PROTEGENDO REDES DE TRANSPORTE: O PROBLEMA DA MEDIANA COM FORTIFICAÇÃO E INTERDIÇÃO EM HUBS

Hugo Quadros
Pós Graduação em Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, 24210-240, São Domingos, Niterói, RJ, Brasil
hugo.quadros2@gmail.com

Marcos Costa Roboredo
Departamento de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, 24210-240, São Domingos, Niterói, RJ, Brasil
mcroboredo@id.uff.br

Artur Alves Pessoa
Departamento de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, 24210-240, São Domingos, Niterói, RJ, Brasil
artur@producao.uff.br

RESUMO

Hubs são estruturas muito utilizadas em sistemas de transportes de produtos ou de dados e estão sujeitos a interrupções de sua funcionalidade, denominadas interdições. A interdição em hubs pode levar a grandes perdas na eficiência do transporte, aumentando o custo de atendimento. Uma forma de proteger os hubs de possíveis interdições é tomar ações preventivas, denominadas fortificações, uma vez que um hub fortificado não pode ser interditado. Neste trabalho é proposto o problema da mediana com fortificação e interdição em hubs, que consiste em fortificar q hubs visando minimizar o aumento do custo decorrente das interdições de r hubs. Este problema é formulado neste trabalho utilizando programação linear inteira com um número exponencial de restrições. Tal formulação é resolvida de maneira exata via um algoritmo branch-and-cut. Resultados computacionais são apresentados, sendo possível constatar que o método proposto é capaz de resolver instâncias significativamente grandes em aceitáveis tempos computacionais.

PALAVRAS CHAVE. Branch-and-cut, fortificação e interdição de facilidades, proteção de hubs.

Otimização Combinatória

ABSTRACT

Hubs are structures widely used in products or data transportation systems and they are subject to disruptions of its functionality, denominated interdiction. A hub interdiction can lead to great efficiency losses in the transportation and the substantial increase of the serving cost. A way to protect these hubs from possible interdictions is to take preventive actions, denominated fortifications, once a fortified hub can not be interdicted. In this paper is proposed the hub fortification and interdiction median problem, which consists of fortifying q hubs in order to minimize the increase of the cost due to the interdiction of r hubs. This problem is formulated in this paper using integer linear programming with an exponential number of constraints. This formulation is exactly solved by a branch-and-cut algorithm. Computational results are presented, being possible to verify that the proposed method is able to solve significantly large instances in an acceptable computational time.

KEYWORDS. Branch-and-cut, fortification and interdiction of facilities, hub protection.

Combinatorial Optimization

1. Introdução

Hubs são facilidades especiais que servem como transbordo e pontos de troca em sistemas de transporte de produtos ou dados onde é necessário transferir fluxos entre pares origem e destino. Fluxos diferentes podem ser agregados e transportados através dos hubs antes de chegar a suas destinações e isto diminui o custo total de transporte pois há um desconto no custo unitário de transporte entre hubs. Além disso, o transporte entre hubs reduz o número de possíveis rotas durante o transporte, diminuindo assim possíveis perdas. Este modelo de transporte é muito aplicado em linhas aéreas, onde os nós representam os aeroportos e as arestas representam os planos de voo, utilizando escalas como facilidades intermediárias (hubs). Podemos citar também outras aplicações deste modelo como em sistemas logísticos e em redes de telecomunicações.

O funcionamento de um hub em uma rede de disseminação de fluxos está sujeito a interdição total ou parcial, desativando suas capacidades funcionais normais. Levando em consideração o fato de hubs consolidarem e concentrarem os fluxos de seus clientes, interdições em hubs tendem a gerar um maior impacto no sistema de distribuição. Se um hub está interditado, todo o fluxo que o utilizava deverá ser realocado, ocasionando um aumento de custo indesejado. Na prática, as razões para tais acontecimentos são várias, como por exemplo falhas operacionais, desastres naturais ou até mesmo ataques intencionais. Para reduzir o impacto das interdições, o planejador do sistema pode tomar algumas decisões preventivas, como construção de barreiras, inspeção, monitoramento, manutenção preventiva e gastos com aumento da segurança. Estas decisões são chamadas de fortificações e são definidas como o recurso que deverá ser gasto para proteger os hubs de possíveis interdições, impedindo a interrupção do seu funcionamento.

Diversos modelos de otimização envolvendo fortificações e interdições de facilidades em diversos tipos de rede de abastecimento e transporte vêm sendo estudados tanto do ponto de vista do planejador do sistema quanto do interditor. Estes estudos se popularizaram em tempos mais contemporâneos, principalmente após o ataque do dia 11 de Setembro de 2001 nos Estados Unidos, quando o aumento da incerteza e temor acerca do terrorismo passou a se evidenciar, tanto do ponto de vista do interditor [Israeli e Wood, 2002; Church et al., 2004], quanto do ponto de vista do planejador do sistema [Church e Scaparra, 2007; O'Hanley e Church, 2011; Aliakbarian et al., 2015]. Para uma discussão mais detalhada a respeito de artigos, referências e modelos relacionados ao tema, ver Snyder et al. [2016] e Brown et al. [2006].

Neste artigo é proposto o problema da mediana com fortificação e interdição em hubs (PMFIH). O PMFIH Considera uma rede com diversos hubs e diversos pares origem e destino. Cada par de origem e destino é atendido por um único hub ou um par deles de acordo com o custo de atendimento, neste último caso fazendo valer-se do desconto no custo unitário de transporte entre hubs. Neste problema, é considerada a possibilidade de um ou mais hubs serem interditados. Quando um hub é interditado todos os pares origem e destino, que eram atendidos por este de alguma forma, passam a ser atendidos por outro hub, ou par, não interditado mais barato dentre as possibilidades restantes. É considerado, ainda, que o planejador do sistema pode reduzir o impacto das interdições fortificando um subconjunto dos hubs. Quando um hub está fortificado, este não pode ser interditado. O objetivo do PMFIH consiste então em identificar a melhor estratégia de fortificação de q hubs para minimizar o aumento de custo decorrente da interdição de um número r de hubs.

A ideia de se propor o PMFIH foi indicada como trabalhos futuros na pesquisa feita por Lei [2013], onde foi introduzido o problema chamado HIM "hub interdiction median problem" (problema da mediana com interdição em hubs). Este problema trabalha sob a visão do interditor e visa identificar um conjunto de r hubs que, se interditados, geram o maior impacto no custo do serviço prestado pelo sistema. Para resolver este problema, o autor apresentou um modelo de programação linear inteira. O autor sugeriu como pesquisas futuras a incorporação da decisão preventiva de fortificação.

Lei [2013] foi o primeiro a aplicar o conceito de interdição em uma rede de abastecimento hub-and-spoke e abriu um novo campo de estudo. Este problema uniu um sistema de abastecimento em alta no mercado (hub-and-spoke) com um tema muito atual, como interdição de facilidades. Logo após, vários artigos surgiram para aplicar estes conceitos com abordagens diferentes. Parvaresh et al. [2013] formularam o problema da mediana em p-hubs com alocação múltipla sob interrupções intencionais como um modelo em dois níveis. Neste problema a empresa deve localizar um número p de hubs sabendo que, depois da localização, terão interdições que visam aumentar o custo deste sistema. Neste artigo foram utilizados dois algoritmos baseados em arrefecimento simulado para resolução do problema. O mesmo problema é, também, abordado em Parvaresh et al. [2014] e resolvido através de duas metaheurísticas multi-objetivas baseadas em arrefecimento simulado e busca tabu. Azizi et al. [2016] apresentou uma meta-heurística para o problema de localização, minimizando o aumento de custo decorrente da interdição de um único hub em um sistema hub-and-spoke. Mohammadi et al. [2016] trabalha o problema de localização de hubs com a incerteza de interdição, podendo também considerar interdições totais e parciais em hubs. Além disso, é proposto um novo algoritmo de meta-heurística híbrida para o problema. Chaharsooghi et al. [2017] também trata um problema de localização de hubs com múltiplas alocações sujeito a interdições onde é apresentado um modelo de programação estocástica e uma meta-heurística.

Todos os trabalhos citados anteriormente tratam um problema sob a visão do interditor ou visam minimizar o efeito da interdição através da localização ótima destes hubs. Neste trabalho, porém, é proposto pela primeira vez o uso da fortificação para tal objetivo. Neste contexto, é proposta para o PMFIH uma formulação de programação linear inteira mista com um número polinomial de variáveis e um número exponencial de restrições, que são geradas sob demanda em um algoritmo de branch-and-cut. Para acelerar o método proposto, é proposta ainda uma heurística gulosa para o problema da separação que evita em diversas vezes a utilização de métodos exatos. Com o intuito de comprovar a robustez do método proposto, diversos experimentos computacionais são apresentados, sendo possível comprovar que o método é capaz de encontrar a solução ótima de todas as instâncias propostas em aceitáveis tempos computacionais.

O presente trabalho é dividido da seguinte maneira: na Seção 2 é descrito o problema; na Seção 3 é apresentada uma formulação para o problema proposto; na Seção 4 é provado que nenhuma solução inteira viável será cortada pela formulação adotada; na Seção 5 é explicada a separação de cortes associados ao modelo e apresentada sua formulação; na Seção 6 são apresentados e discutidos os resultados obtidos; e, por fim, na Seção 7 são apresentadas as conclusões deste trabalho, bem como propostas para possíveis trabalhos futuros.

2. Descrição do PMFIH

O PMFIH considera um sistema de transporte composto de n pontos, incluindo um conjunto H de p hubs já localizados e um conjunto J composto pelos demais $n-p$ pontos. Cada par de pontos $(i, j) \in J \times J$ possui uma demanda w_{ij}, que deve ser transportada do ponto i para o ponto j. Cada uma destas demandas é transportada utilizando-se do hub ou par de hubs mais barato. O custo de um par de pontos $(i, j) \in J \times J$ a ser atendido pelo par de hubs $(k, m) \in H \times H$ é denotado por c_{ijkm} e é dado por

$$c_{ijkm} = min \left\{ d_{ik} + \alpha d_{km} + d_{mj}, d_{im} + \alpha d_{mk} + d_{kj} \right\}, \tag{1}$$

onde a matriz d é composta pelas distâncias entres os pontos e $\alpha \in [0, 1]$ representa o fator de desconto entre hubs. Quando $k = m$, tem-se o custo de transporte utilizando-se um único hub. Neste caso, o custo é dado por

$$c_{ijkk} = d_{ik} + d_{kj}. \tag{2}$$

Existe a possibilidade de um hub ser interditado e, neste caso, todos os pares $(i, j) \in J \times J$ que eram atendidos por este de alguma forma passam a ser atendidos por outro hub ou par de hubs não interditado mais barato. Existe ainda a possibilidade da fortificação de hubs. Quando um hub está fortificado, este não pode ser interditado. O objetivo do PMFIH é então reduzir o impacto no custo total de atendimento identificando a melhor estratégia de fortificação de q hubs sabendo que r hubs serão interditados no pior caso.

3. Formulação do PMFIH

Nesta Seção é apresentada uma formulação de PLI para o PMFIH. Para isso, seja $\mathscr{L}$ o conjunto de todas as estratégias possíveis de fortificação. Matematicamente, $\mathscr{L} = \{L \subset H||L| = q\}$. Similarmente, define-se $\mathscr{I} = \{I \subset H||I| = r\}$. Para cada $L \in \mathscr{L}$ e cada $I \in \mathscr{I}$ define-se $C(L, I)$ como custo total de atendimento de todos os pares $(i, j) \in J \times J$ dadas as estratégias L e I. Para a formulação, definimos as seguintes variáveis:
z - custo total de transporte após as fortificações e interdições

$$x_h = \begin{cases} 1 & \text{se o hub } h \text{ é fortificado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A formulação para o PMFIH é a que segue.

$$\min z \tag{3}$$
$$\text{s.a.} \sum_{h \in H} x_h = q \tag{4}$$
$$z \geq C(L, I) - \sum_{h \in I \setminus L} M_h(L, I) x_h, \quad \forall L \in \mathscr{L}, I \in \mathscr{I} \tag{5}$$
$$x_h \in \{0, 1\}, \quad \forall h \in H \tag{6}$$
$$z \geq 0 \tag{7}$$

onde $M_h(L, I)$ é definido da seguinte maneira:

$$M_h(L, I) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} w_{ij} \max \left\{ 0, \min_{l,m \in L \cup (H \setminus I)} \{c_{ijlm}\} - \min_{\substack{l,m \in H \\ h \in \{l,m\}}} \{c_{ijlm}\} \right\}$$

A função objetivo (3) minimiza o custo de transporte após as fortificações e interdições serem aplicadas. A restrição (4) garante que q hubs devem ser fortificados. As restrições (5) garantem, para cada par de estratégias de interdição e fortificação I e L, que a variável z seja maior ou igual ao custo de transporte, dadas as estratégias I e L menos um número muito grande, representado por $M_h(L, I)$, que só terá efeito quando o x_h for igual 1, para algum h interditado mas não fortificado. As restrições (6) garantem que as variáveis x sejam binárias e as restrição (7) garante que z seja não negativo.

4. Prova de validade da desigualdade (5)

Nesta Seção é provada a validade da desigualdade (5) proposta neste artigo. Em outras palavras, é provado aqui que nenhuma solução inteira viável será cortada. Os detalhes de tal prova se encontram na proposição 1.

Proposição 1. *A desigualdade* (5) *é válida.*

Demonstração. Dada uma solução viável $(\overline{Z}, \overline{X})$. Definimos $\overline{L} = \{h \in H | \overline{x}_h = 1\}$. Assim:

$$\overline{Z} = \max_{I \in \mathscr{I}} \{C(\overline{L}, I)\} \tag{8}$$

Seja $\overline{I}$ o argumento que gera o máximo prévio. Devemos provar que

$$\overline{Z} \geq C(L,I) - \sum_{h \in I \setminus L} M_h(L,I) \cdot x_h \quad \forall L \in \mathscr{L}, \forall I \in \mathscr{I}.$$

onde

$$C(L,I) = \textstyle\sum_{i \in J} \sum_{j \in J} w_{ij} \min\limits_{l,m \in L \cup (H \setminus I)} \{c_{ijlm}\}$$

Sejam $L \in \mathscr{L}$ e $I \in \mathscr{I}$, note que:

$$\begin{aligned}
\overline{Z} = C(\overline{L}, \overline{I}) \geq \\
&\geq C(\overline{L}, I) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} w_{ij} \min_{l,m \in \overline{L} \cup (H \setminus I)} \{c_{ijlm}\} \geq \\
&\geq C(L,I) - \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} w_{ij} \max \left\{ 0, \min_{l,m \in L \cup (H \setminus I)} \{c_{ijlm}\} - \min_{l,m \in \overline{L} \cup (H \setminus I)} \{c_{ijlm}\} \right\}
\end{aligned}$$

Definindo J_h como um conjunto de pares $(i,j) \in J \times J$ tais que o hub $h \in \overline{L} \cap (I \setminus L)$ é usado por (i,j) no cálculo de $\overline{Z}$ e adotando:

$$C^*_{ijh} = \min_{\substack{l,m \in H \\ h \in \{l,m\}}} \{C_{ijlm}\},$$

temos

$$\begin{aligned}
\overline{Z} = C(\overline{L}, \overline{I}) \geq\ & C(L,I) - \sum_{h \in \overline{L} \cap (I \setminus L)} \sum_{(i,j) \in J_h} w_{ij} \max \left\{ 0, \min_{l,m \in L \cup (H \setminus I)} \{c_{ijlm}\} - C^*_{ijh} \right\} \geq \\
\geq\ & C(L,I) - \sum_{h \in I \setminus L} M_h(L,I) \cdot x_h
\end{aligned}$$

□

5. Separação de cortes

Na formulação (3)-(7), o número de restrições (5) é exponencial. Assim, estas são geradas sob demanda durante um algoritmo de *branch-and-cut* ao invés de serem todas geradas antes da resolução do modelo. Neste cenário, esta Seção apresenta um modelo PLI usado para separar estas restrições.

Dada uma solução relaxada e inteira $\bar{z}$ e $\bar{x}$ satisfazendo (3), (4), (6), (7) e algumas restrições em (5). Devemos encontrar $L \in \mathscr{L}$ e $I \in \mathscr{I}$ que maximizam a violação em (5), ou seja, maximizam o lado direito destas restrições. Para isso, tomamos L como sendo a estratégia dada pelas variáveis $\bar{x}$, evitando o uso de todos os M-grandes e obtemos a estratégia de interdição I que maximiza $C(L,I)$ através de um modelo PLI com as seguintes variáveis:

$$s_h = \begin{cases} 1 & \text{se o hub } h \text{ foi interditado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$t_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se o } k\text{-ésimo par de hub mais barato do par origem-destino } i \text{ está interditado e todos os} \\ & \text{pares mais baratos também estão} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Além destas variáveis, utilizamos no modelo algumas constantes. A primeira delas é a constante C_{ik}, definida para cada par origem-destino i e cada par de hubs k representando o custo de atendimento do par origem-destino i através do par de hubs k já definidos em (1) e (2). Para cada par origem-destino i é definida a constante $\varphi(i,k)$ denotando o k-ésimo par de hubs mais barato para cada par de origem-destino, ou seja, para acessar o hub mais barato para o par origem-destino i basta usar $\varphi(i,0)$. As estruturas $hub1(k)$ e $hub2(k)$ representam os dois hubs do par de hubs k. A variável t_{ik} somente é criada para os pares de hubs que estão disponíveis a serem interditados, ou seja, se ambos os hubs do par $k \in H$ estiverem fortificados na solução dada por $\overline{x}$, a variável t_{ik} não será criada. A mesma estratégia é utilizada para a criação das variáveis s_h, ou seja, se o hub $h1 \in H$ estiver fortificado, a variável s_{h1} não será criada. Com esta abordagem, o desempenho do modelo é melhorado.

$$\max \quad \sum_{i \in J \times J} C_{\varphi(i,0)} + \sum_{i \in J \times J} \sum_{k \in H \times H} t_{\varphi(ik)} \cdot (C_{\varphi(i,k+1)} - C_{\varphi(i,k)}) \tag{9}$$

$$\text{s.a.} \sum_{h \in H} s_h = r \tag{10}$$

$$t_{ik} \leq s_{hub1(k)} + s_{hub2(k)} \qquad \forall i \in J, k \in H \tag{11}$$

$$t_{\varphi(i,k)} \geq t_{\varphi(i,k+1)} \qquad \forall i \in J, k \in H \tag{12}$$

$$t_{ik} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in J, k \in H \tag{13}$$

$$s_h \in \{0,1\} \qquad \forall h \in H \tag{14}$$

A função objetivo (9) busca maximizar o aumento do custo de atendimento para cada par origem-destino, encontrando assim o pior caso de interdição possível. Nela, o menor custo de atendimento possível para todos os destinos representados pela constante $\sum_{i \in J \times J} C_{\varphi(i,0)}$ é somado ao aumento de custo dado pela interdição de r hubs (somente um hub interditado já é necessário para inutulizar o par). A restrição (10) indica que somente r hubs podem ser interditados. O conjunto de restrições (11) indica que, se a variável t_{ik} for igual a 1, algum dos hubs daquele par deverá estar interditado e o par não poderá atender nenhum destino. Finalmente, as restrições (12) garantem que, se um determinado t_{ik} resultar em 1, todos os t's mais baratos anteriores para aquele mesmo par origem-destino também deverão ter seu valor igual a 1. Caso haja empate, o par origem-destino será atendido pelo par de hubs com o menor índice e a restrição permanece válida.

6. Resultados Computacionais

Nesta Seção são apresentados os resultados computacionais do modelo proposto e justificadas as escolhas feitas para otimização do mesmo. Os testes foram realizados utilizando uma base de dados muito comum em problemas envolvendo hubs, tanto em localização como em interdição, denominada TR81, proposta por Tan e Kara [2007], e que se baseia no transporte de cargas na Turquia, contendo 81 pontos representando cidades numeradas pelos seus códigos. Nesta base são fornecidos o fluxo e a distância entre cada par de pontos. As instâncias foram geradas da seguinte maneira: os p hubs já localizados no sistema (conjunto H) foram obtidos através da resolução do problema da p-mediana em hubs, proposto por Campbell [1994]. Os demais $81 - p$ pontos formam o conjunto J. Os fluxos e as distâncias utilizados são os mesmos da base de dados original. Outros parâmetros das instâncias variam da seguinte maneira: $p \in \{20, 30\}$, $q \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $r \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ e $\alpha \in \{0,6; 0,8; 0,9\}$, sempre tomando $q = r$. Foi utilizado um computador com processador Intel Core i7-4790 3.60GHz CPU e 16 GB de memória RAM tendo o Windows 8.1 como sistema operacional, utilizando CPLEX 12.5.1 e linguagem de programação C++ pela IDE Visual Studio 2015. Para os testes foi utilizada uma única *thread* e os demais parâmetros no valor default.

O procedimento para separação dos cortes (5) é feito da seguinte maneira: para instâncias com q e r pequenos, utilizamos um método enumerativo ao invés do MIP (9)-(14). Além disso, a fim de evitar o uso de algumas separações exatas (método enumerativo ou MIP), nós sempre tentamos achar um corte violado através de uma heurística gulosa. Tal heurística encontra inicialmente os dois hubs que maximizam (9) e os demais $r - 2$ hubs são obtidos iterativamente, um de cada vez, de acordo com o maior acréscimo em (9).

Diversos resultados computacionais são apresentados neste trabalho. Primeiramente, nós comparamos o tempo computacional final do modelo proposto quando os cortes são separados via método enumerativo e via MIP. Isto permitiu que identificássemos a partir de quais valores de q e r se torna mais vantajoso o uso do MIP para a separação. As Tabelas 1 e 2 mostram tal comparação. As três primeiras colunas indicam as características da instância, enquanto as duas demais mostram o tempo computacional, em segundos, do modelo utilizando a separação enumerativa e a separação MIP, respectivamente. Os tempos marcados em negrito representam o menor tempo para cada instância.

Observando as Tabelas 1 e 2, podemos notar que a separação MIP obtém melhores resultados a medida que os valores de q e r crescem. Baseado nestes resultados, optamos por utilizar a separação enumerativa sempre que q e r forem menores ou iguais a seis.

Tabela 1: Comparação entre os tempos da Separação Enumerativa e Separação MIP. p = 20

Características da Instância			**Tempo Computacional (s)**		
p	$q = r$	α	**SEP Enum.**	**SEP MIP**	**#SEP**
20	2	0,6	**0,06**	92,03	7
20	3	0,6	**0,36**	314,50	13
20	4	0,6	**2,36**	778,53	19
20	5	0,6	**22,70**	2.264,86	63
20	6	0,6	**111,53**	1.120,45	97
20	7	0,6	**322,83**	585,36	144
20	8	0,6	909,66	**615,25**	258
20	9	0,6	1.400,52	**484,38**	262
20	10	0,6	1.175,20	**421,42**	235
20	2	0,8	**0,05**	51,13	4
20	3	0,8	**0,44**	155,78	13
20	4	0,8	**3,41**	438,56	27
20	5	0,8	**15,66**	720,30	46
20	6	0,8	**98,95**	819,47	93
20	7	0,8	**242,78**	561,95	112
20	8	0,8	1.213,06	**841,59**	371
20	9	0,8	1.726,94	**503,20**	338
20	10	0,8	1.181,80	**444,42**	319
20	2	0,9	**0,05**	41,98	5
20	3	0,9	**0,33**	158,28	14
20	4	0,9	**2,61**	166,95	24
20	5	0,9	**24,69**	770,08	69
20	6	0,9	**116,89**	782,72	124
20	7	0,9	**371,22**	541,28	183
20	8	0,9	1.236,27	**702,23**	361
20	9	0,9	1.636,66	**412,72**	314
20	10	0,9	1.828,28	**571,23**	475

Para mostrar o impacto do uso da heurística gulosa de separação, nós executamos as instâncias com e sem o uso desta. As Tabelas 3 e 4 mostram a razão entre os tempos computacionais finais sem e com o uso da heurística. Assim, quando esta razão é maior que 1, o uso da heurística é mais vantajoso.

As Tabelas 3 e 4 mostram que, em apenas uma instância ($p = 30$, $\alpha = 0,8$, $q = r = 2$), o uso da heurística não proporcionou um tempo computacional menor. Para 19 das 54 instâncias,

Tabela 2: Comparação entre os tempos da Separação Enumerativa e Separação MIP. p = 30

Características da Instância			Tempo Computacional (s)		
p	$q = r$	α	**SEP Enum.**	**SEP MIP**	**#SEP**
30	2	0,6	**0,08**	71,22	5
30	3	0,6	**0,72**	153,14	9
30	4	0,6	**6,17**	385,16	14
30	5	0,6	**76,45**	743,86	38
30	6	0,6	**799,34**	844,78	89
30	7	0,6	5.845,16	**1.583,50**	164
30	8	0,6	18.017,64	**1.277,50**	173
30	9	0,6	18.017,63	**877,77**	264
30	10	0,6	18.057,89	**815,22**	279
30	2	0,8	**0,09**	56,70	10
30	3	0,8	**0,59**	102,58	9
30	4	0,8	**6,91**	323,94	18
30	5	0,8	**80,44**	597,25	40
30	6	0,8	529,70	**521,83**	59
30	7	0,8	2.997,55	**620,80**	73
30	8	0,8	12.121,05	**594,25**	121
30	9	0,8	18.041,50	**446,08**	121
30	10	0,8	18.037,61	**490,08**	168
30	2	0,9	**0,08**	24,19	4
30	3	0,9	**0,67**	103,72	10
30	4	0,9	**6,84**	164,05	13
30	5	0,9	**69,64**	226,19	22
30	6	0,9	603,67	**344,34**	48
30	7	0,9	4.396,38	**591,47**	139
30	8	0,9	15.557,69	**880,27**	176
30	9	0,9	18.147,06	**539,30**	217
30	10	0,9	18.164,19	**574,56**	319

Tabela 3: Impacto da Heurística. $p = 20$

α	**q = r**								
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0,6	1,33	2,30	3,97	7,27	6,29	6,21	34,36	37,44	16,20
0,8	3,00	3,11	4,36	6,46	13,28	5,13	25,35	26,23	25,17
0,9	3,00	1,40	2,74	6,15	15,78	15,53	14,50	24,55	43,78

Tabela 4: Impacto da Heurística. $p = 30$

α	**q = r**								
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0,6	2,50	4,18	2,41	4,89	5,84	5,94	10,28	10,79	7,07
0,8	0,86	2,38	3,25	4,19	4,47	1,84	4,95	5,89	25,96
0,9	2,50	1,43	2,08	10,69	6,50	3,86	15,02	11,39	16,38

a razão entre os tempos foi maior do que 10. Além disso, as razões possuem uma maior tendência de crescimento a medida em que os valores de q e r aumentam. Conclui-se então que o uso da heurística é adequado independente da instância.

Como não foram encontrados outros métodos exatos para o PMFIH, optamos por comparar o nosso método com um método enumerativo aprimorado, que percorre todas as estratégias viáveis de fortificação porém descarta a avaliação de algumas estratégias de interdição sempre que o melhor custo de fortificação corrente associado não pode ser melhorado. A comparação é mostrada na Tabela 5. Para cada instância, o menor tempo está marcado em negrito.

Ao observar a Tabela 5 podemos observar que, em instâncias com $p = 20$, o modelo proposto neste trabalho exige um tempo computacional menor quando os valores de q e r são menores ou iguais a seis. Porém, mesmo fora desta faixa, o tempo se mantém baixo, não sofrendo uma influência muito brusca do aumento dos parâmetros q e r. Em instâncias com $p = 30$, entretanto, todos os tempos do nosso modelo são menores do que os tempos do método enumerativo, com destaque para instâncias com q e r maiores ou iguais a sete, em que o tempo do método enumerativo se comporta quase exponencialmente e o tempo do método proposto se mostrou mais robusto. Portanto, pode-se concluir que o método proposto é mais robusto que o método enumerativo uma vez que seu tempo não é sensível ao aumento do q e do r.

Tabela 5: Comparação entre os tempos do método enumerativo e do modelo

Características da Instância			**Tempo Computacional (s)**		**Características da Instância**			**Tempo Computacional (s)**	
p	**q = r**	**alfa**	**Enumeração**	**Modelo**	**p**	**q = r**	**alfa**	**Enumeração**	**Modelo**
20	2	0,6	**0,05**	**0,05**	30	2	0,6	0,36	**0,03**
20	3	0,6	1,86	**0,16**	30	3	0,6	20,88	**0,17**
20	4	0,6	6,86	**0,59**	30	4	0,6	171,41	**2,56**
20	5	0,6	14,88	**3,13**	30	5	0,6	640,58	**15,64**
20	6	0,6	32,14	**17,73**	30	6	0,6	2.163,59	**136,80**
20	7	0,6	**17,22**	94,27	30	7	0,6	4.486,55	**266,59**
20	8	0,6	**8,84**	17,91	30	8	0,6	7.260,31	**124,30**
20	9	0,6	**11,31**	12,94	30	9	0,6	7.790,56	**81,31**
20	10	0,6	**15,17**	26,02	30	10	0,6	4.002,73	**115,31**
20	2	0,8	0,22	**0,02**	30	2	0,8	0,89	**0,11**
20	3	0,8	2,38	**0,14**	30	3	0,8	11,44	**0,25**
20	4	0,8	14,89	**0,78**	30	4	0,8	117,88	**2,13**
20	5	0,8	22,64	**2,42**	30	5	0,8	436,98	**19,22**
20	6	0,8	33,08	**7,45**	30	6	0,8	1.027,86	**118,58**
20	7	0,8	**19,08**	109,47	30	7	0,8	1.785,80	**337,34**
20	8	0,8	**10,19**	33,20	30	8	0,8	2.873,83	**119,98**
20	9	0,8	**9,41**	19,19	30	9	0,8	2.173,05	**75,70**
20	10	0,8	**11,98**	17,66	30	10	0,8	1.530,50	**18,88**
20	2	0,9	0,17	**0,02**	30	2	0,9	0,38	**0,03**
20	3	0,9	1,58	**0,23**	30	3	0,9	11,00	**0,47**
20	4	0,9	8,84	**0,95**	30	4	0,9	340,11	**3,30**
20	5	0,9	18,55	**4,02**	30	5	0,9	1.191,19	**6,52**
20	6	0,9	36,70	**7,41**	30	6	0,9	2.514,19	**92,94**
20	7	0,9	**18,88**	34,84	30	7	0,9	5.182,97	**153,34**
20	8	0,9	**10,02**	48,42	30	8	0,9	6.075,27	**58,63**
20	9	0,9	**7,45**	16,81	30	9	0,9	4.640,08	**47,34**
20	10	0,9	**9,89**	13,05	30	10	0,9	3.590,11	**35,08**

Na Tabela 6 são apresentadas as estatísticas detalhadas da árvore de branch-and-bound associada do modelo proposto e nela são usadas novas colunas, como o custo ótimo encontrado pelo modelo, o tempo da raiz em segundos que determina o tempo gasto na raiz do problema, o GAP percentual da raiz que determina a diferença percentual relativa entre o custo total do modelo e o custo obtido na raiz, o número de nós da árvore branch-and-bound, o número de separações do modelo, o número de violações encontradas pela separação heurística, o número de violações encontradas pelas separações exatas, o tempo computacional da separação do modelo e o tempo computacional total do modelo, ambos em segundos.

Na Tabela 6 podemos destacar o GAP da raiz extremamente pequeno, com um máximo de 6,95% e, em três das instâncias, apresentando um GAP de 0%, por terem sido resolvidos na raiz da árvore. Os tempos computacionais obtidos são baixos apesar dos aumentos do número de hubs p, do número de fortificações q e interdições r. Outro dado importante para se analisar é a razão entre cortes encontrados pela heurística e pelos métodos de separação exatos (método enumerativo ou MIP). Esta se mostra alta para boa parte das instâncias, evitando o uso das separações exatas que demandam mais tempo.

7. Conclusão

O presente trabalho apresentou uma nova abordagem para o problema de fortificação e interdição de facilidades, aplicando estes conceitos em um sistema hub-and-spoke, além de propor uma formulação linear inteira mista para o citado problema. Esta aplicação é bastante importante, visto, primeiramente, o aumento de estudos na área de interdição e fortificação de facilidades e também o grande crescimento de redes de transporte que utilizam o modelo utilizando hubs, já comprovado sua eficiência. O modelo apresentou um tempo computacional robusto até mesmo para instâncias grandes, onde o método enumerativo cresce quase exponencialmente. O GAP da raiz se mostrou muito pequeno, comprovando a eficácia do modelo em se aproximar da solução ótima.

Para sugestões de trabalhos futuros deve ser considerada a ampliação do método para a utilização em instâncias assimétricas, ampliando desta maneira a aplicação do modelo. Melhoras podem ser feitas na heurística para que esta seja ainda mais eficiente e gere mais cortes para a separação e de forma mais rápida, já que o tempo necessário na separação consome a grande maioria do tempo do modelo.

Tabela 6: Estatísticas do modelo

Característica da Instância			Custo ótimo do Modelo	Nó da Raíz		Árvore Branch-and-Bound							
p	$q = r$	α		T (s)	GAP	#Nós	#SEP Heu.	#SEP Ex.	#Cortes Heu.	#Cortes Ex.	Tempo SEP Heu. (s)	Tempo SEP Ex. (s)	Tempo Total (s)
20	2	0,6	91.150,65	0,05	1,80%	6	5	2	5	0	0,03	0,00	0,05
20	3	0,6	91.928,85	0,09	2,78%	23	10	4	10	1	0,05	0,08	0,16
20	4	0,6	93.090,50	0,31	3,67%	111	22	4	22	2	0,05	0,41	0,59
20	5	0,6	93.955,94	2,38	4,70%	378	48	7	48	4	0,27	2,63	3,13
20	6	0,6	94.399,27	8,56	5,60%	1051	112	16	112	8	0,72	16,44	17,73
20	7	0,6	93.750,37	37,84	6,87%	1512	212	22	212	7	1,48	91,47	94,27
20	8	0,6	93.266,98	11,42	6,95%	3402	242	7	242	0	1,66	14,63	17,91
20	9	0,6	92.293,48	3,91	6,70%	3838	268	5	268	1	1,95	9,14	12,94
20	10	0,6	91.075,68	5,84	5,00%	4046	232	12	232	0	1,67	22,42	26,02
20	2	0,8	107.511,61	0,02	0,00%	0	3	1	3	0	0,00	0,00	0,02
20	3	0,8	108.919,96	0,14	1,93%	36	8	5	8	0	0,03	0,09	0,14
20	4	0,8	109.191,56	0,59	2,44%	92	22	6	22	1	0,11	0,59	0,78
20	5	0,8	109.533,26	1,81	2,95%	260	47	6	47	0	0,22	2,08	2,42
20	6	0,8	110.101,16	2,95	3,57%	813	97	7	97	4	0,59	6,47	7,45
20	7	0,8	109.772,19	76,13	3,42%	1362	124	13	124	6	0,66	108,13	109,47
20	8	0,8	110.043,81	9,27	4,17%	3868	341	16	341	7	2,38	28,83	33,20
20	9	0,8	109.342,32	7,16	4,08%	5047	420	9	420	1	2,80	13,61	19,19
20	10	0,8	108.428,45	4,48	3,44%	6327	311	9	311	0	2,27	12,48	17,66
20	2	0,9	110.798,01	0,03	0,00%	0	4	1	4	0	0,00	0,00	0,02
20	3	0,9	111.913,28	0,17	1,40%	34	9	7	9	2	0,09	0,13	0,23
20	4	0,9	112.559,18	0,75	1,65%	128	22	8	22	5	0,08	0,77	0,95
20	5	0,9	112.939,73	1,39	2,43%	333	56	11	56	5	0,19	3,66	4,02
20	6	0,9	113.466,75	3,69	2,70%	934	122	7	122	2	0,70	6,28	7,41
20	7	0,9	113.264,01	9,08	2,61%	2085	206	12	206	7	1,17	32,66	34,84
20	8	0,9	113.214,62	5,13	2,96%	4286	379	21	379	14	2,14	43,67	48,42
20	9	0,9	112.623,13	5,22	2,77%	4394	391	9	391	2	2,59	11,67	16,81
20	10	0,9	112.228,36	1,31	2,81%	7593	468	5	468	0	3,09	5,88	13,05
30	2	0,6	69.118,55	0,03	0,65%	4	4	1	4	0	0,02	0,00	0,03
30	3	0,6	70.080,12	0,19	0,63%	0	6	2	6	0	0,05	0,11	0,17
30	4	0,6	70.346,23	2,55	2,41%	112	11	6	11	1	0,09	2,39	2,56
30	5	0,6	70.735,27	15,39	3,12%	346	29	7	29	3	0,27	15,23	15,64
30	6	0,6	71.168,02	58,47	3,81%	954	79	14	79	9	0,67	135,66	136,80
30	7	0,6	71.185,29	36,08	5,08%	1998	199	13	199	7	1,92	263,64	266,59
30	8	0,6	70.882,49	85,92	4,76%	3652	208	11	208	6	1,89	120,59	124,30
30	9	0,6	70.632,15	36,67	5,02%	6664	387	17	387	9	4,02	73,47	81,31
30	10	0,6	70.123,10	20,2	5,45%	8624	380	39	380	26	4,23	106,50	115,31
30	2	0,8	82.947,82	0,09	0,18%	0	6	4	6	0	0,08	0,02	0,11
30	3	0,8	83.600,87	0,25	1,00%	24	8	3	8	1	0,05	0,16	0,25
30	4	0,8	83.935,41	0,47	1,37%	78	19	5	19	2	0,16	1,92	2,13
30	5	0,8	84.245,06	10,64	2,23%	254	28	9	28	4	0,25	18,83	19,22
30	6	0,8	84.161,15	54,84	2,24%	509	54	13	54	7	0,42	117,86	118,58
30	7	0,8	84.124,64	54,97	2,22%	926	96	19	96	11	0,84	335,80	337,34
30	8	0,8	84.167,45	17,61	2,73%	2688	165	13	165	8	1,48	117,14	119,98
30	9	0,8	83.854,12	26,61	2,52%	3420	186	23	186	13	1,98	72,22	75,70
30	10	0,8	83.640,31	8,39	2,35%	4877	156	8	156	3	1,56	15,42	18,88
30	2	0,9	83.267,47	0,03	0,00%	0	3	1	3	0	0,02	0,00	0,03
30	3	0,9	83.801,61	0,3	0,58%	21	5	7	5	4	0,08	0,36	0,47
30	4	0,9	84.190,11	2,44	0,94%	141	17	8	17	5	0,16	3,09	3,30
30	5	0,9	84.243,36	6,39	1,07%	373	27	3	27	1	0,20	6,22	6,52
30	6	0,9	84.572,94	55,3	1,50%	1225	52	10	52	6	0,34	92,06	92,94
30	7	0,9	84.668,87	51,92	1,87%	2711	130	28	130	20	1,06	151,00	153,34
30	8	0,9	84.448,18	13,09	1,92%	2843	175	13	175	7	1,53	55,73	58,63
30	9	0,9	84.407,00	14,02	1,85%	6586	256	18	256	13	2,30	41,84	47,34
30	10	0,9	84.351,33	11,58	2,10%	13379	384	14	384	7	3,80	25,22	35,08

Referências

Aliakbarian, N., Dehghanian, F., e Salari, M. (2015). A bi-level programming model for protection of hierarchical facilities under imminent attacks. *Computers & Operations Research*, 64:210 – 224. ISSN 0305-0548.

Azizi, N., Chauhan, S., Salhi, S., e Vidyarthi, N. (2016). The impact of hub failure in hub-and-spoke networks: Mathematical formulations and solution techniques. *Computers & Operations Research*, 65:174 – 188. ISSN 0305-0548.

Brown, G., Carlyle, M., Salmerón, J., e Wood, K. (2006). Defending critical infrastructure. *Interfaces*, 36(6):530–544.

Campbell, J. F. (1994). Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72(2):387 – 405. ISSN 0377-2217.

Chaharsooghi, S., Momayezi, F., e Ghaffarinasab, N. (2017). An adaptive large neighborhood search heuristic for solving the reliable multiple allocation hub location problem under hub disruptions. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 8(2):191–202.

Church, R. L., Scaparra, M. P., e Middleton, R. S. (2004). Identifying critical infrastructure: the median and covering facility interdiction problems. *Annals of the Association of American Geographers*, 94(3):491–502.

Church, R. L. e Scaparra, M. P. (2007). Protecting critical assets: The r-interdiction median problem with fortification. *Geographical Analysis*, 39(2):129–146.

Israeli, E. e Wood, R. K. (2002). Shortest-path network interdiction. *Networks*, 40(2):97–111.

Lei, T. L. (2013). Identifying critical facilities in hub-and-spoke networks: A hub interdiction median problem. *Geographical Analysis*, 45(2):105–122. ISSN 1538-4632.

Mohammadi, M., Tavakkoli-Moghaddam, R., Siadat, A., e Dantan, J.-Y. (2016). Design of a reliable logistics network with hub disruption under uncertainty. *Applied Mathematical Modelling*, 40 (9–10):5621 – 5642. ISSN 0307-904X.

O'Hanley, J. R. e Church, R. L. (2011). Designing robust coverage networks to hedge against worst-case facility losses. *European Journal of Operational Research*, 209(1):23–36.

Parvaresh, F., Hashemi Golpayegany, S. A., Moattar Husseini, S. M., e Karimi, B. (2013). Solving the p-hub median problem under intentional disruptions using simulated annealing. *Networks and Spatial Economics*, 13(4):445–470. ISSN 1572-9427.

Parvaresh, F., Husseini, S. M., Golpayegany, S. H., e Karimi, B. (2014). Hub network design problem in the presence of disruptions. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 25(4):755–774. ISSN 1572-8145.

Snyder, L. V., Atan, Z., Peng, P., Rong, Y., Schmitt, A. J., e Sinsoysal, B. (2016). Or/ms models for supply chain disruptions: a review. *IIE Transactions*, 48(2):89–109.

Tan, P. Z. e Kara, B. Y. (2007). A hub covering model for cargo delivery systems. *Networks*, 49(1): 28–39.