



Comparação de algoritmos meta-heurísticos para otimização combinatória multiobjetivo de portfólios financeiros

Fernando Garcia Diniz Campos Ferreira

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET MG
Avenida Amazonas, 7675, 30.421-169, Belo Horizonte, MG, Brazil
fernandogdcf@gmail.com

Bruno Cândido Barroso

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET MG
Avenida Amazonas, 7675, 30.421-169, Belo Horizonte, MG, Brazil
bbarrosobh@gmail.com

Rodrigo Tomás Nogueira Cardoso

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET MG
Avenida Amazonas, 7675, 30.421-169, Belo Horizonte, MG, Brazil
rodricoc@des.cefetmg.br

RESUMO

Este artigo propõe um modelo de otimização combinatória multiobjetivo inteira com rebalanceamento possuindo o objetivo de proporcionar portfólios financeiros diversificados de forma consistente com as práticas de mercado, utilizando uma medida de *downside risk*. Para essa finalidade, foram propostos três algoritmos evolutivos multiobjetivos, baseados no NSGA-II, DEMO e no SPEA2. Foram realizadas simulações considerando portfólios compostos por ativos que participaram da carteira teórica do Ibovespa no primeiro trimestre de 2016. Análise *in-sample* considera análises gráficas, medidas de desempenho para diversidade das soluções e cobertura do espaço objetivo, comparando os algoritmos. Análise *out-of-sample* é realizada comparando o comportamento de carteiras de maiores índices de desempenho, com e sem rebalanceamento, levando em consideração os ganhos dessas carteiras para o período entre 2011 e 2015.

PALAVRAS CHAVE. Otimização de portfólios, algoritmo evolutivo multiobjetivo, otimização combinatória multiobjetivo.

Área Principal: otimização, heurísticas, finanças computacionais

ABSTRACT

This paper proposes a integer combinatorial multiobjective optimization model with rebalancing process to address diversification of investment in portfolios consistent with the market practices, using a "downside risk" measure. To cope with this feature, three evolutionary algorithms are proposed, based on NSGA-II, DEMO and SPEA2. Simulations consider portfolios composed of shares that participated in the theoretical portfolio of Ibovespa in the first quarter of 2016. In-sample analysis considers graphical analysis, performance measures for diversity solutions and objective space coverage comparing the algorithms. Out-of-sample analysis is performed comparing the behavior of lower risk and higher return portfolios with and without rebalancing process in relation to this portfolio's gains for the period between 2011 and 2015.

KEYWORDS. Portfolio optimization. Evolutionary algorithms. Multiobjective optimization.

Main Area: optimization, heuristics, computing finance



1. Introdução

O mercado de capitais permite aos investidores uma possibilidade de retorno superior aos investimentos de renda fixa. No entanto, tais investimentos possuem intrinsecamente um aumento no risco, responsável por eliminar o interesse de investidores que temem grandes prejuízos. A partir disso, foram criadas diversas técnicas de investimento que objetivam simultaneamente a maximização do retorno e a minimização do risco. A utilização de modelos matemáticos adequados que consideram o conceito de risco e retorno pode ajudar decisivamente nos objetivos a serem alcançados na realização de investimentos em mercados de ações.

Primeiramente, Markowitz [1952] propôs uma nova forma de pensar a composição de portfólio, apresentando um modelo de risco utilizando a covariância dos retornos e um modelo de retorno baseado na média dos retornos passados, ambos ponderados pelas proporções de investimento em cada ativo. O autor identificou em sua pesquisa que a diversificação de carteiras gerava um risco menor do que o investimento em ativos individuais. A partir do trabalho de Markowitz iniciou-se uma nova era de gestão de portfólio, com diversos estudos sobre modelagem de risco e retorno.

Após o grande sucesso do modelo Markowitz, diversos estudos foram realizados com o objetivo de aprimorar sua teoria. Uma das principais críticas ao modelo se deve ao fato de a variância como medida de risco captar tanto as perdas quanto os ganhos em excesso, o que não é desejado pelo investidor. Nessa linha, surgiram outros modelos que analisam apenas o *downside risk*, isto é, a cauda relativa às perdas. Morgan e Reuters [1996] desenvolveram a medida de risco conhecida como *Value at Risk* (VaR), que durante vários anos foi utilizada como medida de risco padrão para investimentos no Brasil. Porém, diversas críticas surgiram em relação ao VaR. Maciel [2011] e Oliveira [2009] argumentam sobre a deficiência do VaR de não capturar a magnitude da perda caso ela ocorra. Os autores também apontam que a medida não satisfaz a condição de subaditividade dos axiomas de coerência, prejudicando assim a diversificação da carteira. Nesse caso, o risco da carteira pode ser maior que a soma do risco de cada ativo individualmente.

A partir de então, o *Conditional Value at Risk* (CVaR) passou a ser considerado como uma medida do risco de uma carteira, considerando o risco como a pior perda para um determinado conjunto de cenários, dado um grau de confiança. Ela se encaixa na classe de modelos de "downside risk" Rockafellar e Uryasev [2000]. Além disso, tornou-se importante levar em consideração modelos mais próximos da realidade das práticas de mercado. Para isso, várias restrições foram anexadas nos modelos de otimização, tais como: cardinalidade, que restringe o número de ativos a serem utilizados; máximo e mínimo de investimentos em cada ativo; limites de custos; custos de transações e impostos; compras permitidas apenas em grupos de ativos; entre outros. Rockafellar e Uryasev [2002].

A adição de restrições ao modelo aumenta a complexidade da otimização, como é o caso da restrição de cardinalidade que torna a otimização do modelo um problema NP-Completo Chang et al. [2000]. Tal fato torna um problema de otimização combinatória e os modelos não são mais capazes de serem resolvidos de forma ótima através de métodos determinísticos em tempo polinomial, exigindo a utilização de um método não determinístico para encontrar uma solução aproximada. A partir disso, surgiu a utilização de meta-heurísticas para a otimização do modelo, devido à sua capacidade de encontrar soluções pseudo-ótimas em tempo polinomial.

A partir disso, alguns trabalhos foram realizados para encontrar o melhor algoritmo para a solução do problema de otimização de carteiras. Anagnostopoulos e Mamanis [2011] compararam cinco algoritmos evolucionários multiobjetivo na resolução do problema de otimização de portfólio média-variância com restrição de cardinalidade. Foram avaliados os desempenhos dos algoritmos *Niched Pareto Genetic Algorithm* (NPGA2), *Non-Sorting Genetic Algorithm* (NSGA-II), *Pareto Envelope Based Selection Algorithm* (PESA), *Strength Pareto Evolutionary Algorithm* (SPEA2) e *E Multiobjective Evolutionary Algorithm* (e-MOEA). Através de duas métricas de análise de fronteiras, os autores concluem que SPEA2, NSGA-II e e-MOEA foram as melhores técnicas para resolver



o problema, sendo o SPEA2 melhor em 4 dos 5 testes realizados.

Hanaoka et al. [2015] realizou um estudo comparativo entre os algoritmos SPEA2 e *Differential Evolution for Multiobjective Optimization* (DEMO), utilizando a medida de risco CVaR e as fronteiras analisadas por meio das métricas *Spacing metric* (SP-metric) e *Coverage Metric* (C-metric). Os testes estatísticos não detectaram diferença entre o desempenho dos algoritmos para nenhuma das métricas.

Nessa linha, o presente artigo propõe:

- (i) Um modelo média-CVaR multiobjetivo inteiro restrito com rebalanceamento, de forma que as variáveis de decisão sejam quantidades de lotes para cada ativo do problema. Restrições são impostas sobre a cardinalidade da carteira e sobre o capital disponível, que é descontado de um custo de transação que depende de investimentos prévios.
- (ii) Três algoritmos evolutivos multiobjetivos com operadores que incorporam métodos de reparo específicos para o problema. Os algoritmos são baseados no NSGA-II (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*) (Deb et al. [2002]), no DEMO (*Differential Evolution for Multiobjective Optimization*) (Robič e Filipič [2005]) e no SPEA2 (*Strength Pareto Evolutionary Algorithm*) (Zitzler et al. [2001]).
- (iii) A comparação dos algoritmos em relação às suas fronteiras de Pareto geradas, de acordo com algumas métricas definidas.
- (iv) Uma simulação realística dos resultados operando no mercado de capitais, com o objetivo de verificar a eficiência do modelo e comparar os algoritmos em termos de retornos financeiros gerados por soluções de cada um.

Comparação entre os algoritmos revelam uma superioridade do algoritmo NSGA-II, em relação às soluções geradas de cada algoritmo. Simulações de operações no mercado de capitais, utilizando modelos com e sem rebalanceamento, foram realizadas e, apesar de não haver evidências estatísticas suficientes para a confirmação das hipóteses, resultados apontam para uma maior rentabilidade quando se utiliza modelo com rebalanceamento, além de sugerir maiores ganhos para o algoritmo NSGA-II.

O trabalho é organizado da seguinte forma: seção 2 apresenta o modelo de otimização proposto; seção 3 cita e descreve os algoritmos propostos para otimização do modelo, além de explicar as métricas utilizadas na comparação destes; seção 4 apresenta e discute os resultados, sendo dividida em duas partes: subseção 4.1, que apresenta a comparação entre as fronteiras geradas por cada algoritmo e subseção 4.2, que apresenta resultados da simulação de operações utilizando soluções de cada um dos algoritmos; seção 5, por fim, sintetiza os resultados encontrados, analisa suas implicações e projeta novas oportunidades de pesquisa a partir desses resultados obtidos.

2. Modelo proposto

Partindo do modelo multiobjetivo combinatório, com objetivos de minimizar o risco e maximizar o retorno, utilizando CVaR como medida de risco e restrição de cardinalidade, proposto por Hanaoka et al. [2015], foi proposto um novo modelo que acrescenta o processo de rebalanceamento, que consiste, basicamente, em considerar um investimento passado para, sobre este, calcular um custo de transação baseado na quantidade e na quantia das operações para, a partir do antigo investimento, obter-se um novo investimento otimizado. Supõe-se, portanto, que a diferença de custo, quando leva-se em consideração essa transação, seja relevante ao processo de otimização.

De acordo com a definição de Rockafellar e Uryasev [2002], seja $f(w, r)$ uma função de perda associada ao vetor $w \subset W \in \mathbb{R}^k$ que representa as proporções de investimento de um portfólio e um vetor aleatório $r \in \mathbb{R}^T$, que representa os valores de retorno dos ativos no portfólio. Para cada w , a função de perda $f(w, r)$ tem uma distribuição de probabilidade em \mathbb{R} induzida para



r , convenientemente denotada $p(r)$. Então, a probabilidade de $f(w, r)$ não exceder um certo valor ζ é dado por $\Psi(w, \zeta) = \int_{f(w,r) \leq \zeta} p(r) dr$.

Fixando um certo valor w , tem-se que $\Psi(w, \zeta)$ é a função de distribuição de ζ , acumulado das perdas associadas a w . A função $\Psi(w, \zeta)$ é não-decrescente em relação a ζ e supõe-se que também é contínua em relação a ζ , por questão de simplificação. Essa continuidade resulta da função de perda $\Psi(w, \zeta)$ e da densidade de probabilidade $p(r)$.

Dado um nível de significância $\alpha \in \{0, 1\}$, os valores α -VaR e α -CVaR para uma variável aleatória, representando a perda associada a w , é denotada por $\zeta_\alpha(w)$ e $\phi_\alpha(w)$, respectivamente. Formalmente, a variável $\zeta_\alpha(w) = \min\{\zeta \in \mathbb{R} : \Psi(w, \zeta) \geq \alpha\}$ e $\phi_\alpha(w) = (1 - \alpha)^{-1} \int_{f(w,r) \geq \zeta_\alpha(w)} f(w, r) p(r) dy$.

O modelo biobjetivo restrito com o rebalanceamento é formulado da seguinte forma:

$$\min_{x_1, \dots, x_N} \zeta + (1 - \alpha)^{-1} \sum_{j=1}^J \pi_j [f(x, y_j) - \zeta]^+ \quad (1)$$

$$\max_{x_1, \dots, x_N} \sum_{i=1}^N w_i \mu_i \quad (2)$$

$$s.a. : \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N z_i = k \quad (3a) \\ \sum_{i=1}^n m_i c_i [(x_i - x_i^{(0)}) + \beta |x_i - x_i^{(0)}|] \leq C - Fv \quad (3b) \\ x_i, m_i \geq 1, \forall i \mid z_i = 1, i = 1, \dots, N \quad (3c) \\ x_i \in \mathbb{N}, \forall i, i = 1, \dots, N \quad (3d) \\ z_i \in \{0, 1\}, \forall i, i = 1, \dots, N \quad (3e) \\ v \in \{0, 1\} \quad (3f) \end{array} \right.$$

com $w_i = \frac{m_i c_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i c_i x_i}, i = 1, \dots, N$.

As variáveis do problema são: x_i , a variável de decisão que representa o número de lotes correspondentes ao ativo i a ser otimizado pelo modelo; o peso w_i para cada ativo i é calculado com base na proporção de investimento de tal ativo em relação ao custo total do portfólio; z_i , uma variável binária que indica a presença do ativo i na carteira, valendo 1 caso o ativo esteja presente e 0 caso contrário; e v , também uma variável binária que vale 0 se $\sum_{i=1}^N (x_i - x_i^{(0)}) = 0$ e 1 caso contrário.

Os parâmetros são: N , o número de ativos considerados; ζ , o valor VaR para a carteira; α , o nível de significância estabelecido; π_j , a probabilidade de um certo cenário j ; $f(x, y_j)$, a função de perda para o cenário j ; μ_i , a média histórica de retornos do ativo i ; m_i , o número mínimo de ações que devem ser investidos para cada ativo i ; c_i , o custo de cada ação do ativo i ; C , o capital máximo disponível para investir no portfólio; $x_i^{(0)}$, a quantidade de lotes do ativo i que compõe um portfólio prévio; β , um percentual que determina uma proporção da quantidade envolvida nas operações para adquirir o portfólio otimizado; F , um valor, em unidade monetária, cobrado pela operação financeira. O β e o F representam custos de transação, incluindo valores de corretagem, custódia e emolumentos.

As funções objetivos são descritas pela expressão 1, representando a minimização do risco, utilizando o CVaR, e pela expressão 2, descrevendo a maximização do retorno do portfólio.



O retorno é calculado como a média dos ganhos ponderada pelas proporções de investimento Markowitz [1952]. A expressão 3a descreve a restrição de cardinalidade da carteira, em que a soma dos valores de cada z_i deve ser o valor estipulado por k . A restrição de valor mínimo de ações negociáveis na expressão 3c garante que o número de lotes investidos no ativo i seja maior ou igual a 1 e seja um valor inteiro. Por fim, a expressão 3b representa a restrição de custo proposta, que inclui o rebalanceamento, ou seja, adiciona um custo de transação ao custo da carteira que leva em consideração uma carteira anterior, já que essa define a quantidade de operações necessárias para obter a próxima carteira.

Hanaoka et al. [2015] propuseram o modelo sem rebalanceamento, que é um caso particular deste modelo apresentado onde $x_i^{(0)} = 0, \forall i, i = 1, \dots, N$.

3. Algoritmos propostos

Três algoritmos evolutivos utilizando variáveis de decisão inteiras foram utilizados e seus resultados foram comparados entre si. Os algoritmos são baseados no DEMO (Robič e Filipič [2005]), NSGA-II (Deb et al. [2002]) e no SPEA2 (Zitzler et al. [2001]). Foram desenvolvidos métodos de reparação específicos para garantir a factibilidade das soluções geradas. Enquanto que o DEMO foi utilizado por Hanaoka et al. [2015] e apresentou bons resultados, o NSGA-II e o SPEA2, de acordo com Kieffer et al. [2014], ainda são estado da arte para algoritmos genéticos multiobjetivos.

Cada solução, denominada indivíduo em algoritmos evolutivos, representa uma carteira e é codificada em dois vetores: *vetor de ativos*, com uma cardinalidade (número de ativos distintos) fixa e *vetor de lotes*, com o mesmo tamanho do vetor de ativos, onde cada elemento do vetor de ativos possui seu lote correspondente nesse vetor.

A geração da população inicial é feita preenchendo o vetor de ativos de forma aleatória. Cada ativo recebe uma quantidade aleatória de lotes, de forma que o custo total da carteira não ultrapasse o capital disponível para investimento. Esse método é utilizado da mesma forma para todos os algoritmos utilizados.

Tanto o NSGA-II quanto o SPEA2 realizam, repetidamente, as operações de seleção, cruzamento, mutação e corte, nessa ordem. O procedimento se repete até que um número elevado G de gerações seja atingido ou até que o indicador de hipervolume Guerrero et al. [2010] atinja um valor muito pequeno. O DEMO realiza, repetidamente, as operações de mutação, cruzamento e seleção, utilizando o mesmo critério de parada dos outros dois algoritmos.

Para o **DEMO**, os operadores são:

- **Mutação**, em que cada ativo do vetor de ativos de um indivíduo é modificado de acordo com a mutação DE/rand/1/bin, que faz com que o indivíduo sofra mutação com base em uma parcela c_f da diferença entre dois indivíduos aleatórios distintos somados a um terceiro indivíduo aleatório. Já que a mutação pode gerar soluções com valores de ponto flutuante, tornando a solução infactível, o módulo- n é aplicado ao vetor de ativos. Se algum número é repetido nesse vetor de ativos, o reparo é feito trocando o ativo repetido por um outro que não esteja na carteira. Quantidades aleatórias de lotes são definidas para cada ativo de forma que o custo total da carteira não ultrapasse o capital disponível.
- **Cruzamento**, em que novos indivíduos são formados com uma proporção de cr dos elementos compostos pelos ativos e lotes correspondentes dos indivíduos da população atual e $1 - cr$, pelos ativos e lotes correspondentes dos indivíduos resultantes do processo de mutação. Depois disso, como na mutação, quantidades aleatórias de lotes são determinadas para cada ativo de forma que não haja infactibilidade.
- **Seleção**, no qual indivíduos gerados pelo cruzamento substituem aqueles da população atual que os geraram, caso esses sejam melhores. Ao final de cada geração, os melhores indivíduos



(pertencentes à melhor fronteira de Pareto e, em caso de empate, os mais espaçados) são selecionados para a próxima geração do algoritmo.

Os operadores do **NSGA-II** são:

- **Seleção**, onde um indivíduo é eleito por iteração usando o método torneio binário, no qual dois indivíduos são selecionados aleatoriamente e o melhor deles é selecionado para fazer parte da nova população. Esse procedimento se repete até que N_p indivíduos sejam escolhidos, sendo N_p o número de indivíduos da população.
- **Cruzamento**, em que dois indivíduos, denominados pai 1 e pai 2, da nova população são escolhidos aleatoriamente em cada iteração. Então, esses dois indivíduos geram, com uma probabilidade pc , dois outros novos, denominados filho 1 e filho 2, da seguinte forma: um ponto de corte é escolhido aleatoriamente e o filho 1 é formado pelos ativos do pai 1 à esquerda desse ponto, com seus respectivos lotes e pelos ativos presentes no pai 2 à direita desse ponto, com seus respectivos lotes. Analogamente, o filho 2 é formado pela combinação complementar, em relação ao filho 1, do pai 1 e pai 2. Dessa forma, dois novos filhos substituem seus pais na nova população a cada iteração e o procedimento continua até que N_p filhos sejam gerados.
- **Mutação**, no qual uma pequena porcentagem pm dos indivíduos da nova população são escolhidos aleatoriamente e esses ativos selecionados são substituídos por outros ativos escolhidos aleatoriamente. Quando isso ocorre, a carteira que contém o ativo que foi substituído altera os valores dos seus lotes, de forma que ela continue factível.
- **Corte**, que seleciona os N_p melhores indivíduos da união da população atual com a nova população. Esses indivíduos escolhidos farão parte da população da próxima geração. São considerados melhores os indivíduos pertencentes à melhor fronteira de Pareto e, em caso de empate, aqueles com maiores distâncias de aglomeração que, para um indivíduo específico, corresponde à distância entre seus vizinhos.

O **SPEA2** difere do **NSGA-II** por possuir, além da população de indivíduos, um arquivo, de tamanho N_a , que armazena os melhores indivíduos gerados. A seleção, cruzamento e mutação do **SPEA2** foram os mesmos utilizados pelo **NSGA-II**, mas a fase de **corte** do **SPEA2** foi feita de forma diferente. O **SPEA2** possui uma função de avaliação, calculada com base na quantidade de soluções que dominam uma solução qualquer e com base em sua distância à um vizinho k . Dessa forma, a cada geração, o arquivo é atualizado com as melhores soluções (de menores função avaliação) da união da população de indivíduos com as soluções do arquivo.

Três medidas de desempenho foram usadas para avaliar os resultados dos algoritmos. A primeira é a métrica SP (*spacing*) (Schott [1995]), que mede a diversidade das soluções, ou seja, quão uniformemente distribuídas elas estão no espaço de soluções. Quanto menor o valor da métrica SP , mais uniformemente espaçadas as soluções estão no espaço objetivo e mais diversificadas elas são. A segunda medida é a HV (hipervolume) (Zitzler et al. [2003]), que mede o volume do espaço dominado pela fronteira de Pareto gerada pelo algoritmo de otimização multiobjetivo. Então, quanto mais próximas da fronteira Pareto-ótimo as soluções estão e quanto mais uniformemente distribuídas estão, maior o valor dessa métrica. Dessa forma, HV é uma medida que pode analisar tanto a cobertura quanto a diversidade das soluções. O indicador também garante que, se todas as soluções de um conjunto A são fracamente dominadas por soluções de um conjunto B , o hipervolume de B será maior que o de A . A terceira medida utilizada é a Cobertura média ou C_{avg} . Ela consiste na média das métricas C (coverage) (Jiang et al. [2014]) de um algoritmo com todos os demais, dois a dois. A métrica C compara as soluções de dois algoritmos distintos, determinando a porcentagem das soluções de cada algoritmo que é dominada pelas soluções do outro



algoritmo. Assim, quanto menor essa média, menos soluções de outros algoritmos dominam as de um determinado algoritmo.

4. Resultados

Para realizar a otimização, foram considerados dados históricos de fechamentos diários dos ativos que participaram do IBOVESPA (Bovespa [2017]) no primeiro trimestre de de 2016. Cotações referentes a seis anos (janeiro de 2010 a dezembro de 2015) foram utilizadas na otimização, totalizando 1484 fechamentos de 53 ativos.

O retorno de cada dia é calculado como a diferença logarítmica entre o fechamento do dia corrente e o fechamento do dia anterior: $r(t) = \ln(\text{fechamento}(t)) - \ln(\text{fechamento}(t - 1))$. Assim, o retorno se torna uma taxa que suaviza as diferenças possivelmente exorbitantes do mercado financeiro.

Primeiramente, a otimização foi executada para o primeiro ano (2010) usando os algoritmos DEMO, NSGA-II e SPEA2. As soluções desses algoritmos foram comparadas e apresentadas na seção 4.1. Posteriormente, de 2011 adiante, otimizações foram realizadas a cada mês, gerando uma nova carteira para cada algoritmo. Esse procedimento repetiu-se até o fim de 2015 e um total de 60 portfólios foi gerado para cada algoritmo nesse período. Esses portfólios foram comparados como mostrado na seção 4.2.

Os parâmetros do modelo escolhidos foram: número de ativos N igual a 53; nível de significância α de 5%; número mínimo de ações $m_i, \forall i, i = 1, \dots, N$ igual a 100; capital disponível C de R\$100.000,00; custo de transação proporcional β de 0,45%; custo de transação fixo F de R\$29,00; cardinalidade K de 9 ativos, já que os testes realizados em Barroso et al. [2017] sugerem melhor desempenho para esse valor. Os demais parâmetros foram determinados com base nas informações de corretoras brasileiras, como a do Banco do Brasil.

Nos algoritmos, os parâmetros escolhidos foram: quantidade máxima de gerações G igual a 500; tamanho da população N_p igual a 500; para o SPEA2, o tamanho do arquivo N_a também é de 500. Os demais parâmetros são alterados de forma adaptativa, como proposto em de Carvalho Ribeiro et al. [2010]. Tentou-se elevar o máximo possível tais parâmetros, sem que houvesse estouro de memória.

4.1. Análise *in-sample*

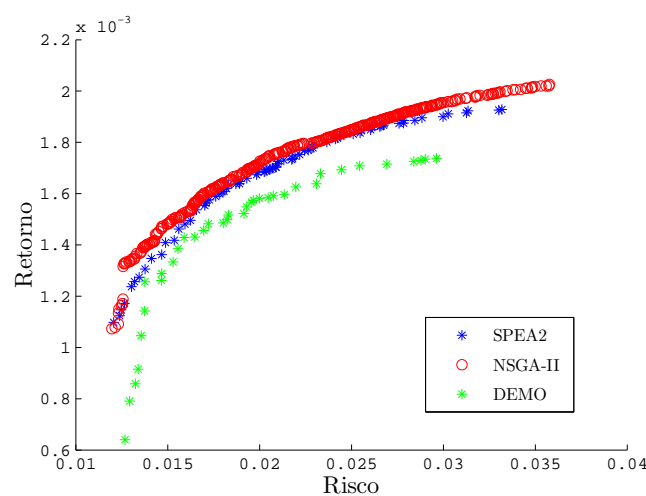
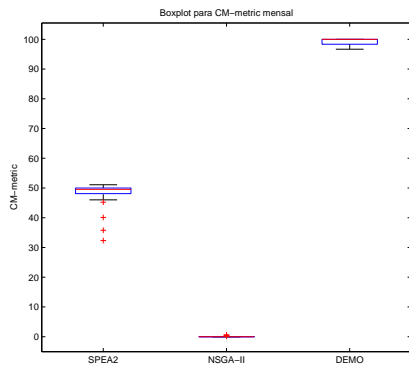


Figura 1: Fronteira de Pareto dos Algoritmos

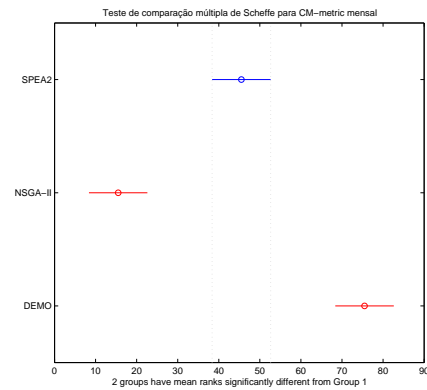
Na análise *in-sample*, o principal objetivo é avaliar e comparar o desempenho dos algoritmos de otimização multiobjetivos descritos nas seções anteriores. Para isso, eles serão comparados



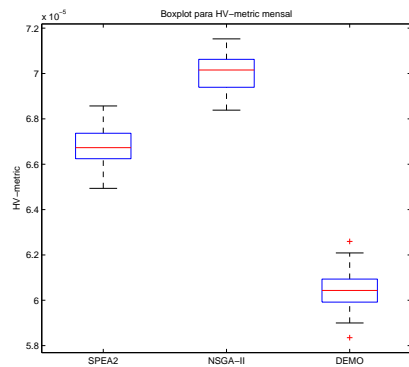
utilizando cada uma das métricas mencionadas anteriormente e os resultados apresentados correspondem aos valores das métricas obtidas em 30 execuções de cada algoritmo. Para verificar qual algoritmo possui melhores valores para as métricas escolhidas, são realizados testes de hipótese.



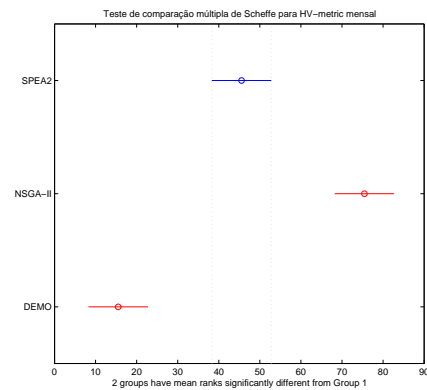
(a) Boxplot para métrica C



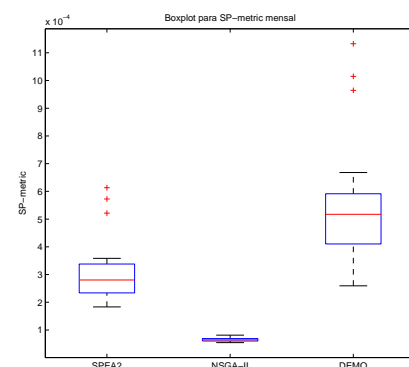
(b) Teste de Scheffe para métrica C



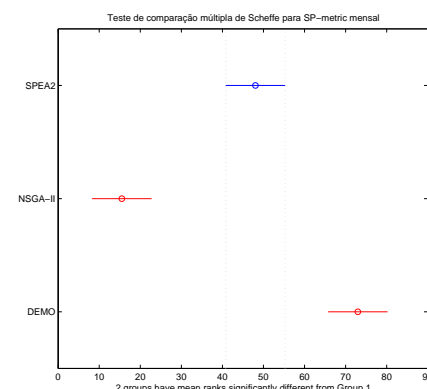
(c) Boxplot para hipervolume



(d) Teste de Scheffe para hipervolume



(e) Boxplot para métrica SP



(f) Teste de Scheffe para métrica SP

Figura 2: Boxplot e teste de Scheffe das fronteiras geradas pelos algoritmos propostos

Observando a figura 1, que mostra as fronteiras de Pareto combinada das 30 execuções de cada algoritmo, pode-se perceber que a fronteira do NSGA-II parece ser melhor do que a fronteira gerada pelo SPEA2 que, por sua vez, parece ser superior à fronteira apresentada pelo DEMO. Para checar tal suposição, é realizado o teste de hipótese, por meio da análise de variância. As hipóteses



de normalidade, homocedasticidade e independência são checadas e, mesmo que alguns testes de normalidade e homocedasticidade falhem para algumas métricas, ao nível de significância de 5%, o teste de independência nunca rejeita a hipótese nula.

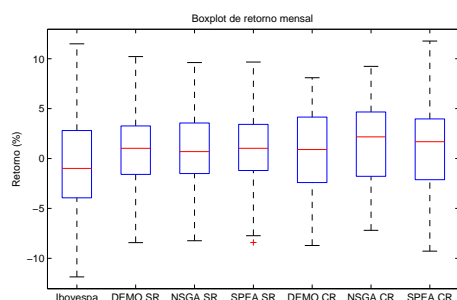
A figura 2 mostra o Boxplot e teste de comparação múltipla Scheffe para as três métricas propostas. O teste estatístico de análise de variância, ao nível de significância de 5%, rejeitou a hipótese nula de igualdade entre os algoritmos em todas as métricas propostas. Para descobrir quais algoritmos são estatisticamente diferentes, foi realizado o teste de Scheffe. Confirmando as suposições, o algoritmo NSGA-II apresentou soluções superiores às do SPEA2, que apresentou soluções melhores que as do DEMO em todas as métricas.

4.2. Análise out-of-sample

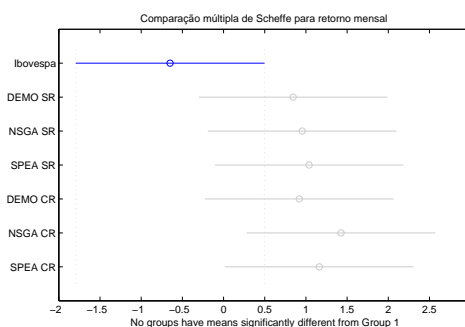
Essa análise possui o objetivo de avaliar o desempenho de algumas carteiras selecionadas por cada algoritmo, obtidas pela otimização do modelo proposto, além de comparar os modelos com e sem rebalanceamento com simulações de operações no mercado de capitais. Dessa forma, sete carteiras compõem a análise: três carteiras sem rebalanceamento (DEMO SR, NSGA SR e SPEA SR); três carteiras com rebalanceamento ((DEMO CR, NSGA CR e SPEA CR); e como *benchmark* de comparação a carteira do Ibovespa. Todas carteiras selecionadas são comparadas em 60 meses, entre janeiro de 2011 e dezembro de 2015. Ao início de cada mês, cada algoritmo é executado 30 vezes e, para cada um, são selecionadas as carteiras de maiores índice desempenho (retorno sobre risco) para o dado período.

Os portfólios são, então, comparados de acordo com três indicadores: retorno, risco e *drawdown*, que corresponde à porcentagem da maior queda de retorno mensal. Cada um desses indicadores são calculados mensalmente, totalizando 60 amostras. A medida de retorno corresponde à diferença entre os preços de fechamento do primeiro e último dia do mês. E o risco é definido como o CVaR de cada carteira a cada mês.

A figura 3 apresenta o boxplot e o teste de Scheffe, ao nível de significância de 5%. O boxplot da figura 3(a) sugere uma ausência de diferença entre retornos mensais de cada configuração e pelo teste estatístico da figura 3(b) verifica-se que, apesar de realmente não ter sido detectada diferença estatística ao nível de significância de 5%, o intervalo de confiança dos retornos mensais do Ibovespa está visivelmente separado dos demais.



(a) Boxplot para retorno mensal



(b) Teste de Scheffe para retorno mensal

Figura 3: Boxplot e teste de Scheffe dos retornos mensais

Pela figura 4, verifica-se a superioridade das carteiras geradas pelos algoritmos propostos em relação ao Ibovespa, tanto utilizando o modelo com rebalanceamento, quanto sem rebalanceamento. Essa superioridade é indicada pelo boxplot da figura 4(a) e comprovada pelo teste estatístico na figura 4(b), que detecta essa diferença para riscos mensais. Contudo, não foi detectada diferença estatística entre os algoritmos com e sem rebalanceamento.

Em relação aos valores mensais de *drawdown*, ocorre o mesmo que ocorreu para riscos mensais, ou seja, observando a figura 5, é possível verificar que o Ibovespa apresenta *drawdown*

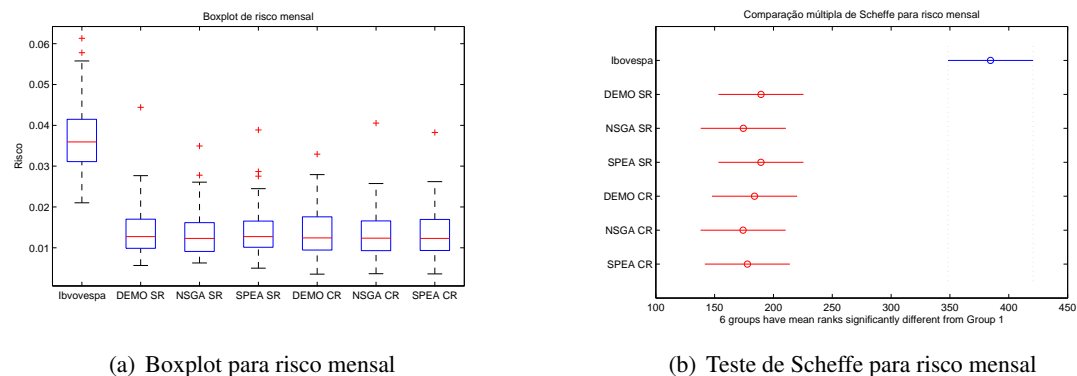


Figura 4: Boxplot e teste de Scheffe dos riscos mensais

mensal maior que os algoritmos propostos. Pode-se dizer, então, que os algoritmos apresentaram resultados melhores que o *benchmark* Ibovespa. Novamente, não foi detectada diferença estatística entre algoritmos com e sem rebalanceamento.

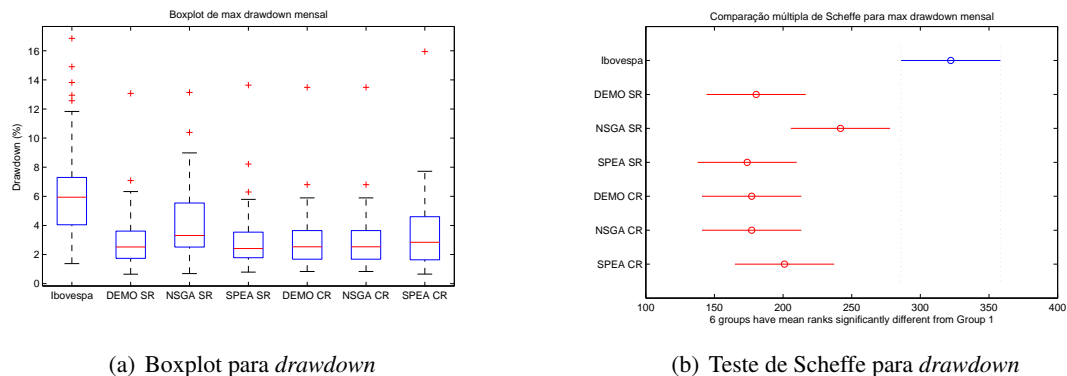


Figura 5: Boxplot e teste de Scheffe dos valores mensais de *drawdown*

Por fim, avaliando a figura 6, que apresenta retorno acumulado durante os 5 anos para cada configuração, percebe-se que, mais uma vez, a superioridade dos algoritmos propostos sobre o Ibovespa é fortemente evidenciada. Apesar de não ter sido encontrada diferença estatística entre retornos mensais de cada caso, no retorno acumulado percebe-se que, para cada algoritmo, aquele que utiliza o modelo com rebalanceamento apresentou melhores resultados e, além disso, verifica-se que os algoritmos que geram melhores fronteiras na análise *in-sample* apresentaram maiores retornos acumulados. Os algoritmos propostos foram capazes de superar tranquilamente o retorno do Ibovespa, e, ainda, todos conseguiram superar o ativo livre de risco do mercado brasileiro (CDI). Vale ressaltar que os custos de transação foram considerados nas simulações, evidenciando ainda mais a superioridade dos algoritmos apresentados.

5. Conclusão

Este trabalho propõe um modelo com rebalanceamento e técnicas meta-heurísticas de otimização para proporcionar diversificação de investimentos em portfólios financeiros e os resultados, em um estudo de caso real, mostram que existem evidências estatísticas de que a metodologia proposta pode oferecer opções de carteiras que podem auxiliar investidores, proporcionando lucros, uma vez que apresenta riscos, *drawdown* e retornos acumulados melhores que aqueles proporcionados por metodologias comuns.

Resultados *in-sample* mostram a superioridade dos algoritmos NSGA-II e SPEA2 sobre o DEMO, considerando algumas métricas de desempenho. Essa superioridade se deve, aparentemente, aos diferentes operadores de reprodução utilizados no DEMO, sendo que os operadores do

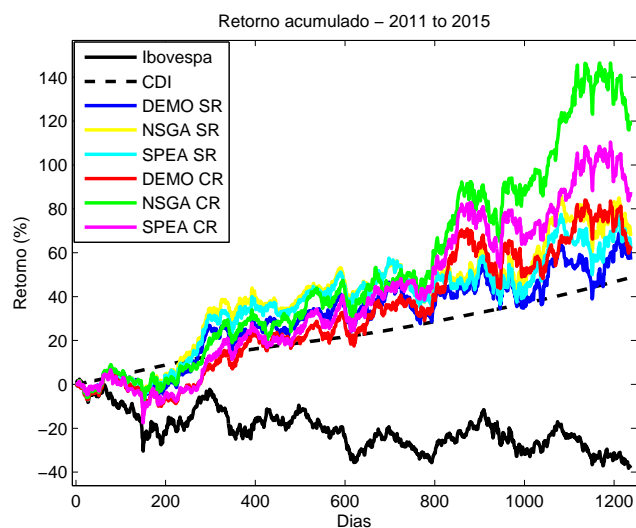


Figura 6: Retorno Acumulado entre os anos de 2011 a 2015

NSGA-II e do SPEA2 causam menor perturbação no conjunto de soluções, gerando novas soluções mais próximas das boas soluções da população. Em relação à superioridade do NSGA-II sobre o SPEA2, supõe-se que a fase de corte do NSGA-II, levando em conta a distância dos vizinhos de cada solução é, para esse problema, mais eficiente que o corte do SPEA2, que leva em consideração apenas um dos vizinhos de cada solução.

Simulações *out-of-sample* validam o modelo e justificam a utilização da otimização de portfólios no auxílio à analistas financeiros e investidores, já que a metodologia se mostrou muito superior ao *benchmark* Ibovespa e superou, em retorno acumulado, o ativo livre de risco CDI mesmo considerando os custos de transação. Retornos acumulados sugerem a superioridade do modelo com rebalanceamento em relação ao modelo sem rebalanceamento, além de sugerir a relação direta entre técnicas que geram carteiras mais otimizadas e o ganho que produzem em operações no mercado de capitais. Essa superioridade pode ser explicada pelo fato do modelo considerar aspectos práticos relevantes. Além disso, os resultados validam o modelo proposto, que consegue proporcionar ganhos mesmo sendo mais restrito.

Vale a ressalva de que a falta de evidências estatísticas entre diferentes modelos e algoritmos aponta para o fato de que, apesar da otimização proporcionar bons resultados, o esforço para melhorar as soluções geradas ou criar um modelo mais realístico pode, eventualmente, não refletir em maiores ganhos no mercado de capitais. Dessa forma, trabalhos futuros irão concentrar em estratégias de identificação dos melhores momentos de compra e venda de ativos para o modelo de otimização proposto.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à CAPES e ao CEFET-MG.

Referências

- Anagnostopoulos, K. e Mamanis, G. (2011). The mean–variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms. *Expert Systems with Applications*, 38(11):14208–14217.
- Barroso, B. C., Ferreira, F. G. D. C., Hanaoka, G. P., Paiva, F. D., e Cardoso, R. T. N. (2017). Composition of investment portfolios through a combinatorial multiobjective optimization model using cvar. *IEEE Congress on Evolutionary Computation*.



- Bovespa (2017). índice bovespa. [http://www.bmfbovespa.com.br/pt/\\$_br/produtos/indices/indices-amplos/indice-ibovespa-composicao-da-carteira.htm](http://www.bmfbovespa.com.br/pt/$_br/produtos/indices/indices-amplos/indice-ibovespa-composicao-da-carteira.htm). Acessado: 2017-02-15.
- Chang, T.-J., Meade, N., Beasley, J. E., e Sharaiha, Y. M. (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, 27(13):1271–1302.
- de Carvalho Ribeiro, L., Barbosa, A. M., e de Oliveira Arantes, J. M. (2010). Algoritmo genético multiobjetivo. *Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications*, 9.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., e Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(2):182–197.
- Guerrero, J. L., Martí, L., Berlanga, A., García, J., e Molina, J. M. (2010). Introducing a robust and efficient stopping criterion for moeas. *Evolutionary Computation (CEC)*, 10(2).
- Hanaoka, G. P., Cardoso, R. T. N., e Paiva, F. D. (2015). Composição de carteiras de investimentos através da otimização combinatória do modelo cvar multiobjetivo restrito. *XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional–SBPO*.
- Jiang, S., Ong, Y.-S., Zhang, J., e Feng, L. (2014). Consistencies and contradictions of performance metrics in multiobjective optimization. *IEEE transactions on cybernetics*, 44(12):2391–2404.
- Kieffer, E., Stathakis, A., Danoy, G., Bouvry, P., Talbi, E. G., e Morelli, G. (2014). Multi-objective evolutionary approach for the satellite payload power optimization problem. In *2014 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Multi-Criteria Decision-Making (MCDM)*, p. 202–209.
- Maciel, L. (2011). Análise não-paramétrica para as estimativas de risco nos mercados de ações globais: Value-at-risk, expected shortfall e medidas de risco espectrais. *Revista de Economia e Administração*, 10(4).
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1):77–91.
- Morgan, J. P. e Reuters (1996). Riskmetrics tm - technical document. Technical report, Morgan Guaranty Trust Company of New York.
- Oliveira, E. P. (2009). Medidas coerentes de risco. *IMPA–Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada*, 74.
- Robič, T. e Filipič, B. (2005). Demo: Differential evolution for multiobjective optimization. In *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, p. 520–533. Springer.
- Rockafellar, R. T. e Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, 2:21–42.
- Rockafellar, R. T. e Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of banking & finance*, 26(7):1443–1471.
- Schott, J. R. (1995). Fault tolerant design using single and multicriteria genetic algorithm optimization. *Air Force Inst of Tech WrightPatterson AFB OH*.
- Zitzler, E., Laumanns, M., Thiele, L., et al. (2001). Spea2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm.
- Zitzler, E., Thiele, L., Laumanns, M., Fonseca, C. M., e da Fonseca, V. G. (2003). Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*.