidade:

$$L(\theta,a) = -\int_{p} U(p)\cdot P(p|\theta,a)dp \tag{15}$$

Com a hipótese de que $P(p|\theta,a)$ segue uma distribuição Normal com média μ e desvio padrão σ, a princípio, esta integral não aparenta ser calculável algebricamente, mas isto pode ser realizado. As equações (16) até (28) demonstram isso. Substituindo U(p) na integral, tem-se (16):

$$L(\theta,a) = -\int_{-\infty}^{\infty} P(p|\theta,a)dp\ +\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-\gamma p})\cdot P(p|\theta,a)dp \tag{16}$$

$$L(\theta,a) = -1\ +\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-\gamma p})\cdot pdfN(\mu,\sigma)dp \tag{17}$$

Onde, se $a = \{a_{1,}a_{2,}a_3,\dots,a_n\}$ então:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot(R_{ti\theta}-1) \tag{18}$$

E ainda,

$$\sigma = \sqrt{\sum_i\sum_j a_i\, a_j\sigma_{i\theta}\sigma_{j\theta}\rho_{ij\theta}} \tag{19}$$

Fazendo $v = -\gamma p$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-\gamma p})\cdot pdfN(\mu,\sigma)dp = \int_{-\infty}^{\infty}(e^{v})\cdot pdfN(-\gamma\mu,\gamma\sigma)dv \tag{20}$$

Por Séries de Taylor, tem-se que $e^v = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{n!}$, logo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-(p-1)\gamma})\cdot pdfN(\mu,\sigma)dp = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} v^n\cdot pdfN(-\gamma\mu,\gamma\sigma)dv \tag{21}$$

Note que a integral $\int_{-\infty}^{\infty} v^n\cdot pdfN(-\gamma\mu,\gamma\sigma)dv$ equivale ao n-ésimo momento desta distribuição normal, que também pode ser calculado da forma:

$$E\{X^n\} = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2j} (2j-1)!!\, \sigma^{2j} \mu^{n-2j} \tag{22}$$

$$*k!! = k \times (k-2)!! \tag{23}$$

$$*(-1)!! = 1 \tag{24}$$

$$\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2j} (2j-1)!!\, (\gamma\sigma)^{2j} (-\gamma\mu)^{n-2j} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} (-\gamma)^n \binom{n}{2j} (2j-1)!!\, \sigma^{2j} \mu^{n-2j} \;\; n\, ímpar \\ \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} (-\gamma)^n \binom{n}{2j} (2j-1)!!\, \sigma^{2j} \mu^{n-2j} \;\; n\, par \end{cases} \tag{25}$$

Portanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-(p-1)\gamma}) \cdot pdfN(\mu,\sigma)dp = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)^n}{n!} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2j} (2j-1)!!\, \sigma^{2j} \mu^{n-2j} \tag{26}$$

$$L(\theta, a) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)^n}{n!} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2j} (2j-1)!!\, \sigma^{2j} \mu^{n-2j} \tag{27}$$

$$L(\theta, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\gamma)^n}{n!} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2j} (2j-1)!!\, \sigma^{2j} \mu^{n-2j} \tag{28}$$

Esta sequência é infinita, porém, ela é convergente, e converge rapidamente para os valores usuais de γ. A demonstração desta propriedade pode ser encontrada no apêndice. Desta forma, a partir de testes numéricos, observa-se que a convergência numérica se dá entre o sexto e o oitavo termo permitindo uma aproximação de alta precisão, assim, é obtido o valor de $L(\theta, a)$. Em função da restrição de páginas para este relatório a prova da convergência foi omitida, e estará disponível em trabalhos futuros a serem submetidos.

A Função Objetivo (o Risco de Bayes da ação) em função de $(a, , x, \mu, \sigma, \gamma)$ que deve ser minimizada para encontrar a ação a que maximiza a utilidade esperada, otimizando o portfólio para o decisor, é a apresentada na equação (29). As duas restrições que limitam o domínio das soluções viáveis são a equação (30) e a inequação (31). A solução deste problema é a apontada como ótima pela regra de decisão do Risco de Bayes.

$$\underset{a}{Min}\, r_x(a) = \sum_{\theta} \left\{ P(\theta|x) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-\gamma)^n}{n!} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2j} (2j-1)!!\, \sigma_\theta^{2j} \mu_\theta^{n-2j} \right] \right\} \tag{29}$$

s.a: $$\sum a_i = 1 \tag{30}$$

$$a_i \geq 0 \;\forall\; a \tag{31}$$

4. Resultados da Aplicação Numérica

Diante da restrição de páginas do artigo do congresso, serão discutidos apenas parte do desenvolvimento e os resultados de uma aplicação numérica considerando dados obtidos do período de março de 2005 até março de 2015 (INDEXMUNDI, 2015) na Bolsa de Valores de Londres, sobre o preço mensal de três commodities: ouro, chumbo e estanho, onde o problema de decisão é, para um investidor que deseje atuar no mercado futuro considerando estes ativos e o percentual do seu capital que deve investir em cada um. O conjunto de ações de um problema de seleção de portfólio é descrito idealmente através de um 2-simplex. O conjunto de Observações escolhido é um conjunto discreto, função de um índice do preço do petróleo e da inflação dos Estados Unidos e Reino Unido no período.

A função utilidade deste estudo de caso, dado que o modelo assume uma função utilidade exponencial em função do lucro líquido acumulado no intervalo do espaço de bens, é definida somente pelo parâmetro γ, o grau de aversão ao risco do decisor. Assumindo um investidor que possua neste intervalo uma aversão ao risco constante $\gamma = 0{,}7$ então sua função utilidade é dada pela equação (3).

4.1 Função Consequência

Baseada na hipótese da normalidade das distribuições dos lucros líquidos acumulados de cada ativo para cada estado da natureza para a estimação da função utilidade, foram estimados os valores da média e do desvio-padrão para cada ativo em todos os cenários. Estes parâmetros são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros da função consequência em função do ativo e do estado da natureza

	μ_{ouro}	σ_{ouro}	μ_{chumbo}	σ_{chumbo}	μ_{estanho}	σ_{estanho}
θ_0	-0,10037	0,058612	-0,19075	0,157398	-0,19754	0,141842
θ_1	-0,0699	0,058166	-0,08699	0,111348	0,045217	0,052052
θ_2	-0,05415	0,036101	0,031626	0,023918	-0,05221	0,024047
θ_3	-0,05131	0,040942	0,19092	0,189823	0,147983	0,10289
θ_4	0,123871	0,073164	-0,1802	0,120482	-0,25216	0,113896
θ_5	0,16432	0,105741	-0,16085	0,10195	0,22007	0,122302
θ_6	0,13301	0,075844	0,104388	0,141524	-0,09195	0,084701
θ_7	0,129517	0,083548	0,356156	0,258393	0,26329	0,158315

4.2 Função Verossimilhança

A função verossimilhança $P(x|\theta)$ foi obtida a partir da frequência relativa da associação do estado da natureza com a observação ocorridos em cada instante do intervalo observado, resultando nos dados da Tabela 2, considerando 114 instantes distintos ao longo dos dez anos.

Tabela 2: Função verossimilhança, obtida a partir da frequência relativa dos dados coletados

$P(x\|\theta)$	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
X=0	0,117647	0,222222	0	0,222222	0,272727	0,066667	0,25	0,190476
X=1	0,117647	0,111111	0	0	0,090909	0,266667	0,125	0,071429
X=2	0	0	0,333333	0	0,090909	0	0	0,166667
X=3	0,058824	0,111111	0	0	0	0,066667	0	0,02381
X=4	0,058824	0,222222	0	0,111111	0	0,133333	0,125	0,142857
X=5	0,235294	0,222222	0,333333	0,111111	0,090909	0,2	0	0,071429

X=6	0,352941	0	0	0,333333	0,181818	0,266667	0,25	0,095238
X=7	0,058824	0,111111	0,333333	0,222222	0,272727	0	0,25	0,238095

4.3 Distribuição *a Posteriori*

A distribuição *a posteriori* $\pi(\theta|x)$ foi calculada a partir da função verossimilhança $\pi(x|\theta)$ e da distribuição *a priori* $\pi(\theta)$ segundo a equação (10), resultando nos valores representados na Tabela 3:

Tabela 3: Distribuição *a posteriori* $\pi(\theta|x)$, calculada a partir de $\pi(\theta)$ e $\pi(x|\theta)$

P(teta|X)	X=0	X=1	X=2	X=3	X=4	X=5	X=6	X=7
θ_0	0,1	0,166667	0	0,25	0,076923	0,266667	0,285714	0,05
θ_1	0,1	0,083333	0	0,25	0,153846	0,133333	0	0,05
θ_2	0	0	0,111111	0	0	0,066667	0	0,05
θ_3	0,1	0	0	0	0,076923	0,066667	0,142857	0,1
θ_4	0,15	0,083333	0,111111	0	0	0,066667	0,095238	0,15
θ_5	0,05	0,333333	0	0,25	0,153846	0,2	0,190476	0
θ_6	0,1	0,083333	0	0	0,076923	0	0,095238	0,1
θ_7	0,4	0,25	0,777778	0,25	0,461538	0,2	0,190476	0,5

4.4 Análise Bayesiana do Risco

A Tabela 4 apresenta os portfolios ideais para um decisor que apresente estas características. A quinta linha da Tabela 1 (*X=4*), por exemplo, significa que caso o decisor verifique um aumento no preço do petróleo e na inflação do Reino Unido porém uma redução na inflação dos Estados Unidos, o portfólio ideal concentra 73,1% do seu capital investido em estanho, 17,8% em chumbo e 9,1% em ouro, e possui uma perda esperada de -0,008359158 *utiles*. O restante da tabela pode ser interpretada de forma semelhante a partir da definição do vetor *X*, omitido devido à restrições de páginas para este artigo.

Tabela 4: Portfolio que minimiza a medida de risco para cada observação possível

Observação	a_{ouro}	a_{chumbo}	a_{estanho}	Risco de Bayes
X=0	0,622	0,336	0,042	-0,008493839
X=1	0,716	0	0,284	-0,005034964
X=2	0,377	0,332	0,291	-0,007556575
X=3	0,595	0	0,405	-0,000141556
X=4	0,091	0,178	0,731	-0,008359158
X=5	0,591	0	0,409	-0,00171389
X=6	0,986	0	0,014	-0,004314734
X=7	0,435	0,565	0	-0,012361531

5. Conclusões

O modelo desenvolvido é bastante satisfatório para utilização no mercado financeiro, no intuito de que, uma vez definida com precisão a função utilidade do investidor, ele permite unificar as medidas de retorno e variabilidade do portfólio, reduzindo ambiguidades e indecisões a respeito do portfólio preferido entre candidatos numa curva de pareto, gerando resultados híbridos que se adaptam ao decisor e ao cenário encontrado.

O modelo também pode ser atualizado com novos dados ao longo do tempo, aumentando sua precisão e mantendo sua relevância, além de não depender necessariamente de uma grande quantidade de dados prévios, contanto que se disponha de opiniões de especialistas e de informações sobre o comportamento do retorno dos ativos.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente apoiado pelo CNPq.

Referências

Abdelaziz, F.B.; Aouni, B. & Fayedh, R.E. (2007). Multi-objective stochastic programming for portfolio selection. *European Journal of Operational Research*, 177, 1811-1823.

Ando, T. (2009). Bayesian portfolio selection using multifactor model and Bayesian predictive information criterion. *International Journal of Forecasting*, 25, 550-566.

Bade, A; Frahm, G; Jaekel, U. (2009). A general approach to Bayesian portfolio optimization. *Mathematical Methods of Operations Research*, 70, 337–356.

Behr, P., Guettler, A., & Miebs, F. (2013). On portfolio optimization: imposing the right constraints. *Journal of Banking & Finance*, 37, 1232-1242.

Ballestero, E.; Gunther, M.; Pla-Santamaria, D. & Stummer C. (2007). Portfolio selection under strict uncertainty: A multi-criteria methodology and its application to the Frankfurt and Vienna Stock Exchanges. *European Journal of Operational Research*, 181, 1476-1487.

Benati, S.(2015) Using medians in portfolio optimization. *Journal of the Operational Research Society*, 66, 720-731.

Berger, J.O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. Springer-Verlag, Berlin.

Cover, T. M. & Gluss, D. H. (1986). "Empirical bayes stock market portfolios", *Advances in Applied Mathematics*, 7, 170-181.

Crama, Y. & Schyns, M. (2003). Simulated annealing for complex portfolio selection problems. *European Journal of Operational Research*, 150, 546-571.

DeMiguel, V., Martin-Utrera, A., & Nogales, F. J. (2013). Size matters: Optimal calibration of shrinkage estimators for portfolio selection. *Journal of Banking & Finance*, 37, 3018-3034.

Deng, X. -T.; Li, Z.-F. & Wang, S.-Y. (2005). A minimax portfolio selection strategy with equilibrium. European *Journal of Operational Research*, 166, 278-292.

Ehrgott, M.; Klamroth, K. & Schwehm, C. (2004). An MCDM approach to portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, 155, 752-770.

Fang, Y., Lai, K.K., and Wang, S.Y. (2008). *Fuzzy Portfolio Optimization: Theory and Methods*, Springer, Berlin.

Ferreira, R. J. P.; de Almeida-Filho, A. T.; Souza, F. M. C. (2009). A decision model for portfolio selection. *Pesquisa Operacional*, 29, 403-417.

Fliege, J., Werner, R. (2014). Robust multiobjective optimization & applications in portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, 234, 422-433.

Frost, P. A.; Savarino, J. E. (1986). An empirical Bayes approach to efficient portfolio selection. *Journal of Financial Quantitative Analysis*. 21, 293–305.

H. Levy, M. Levy; (2014). The benefits of differential variance-based constraints in portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, 234, 372–381.

Index Mundi, Historical Commodity Prices. Disponível em: <http://www.indexmundi.com /commodities/> Acesso: abril de 2015.

Kolm, P. N.; Tütüncü, R. e Favozzi, F. J. (2014). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234, 356-371.

Lin, C.-C. & Liu, Y.-T. (2008). Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, 185, 393-404.

Liu, Y.J. & Zhang, W.G.; (2015). A multi-period fuzzy portfolio optimization model with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, 242, pp. 933–941.

Mao, J.C.T. & Särndal, E. (1966). A Decision Theory Approach to Portfolio Selection. *Management Science*, 12(8), B323-B333.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7, 77-91.

Markowitz, H., (1991). Foundations of portfolio theory. *Journal of Finance*, 46, 469-478.

Prakash, A.J.; Chang, C.-H. & Pactwa, T.E. (2003). Selecting a portfolio with skewness: Recent evidence from US, European, and Latin American equity markets. *Journal of Banking & Finance*, 27, 1375-1390.

Ramaswamy, S. (1998). Portfolio Selection Using Fuzzy Decision Theory. Working Paper of Bank for International Settlements, No.59.

Rubinstein, M. (2002). Markowitz's "Portfolio Selection": A Fifty-Year Retrospective. *The Journal of Finance*, 62,1041-1045.

Souza, FMC. Decisões *Racionais em Situações de Incerteza*. 2ª ed.; Recife, 2007.

Von Neumann, J & Morgenstern, O. (1947). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.

Sandoval Jr., L.; Bruscato, A. & Venezuela, M.K. ; Not all that glitters is RMT in the forecasting of risk of portfolios in the Brazilian stock market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 410, 94-109

Young, M.R. (1998). A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution.

Apêndice

Desenvolvendo $L(\theta, a)$ nas equações 32 a 34, conclui-se que $L(\theta, a)$ pode ser escrito na forma da série S_k .

$$L(\theta, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\gamma)^n}{n!} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2j} (2j-1)!!\, \sigma^{2j} \mu^{n-2j} \tag{32}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-\gamma)^n}{n!} \binom{n}{2j} (2j-1)!!\, \sigma^{2j} \mu^{n-2j} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \frac{n! \cdot (2j-1)!! \cdot (-\gamma\mu)^n \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-2j}}{n! \cdot 2j! \cdot (n-2j)!} \tag{33}$$

Sendo $k! = k!! \cdot (k-1)!!$, então:

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \frac{n! \cdot (2j-1)!! \cdot (-\gamma\mu)^n \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-2j}}{n! \cdot 2j! \cdot (n-2j)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^n}{2j!!} \frac{(\gamma\mu)^n \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-2j}}{(n-2j)!} \tag{34}$$

Portanto, é necessário então provar a convergência da série $S_k = \sum_{n=1}^{k} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^n}{2j!!} \frac{(\gamma\mu)^n \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-2j}}{(n-2j)!}$

Uma série $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$ é dita absolutamente convergente quando o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_n|$$

existe, ou seja, quando a série $S_n = \sum_{i=1}^{n} |a_n|$ é convergente. Toda série absolutamente convergente é também uma série convergente. Será provado que a série S_k é uma série absolutamente convergente ao se provar a convergência de outra série S_k', definida em (35):

$$S_k' = \sum_{n=1}^{k} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2j!!} \frac{|(\gamma\mu)^n \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-2j}|}{(n-2j)!} \tag{35}$$

Um teste comum para a convergência de uma série S_n é o chamado teste da razão, em que é calculado o limite descrito em (36).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{36}$$

Supondo $a_n > 0 \; \forall \, n$, condição garantida pelo módulo presente em todos os termos de S_k' e $\mu, \sigma \neq 0$ (que também constituem casos em que a demonstração da convergência seria evidente e trivial), então, caso este limite exista e seja menor que 1, a série converge.

Analisando então este limite na série S_k' separadamente para os casos em que n é par e os casos em que n é ímpar:

Se n é par, sua convergência é provada nas equações 37 a 40:

$$\text{Seja } h = n/2 \tag{37}$$

$$a_n = \sum_{j=0}^{h} \frac{1}{2j!!} \frac{|(\gamma\mu)^n \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-2j}|}{(n-2j)!} \tag{38}$$

$$a_{n+1} = \sum_{j=0}^{h} \frac{1}{2j!!} \frac{|(\gamma\mu)^{n+1} \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-2j}|}{(n+1-2j)!} = \frac{\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)}{n+1} \sum_{j=0}^{h} \left[\frac{1}{2j!!} \frac{|(\gamma\mu)^{n+1} \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-2j}|}{(n-2j)!} \right] = \frac{|(\gamma\mu)|}{n+1} a_n \tag{39}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|(\gamma\mu)|}{n+1} = 0 \qquad \text{(para n par)} \tag{40}$$

Se n é ímpar, sua convergência é provada nas equações 42 a 51:

$$\text{Seja c} = \frac{n-1}{2} \tag{41}$$

$$a_n = \sum_{j=0}^{c} \frac{1}{2j!!} \frac{|(\gamma\mu)^n \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-2j}|}{(n-2j)!} \quad (42)$$

$$a_{n+1} = \sum_{j=0}^{c+1} \frac{1}{2j!!} \frac{|(\gamma\mu)^{n+1} \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-2j}|}{(n+1-2j)!} = \frac{|(\gamma\mu)|}{n+1} \left\{ \sum_{j=0}^{c} \left[\frac{1}{2j!!} \frac{|(\gamma\mu)^n \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-2j}|}{(n-2j)!} \right] \right\} + \frac{|(\gamma\mu)^{n+1} \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-(n+1)}|}{(n+1)!! \cdot (n+1-(n+1))!} \quad (43)$$

$$a_{n+1} = \frac{|(\gamma\mu)|}{n+1} a_n + \frac{1}{n+1!!} \frac{|(\gamma\mu)^{n+1} \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-(n+1)}|}{1} = \frac{|(\gamma\mu)|}{n+1} a_n + \frac{|\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^{n+1}|}{(n+1)!!} \quad (44)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|(\gamma\mu)|}{n+1} + \frac{\frac{|\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^{n+1}|}{(n+1)!!}}{a_n} \quad (45)$$

Mas, $$a_n = \overbrace{\sum_{j=0}^{c-1} \left[\frac{1}{2j!!} \frac{|(\gamma\mu)^n \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{-2j}|}{(n-2j)!} \right]}^{>0} + \frac{|\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^{n}|}{n!!} \quad (46)$$

Logo, $$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^{n+1}|}{(n+1)!!}}{a_n} < \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^{n+1}|}{(n+1)!!}}{\frac{|\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^{n}|}{n!!}} \quad (47)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^{n+1}|}{(n+1)!!}}{\frac{|\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^{n}|}{n!!}} = \lim_{n\to\infty} |\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)| \frac{n!!}{(n+1)!!} = 0 \quad (48)$$

Segue que $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^{n+1}|}{(n+1)!!}}{a_n} = 0 \quad (49)$$

Portanto, $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|(\gamma\mu)|}{n+1} + \frac{\frac{|\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^{n+1}|}{(n+1)!!}}{a_n} = 0 \text{ (para n ímpar)} \quad (50)$$

Deste modo, a série S_k' é convergente, assim como a série S_k $\forall\, \mu, \sigma \in \mathbb{R}$, c.q.d.