



## Variante Verde do Problema Integrado de Roteamento de Veículos com Empacotamento Ortogonal Bidimensional

Thiago Alves de Queiroz<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>Unidade de Matemática e Tecnologia, UFG/Regional Catalão,  
Av. Dr. Lamartine P. Avelar, 1120, Setor Universitário, 75704-020, Catalão-GO.  
taq@ufg.br

Franklina M. Bragion Toledo<sup>b</sup>

<sup>b</sup>Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, ICMC-USP,  
Av. Trabalhador São-Carlense, 400, Cx. Postal 668, 13560-970, São Carlos-SP.  
fran@icmc.usp.br

### RESUMO

Questões relacionadas ao consumo de combustível e a emissão de gases por veículos de carga têm se tornado muito relevantes recentemente. O problema integrado que envolve a determinação de rotas para veículos observando a forma geométrica de organizar os itens dentro dos veículos é investigado neste trabalho sob a perspectiva de minimização do consumo de combustível. Emprega-se um modelo de programação linear inteira mista para o problema, em que o consumo de combustível está relacionado ao peso da carga transportado e a distância percorrida. O modelo é resolvido por um algoritmo *branch-and-cut*, em que cortes de capacidade e conectividade das rotas, bem como de empacotamento nas rotas, são inseridos durante o processo de resolução. Os resultados computacionais indicam que a minimização do gasto com combustível pode aumentar o tamanho das rotas em 0,78%, na média, para o cenário em que se deve usar todos os veículos disponíveis no depósito.

**PALAVRAS CHAVE.** Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento. Empacotamento Bidimensional. Logística Verde.

**Tópicos:** PM – Programação Matemática. OC - Otimização Combinatória.

### ABSTRACT

Questions related to the fuel consumption and gas emissions by cargo vehicles have become very interesting recently. The integrated problem that involves finding routes for vehicles while observing the geometric shape of items during the arrangement on the vehicles is investigated in this work under the analysis of minimizing the fuel consumption. It is used an integer linear programming model for the problem in which the fuel consumption is related with the load transported and the traveled distance. The model is solved by a branch-and-cut algorithm in which cutting planes related to the capacity and connectivity of routes as well as of packing in routes are added during the process of resolution. The computational experiments indicate that only minimizing the expenses with fuel can increase the size of the routes of 0,78%, on average, for the scenario in which it necessary to use all the vehicles available at the depot.

**KEYWORDS.** Vehicle Routing Problem with Loading Constraints. Two-dimensional Packing. Green Logistic.

**Paper Topics:** PM - Mathematical Programming. OC - Combinatorial Optimization.



## 1. Introdução

As empresas do ramo logístico buscam reduzir os custos envolvidos no processo de transporte. Ao mesmo tempo, a sociedade tem exigido a redução nos níveis de poluição gerado pelas atividades empresariais, como forma de evitar problemas como o aquecimento global. Por isso, as empresas atualmente devem buscar soluções de compromisso, que não apenas minimizem o custo de suas operações diárias, mas que também levem em conta aspectos ambientais e de melhoria da qualidade de vida da população.

Este artigo busca atuar na linha de minimização do combustível consumido pelos veículos durante o planejamento de rotas. Lin et al. [2014] discutiram sobre a importância em considerar os efeitos do consumo de combustível e a emissão de gases poluentes na atmosfera nas decisões que envolvem o problema de roteamento de veículos. Eles classificaram como as *variantes verdes* do referido problema aquelas variantes que buscam pela otimização da energia consumida durante o transporte, redução na emissão de gases poluentes e aspectos de logística reversa.

Conforme Kumar et al. [2016], a quantidade de gases poluentes emitida, em especial o gás carbônico ( $CO_2$ ), pelos veículos, está diretamente relacionada com o combustível consumido que, por sua vez, pode ser influenciado pela velocidade do veículo, inclinação das rodovias, trânsito, tipo de motorista, tipo da frota e a quantidade de carga transportada. Outros fatores ainda podem influenciar no custo das rotas, embora não estejam ligados diretamente ao consumo de combustível, como a depreciação dos veículos, as taxas governamentais e as manutenções. Na mesma linha, Toro et al. [2016] apontaram que as metodologias propostas na literatura para avaliar as emissões estão relacionadas com a quantidade de combustível consumida, a velocidade que o veículo assume durante cada percurso, a distância e a quantidade de carga transportada entre dois destinos, entre outros.

Em Figliozzi [2010] há uma função que associa a quantidade de emissões com as velocidades assumidas durante a rota, com base em um estudo idealizado pelo Laboratório de Pesquisa em Transporte do Reino Unido. Por outro lado, Xiao et al. [2012] associaram o gasto de combustível a quantidade de carga sendo transportada e a distância percorrida. Os autores estenderam o problema de roteamento de veículos de forma a ter como objetivo a minimização do gasto com combustível em função da quantidade de carga transportada por trecho de rota, em detrimento a observar apenas do custo total das rotas. Por sua vez, Erdoğan e Miller-Hooks [2012] buscaram analisar, no problema de roteamento de veículos, o impacto do reabastecimento de veículos durante a construção das rotas.

Estudos mais recentes, como Ma et al. [2017], têm relacionado o impacto da emissão de gases no custo das rotas em redes de tráfego dinâmicas. Em particular, os autores buscaram precificar as rotas em função da quantidade de combustível consumida (dependente da velocidade do veículo) e do tempo total das viagens (que inclui o tempo do veículo parado no trânsito). Outros problemas que envolvem a integração com o roteamento de veículos, como o problema de localização e roteamento, também têm sido investigados na literatura com relação às variantes verdes. Toro et al. [2017a] consideraram uma formulação bi-objetivo para a versão aberta do problema de localização e roteamento, que incorpora o consumo de combustível e os custos relacionados ao depósitos abertos e as rotas construídas. Toro et al. [2017b] também consideraram uma formulação com dois objetivos, todavia para a versão capacitada do problema de localização e roteamento.

Nesse artigo, considera-se a minimização do gasto com combustível, dado o uso de um número fixo de veículos, no contexto do Problema de Roteamento de Veículos com restrições de Empacotamento Bidimensional (com a sigla, do inglês, 2L-CVRP), sendo, então, denominado de *variante verde (Green)*, isto é, por G2L-CVRP. Ao que se conhece, questões ambientais ainda não foram consideradas no contexto do 2L-CVRP, que surge a partir da combinação de dois problemas NP-difíceis, que são o problema de roteamento de veículos capacitados e o problema de empacotamento em *bins* bidimensional [Iori et al., 2007].

O modelo adotado para o consumo de combustível relaciona a distância percorrida com a



carga transportada em cada trecho da rota, sendo um dos modelos mais populares da literatura [Lin et al., 2014]. No caso do G2L-CVRP, observa-se a forma geométrica dos itens, ou seja, a viabilidade do empacotamento dos itens em cada trecho, que pode impactar diretamente na solução e é mais realista do que considerar apenas a demanda unidimensional de peso dos clientes. A viabilidade do empacotamento pressupõe que os itens, que possuem a base retangular, sejam organizados sem sobreposição e inteiramente contidos na superfície retangular do veículo. Um apanhado geral de problemas de roteamento integrados com problemas de empacotamento foi realizado por Iori e Martello [2013]; Pollaris et al. [2015].

Os estudos envolvendo o 2L-CVRP estão focados principalmente na *variante irrestrita* [Duhamel et al., 2011; Dominguez et al., 2014; Silva et al., 2016], em que o empacotamento (e posterior descarregamento) dos itens não precisa respeitar a ordem em que os clientes são visitados na rota, e na *variante sequencial* [Iori et al., 2007; Fuellerer et al., 2009; Hokama et al., 2016], em que já é preciso respeitar a ordem dos clientes na rota e empacotar os itens de forma que não haja remanejamento da carga durante o descarregamento em cada cliente. Outras variantes do 2L-CVRP foram investigadas, como é o caso de conflitos parciais entre itens, demanda estocástica, janela de tempo, frota heterogênea e múltiplas viagens [Leung et al., 2013; Martinez e Amaya, 2013; Dominguez et al., 2016], todavia sem considerar, até o presente momento, aspectos ambientais.

As contribuições desenvolvidas pela literatura para o 2L-CVRP e suas variantes são, em sua maioria, métodos heurísticos, como busca tabu, colônia de formigas, busca em vizinhança, recozimento simulado, algoritmo genético, entre outros [Fuellerer et al., 2009; Leung et al., 2010; Wei et al., 2015; Queiroz e Toledo, 2016]. A proposta de métodos exatos, ainda com poucas contribuições na literatura, tem sido limitada a resolução de modelos de programação linear inteira por um método *branch-and-cut* [Iori et al., 2007; Hokama et al., 2016; Côté et al., 2017]. Nesse trabalho, o G2L-CVRP é resolvido por um *branch-and-cut*, que resolve um modelo de programação linear inteira mista e adiciona desigualdades válidas de capacidade e conectividade das rotas, bem como de rotas inviáveis quanto ao empacotamento.

O artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 define o G2L-CVRP, com seus parâmetros, conjuntos, restrições e objetivo; a Seção 3 apresenta um modelo de programação linear inteira mista para o problema, em que procedimentos de separação são usados para identificar desigualdades violadas com respeito a capacidade, conectividade e empacotamento nas rotas; a Seção 4 traz os experimentos realizados sobre instâncias da literatura propostas para o 2L-CVRP evidenciando que a minimização do gasto com combustível impacta em um aumento razoável no tamanho das rotas, mesmo ao considerar o empacotamento bidimensional dos itens; por fim, as conclusões e as direções para trabalhos futuros são discutidas na Seção 5.

## 2. Definição do G2L-CVRP

Para definir o 2L-CVRP, usa-se: um conjunto  $V = \{0, 1, \dots, n\}$ , em que 0 representa o depósito e os demais elementos são os clientes; um conjunto  $E$  contendo os arcos  $e = (i, j)$  entre todos os pares de elementos  $i, j \in V$ , tal que a cada um desses arcos está associado um custo não negativo  $c_e$  e uma distância  $d_e$  para atravessar o arco  $e$ ; um conjunto  $K$  de veículos idênticos, cada qual disponível no depósito, com capacidade de carga  $Q$  e base retangular de largura  $L$ , comprimento  $C$  e área total  $A = LC$ ; e, um conjunto  $M$  de itens retangulares particionado entre os clientes de  $j \in V \setminus \{0\}$ , tal que existe o subconjunto  $M_j$ , com os itens do cliente  $j$ , de forma que cada item  $r \in M_j$  possui largura  $l_{rj}$ , comprimento  $c_{rj}$ , peso  $p_{rj}$  e área  $a_{rj}$ , o que resulta no peso total demandado pelo cliente  $j$  de  $P_j$  e a área total de  $A_j$ . As dimensões dos itens e da base do veículo são considerados valores inteiros positivos.

O objetivo do 2L-CVRP é obter um conjunto de rotas de custo total mínimo satisfazendo as seguintes restrições: (i) cada rota inicia e termina no depósito; (ii) cada veículo realiza uma única rota, sendo obrigatório usar todos veículos disponíveis em  $K$ ; (iii) cada rota pode conter um ou mais clientes; (iv) cada rota está limitada pela capacidade de carga  $Q$  e de área  $A$  do veículo; (v) cada veículo deve conter, em sua base, um empacotamento viável dos itens dos clientes visitados



na dada rota, tal que quaisquer dois itens não se sobreponha, cada item está inteiramente contido na base do veículo, os lados dos itens estão organizados de forma paralela aos lados da base do veículo, os itens não podem ser rotacionados para fins de empacotamento e cada item é empacotado tomando como base o posicionamento do seu canto inferior esquerdo na base do veículo; e, (vi) cada cliente está em uma única rota e é visitado uma única vez pelo veículo, tal que os seus itens são entregues totalmente nessa visita e pode ocorrer o remanejamento de certos itens durante a operação de descarregamento, uma vez que podem estar bloqueando a retirada dos itens do cliente (versão irrestrita do G2L-CVRP).

O desenvolvimento para o G2L-CVRP considera a proposta de Xiao et al. [2012], que relaciona o gasto com combustível com a quantidade de carga transportada em cada trecho da rota. Para tanto, seja  $c_0$  o custo unitário de combustível,  $\rho_e$  a taxa de consumo de combustível por unidade de distância e  $d_e$  a distância para ir diretamente de  $i$  para  $j$ , dado o arco  $e = (i, j)$ . Assim, para cada arco  $e \in E$ , o custo de combustível para percorrê-lo é expresso por  $F_e$ , a saber:

$$F_e = c_0 \rho_e d_e. \quad (1)$$

O valor de  $\rho_e$  está diretamente relacionado com a sequência de clientes visitados, mais precisamente, com a carga  $y_e$  empacotada e transportada no arco  $e$ . A partir disso, Xiao et al. [2012] estabeleceram que:

$$\rho_e = \rho_0 + \frac{\rho_f - \rho_0}{Q} y_e = \rho_0 + \alpha y_e, \quad (2)$$

em que  $\rho_0$  e  $\rho_f$  são as taxas de consumo de combustível por unidade de distância quando o veículo está vazio e completamente cheio, respectivamente. Estas taxas podem ser determinadas a priori para condições específicas de terreno, velocidade e características dos veículos de carga, tipo de trânsito, entre outras. Usa-se  $\alpha$  para representar a fração de combustível consumida por unidade de carga transportada. É importante destacar que a quantidade de quilos de  $CO_2$  emitida no arco  $e$  pode ser obtida a partir da quantidade de litros de combustível consumida neste arco, bastando aplicar um fator de conversão direta, que depende do tipo de combustível e das características do veículo [Toro et al., 2017b].

O G2L-CVRP considera os mesmos conjuntos e restrições do 2L-CVRP, porém seu objetivo é minimizar o gasto total com combustível, que implica em determinar um conjunto de  $|K|$  rotas que resulte no mínimo de combustível consumido. Embora seja usado exatamente  $|K|$  veículos, pode ser interessante balancear o gasto com combustível com o custo total das rotas, ou seja, usar menos veículos pode resultar rotas com mais carga sendo transportada, ao passo que usar mais veículos pode resultar em rotas com menos carga total [Toro et al., 2017b].

### 3. Modelo para o G2L-CVRP

O G2L-CVRP é modelado com função objetivo (3) e restrições em (4) a (14), em que as variáveis de decisão são:

$$x_e = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } e \in E \text{ é percorrido por algum veículo,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_e \geq 0, \quad \text{é o peso da carga sendo transportada no arco } e \in E \text{ por algum veículo.}$$

$$\text{Minimizar } \sum_{e \in E} c_0 d_e (\rho_0 x_e + \alpha y_e) \quad (3)$$

Sujeito a:

$$\sum_{\{e \in E: e=(0,j), j \in V \setminus \{0\}\}} x_e = |K|, \quad (4)$$

$$\sum_{\{e \in E: e=(j,0), j \in V \setminus \{0\}\}} x_e = |K|, \quad (5)$$



$$\sum_{\{e \in E: e=(j,i), i \in V \setminus \{j\}\}} x_e = 1, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \quad (6)$$

$$\sum_{\{e \in E: e=(i,j), i \in V \setminus \{j\}\}} x_e = 1, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \quad (7)$$

$$x_e + x_{e'} \leq 1, \quad \forall e, e' \in E : e = (i, j), e' = (j, i), i, j \in V \setminus \{0\}, \quad (8)$$

$$\sum_{\{e \in E: e=(i,j), i, j \in S, i \neq j\}} x_e \leq |S| - R(S), \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, |S| \neq \emptyset, \quad (9)$$

$$\sum_{\{e \in E: e=(i,j), i, j \in S, i \neq j\}} x_e \leq |S| - 1, \quad \forall S \in \mathcal{S}, \quad (10)$$

$$\sum_{\{e \in E: e=(i,j), i \in V \setminus \{j\}\}} y_e - \sum_{\{e' \in E: e'=(j,h), h \in V \setminus \{j\}\}} y_{e'} = P_j, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \quad (11)$$

$$y_e \leq Qx_e, \quad \forall e \in E, \quad (12)$$

$$y_{e'} \leq (1 - x_e)Q, \quad \forall e, e' \in E : e = (i, j), e' = (j, i), i, j \in V, \quad (13)$$

$$x_e \in \{0, 1\}, y_e \geq 0, \quad \forall e \in E. \quad (14)$$

A função objetivo segue da definição (1) e fornece o custo total das rotas com combustível, que deve ser mínimo. As restrições (4) e (5) definem o número de veículos que deixa o depósito e regressa ao depósito, respectivamente, isto é, o número de rotas realizadas. As restrições (6) e (7) dizem respeito ao grau de cada nó cliente, ou seja, que para cada cliente  $j$ , tem-se exatamente um arco chegando e um arco saindo. As restrições em (8) impõem que, ou um arco começa no cliente  $i$  e termina no  $j$ , ou começa em  $j$  e termina em  $i$ , mas não ambos, uma vez que a simetria não pode ocorrer nas rotas devido a sequência de clientes visitados e, assim, ao quanto de carga que está indo de um cliente para o outro.

Com relação a conectividade e a capacidade das rotas e, assim, para evitar sub-rotas, tem-se as restrições (9), que asseguram o número de rotas necessárias para atender a demanda de cada subconjunto de clientes  $S$ , bem como manter a conectividade entre os clientes. A função  $R(S)$  retorna a quantidade mínima de veículos necessária para atender a demanda de peso e área dos clientes em  $S$ , podendo ser aproximada pela função  $R'(S) = \max \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{j \in S} P_j}{Q} \right\rceil, \left\lceil \frac{\sum_{j \in S} A_j}{A} \right\rceil \right\}$  [Lysgaard et al., 2004]. De forma similar, as restrições em (10) são usadas para eliminar as rotas do conjunto  $S$ , que é o conjunto com todas as rotas inviáveis quanto ao empacotamento bidimensional na base do veículo.

As restrições (11) a (13) estão relacionadas a quantidade de carga transportada até visitar um determinado cliente. Nas restrições (11), tem-se o balanço de fluxo de carga em cada cliente, impondo que sejam entregues pelo veículo os itens demandados ( $P_j$ ). As restrições em (12) impõem que, ao visitar um determinado cliente, a capacidade de carga do veículo seja respeitada, além de forçar  $y_e$  ser zero caso a aresta  $e$  não tenha sido usada em alguma rota. De forma similar, propõem-se as restrições (13) para fortalecer o modelo, com base nas restrições (8), que forçam  $y_{e'}$  a ser zero quando o arco  $x_e$  é usado, sabendo que  $e$  é o arco indo de  $i$  para o  $j$ , ao passo que  $e'$  é o arco que vai de  $j$  para  $i$ . Por fim, as restrições (14) impõem o domínio das variáveis de decisão.



### 3.1. Procedimentos de Separação

O número total de restrições (9) e (10) é exponencial e, por isso, optou-se por detectá-las e inseri-las durante o processo de otimização por procedimentos especializados de planos de corte. Estes procedimentos podem ser aplicados quando uma solução inteira ou fracionária for encontrada em cada nó da árvore de busca. Em particular, o procedimento para as restrições (10) é aplicado somente quando uma solução inteira é obtida na árvore.

Para as restrições de conectividade e capacidade (9), usa-se o procedimento descrito e disponibilizado por Lysgaard et al. [2004], que consiste na aplicação de heurísticas sobre a solução obtida no nó da árvore de busca. Aplica-se o procedimento duas vezes, uma considerando apenas a capacidade de peso  $e$ , assim,  $R'(S)$  contém apenas a parte da demanda por peso  $Q$  do veículo, enquanto que na seguinte se considera apenas a demanda por área  $A$  do veículo.

O procedimento de conectividade e capacidade arredondada de Lysgaard et al. [2004] cria, para cada nó da árvore, um grafo de suporte com o valor da aresta  $e$  sendo o resultado de  $x_e$  encontrado neste nó. Em seguida, as heurísticas buscam por componentes no grafo de suporte que originam subconjuntos de clientes  $S$  e, assim, cada um destes subconjuntos é usado para checar a violação da desigualdade (9). Caso haja violação para algum subconjunto  $S$ , adiciona-se uma restrição do tipo (9) considerando  $S$ .

O procedimento usado para detectar rotas inviáveis quanto a viabilidade do empacotamento  $e$ , assim, inserir uma desigualdade do tipo (10) para o conjunto  $S$  de clientes da rota inviável, consiste em checar a viabilidade do empacotamento por meio da resolução de um modelo de programação linear inteira. O modelo é aplicado em cada rota  $S$ , que possua dois ou mais clientes, dada uma solução inteira encontrada durante o processo de otimização. O modelo de empacotamento possui como variáveis de decisão:

$$z_{rab} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } r \text{ é tem seu canto inferior esquerdo posicionado no ponto } (a, b), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O modelo para checar a viabilidade do empacotamento é dado pelas restrições (15) a (19) e não possui função objetivo, pois o interesse é verificar se os itens dos clientes em  $S$  podem ser empacotados na base retangular do veículo. O modelo considera que esta base é formada por uma malha geral de pontos,  $H_L \times H_C$ , conhecida por *canonical dissections* de [Herz, 1972], e os itens são empacotados sobre pontos da malha. A malha geral é formada a partir das combinações cônicas envolvendo as dimensões dos itens e da base do veículo, o que resulta também numa submalha específica  $H_L(r) \times H_C(r)$  com pontos válidos para o item  $r$ .

$$\sum_{j \in S} \sum_{r \in M_j} \sum_{\{a \in H_L(r): t-l_{r,j}+1 \leq a \leq t\}} \sum_{\{b \in H_C(r): u-c_{r,j}+1 \leq q \leq u\}} z_{rab} \leq 1, \quad \forall t \in H_L, \forall u \in H_C, \quad (15)$$

$$\sum_{j \in S} \sum_{r \in M_j} \sum_{\{a \in H_L(r): t-l_{r,j}+1 \leq a \leq t\}} \sum_{\{b \in H_C(r)\}} c_{r,j} z_{rab} \leq C, \quad \forall t \in H_L, \quad (16)$$

$$\sum_{j \in S} \sum_{r \in M_j} \sum_{\{a \in H_L(r)\}} \sum_{\{b \in H_C(r): u-c_{r,j}+1 \leq q \leq u\}} l_{r,j} z_{rab} \leq L, \quad \forall u \in H_C, \quad (17)$$

$$\sum_{a \in H_L(r)} \sum_{b \in H_C(r)} z_{rab} = 1, \quad \forall j \in S, \forall r \in M_j, \quad (18)$$

$$z_{rab} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in S, \forall r \in M_j, \forall p \in H_L(r), \forall q \in H_C(r). \quad (19)$$

As restrições em (15) asseguram que cada ponto da malha  $(t, u) \in H_L \times H_C$  seja coberto por no máximo um item  $r$  de algum cliente  $j$  da rota  $S$  para, assim, evitar que haja sobreposição



entre itens. Por sua vez, desenvolvem-se as restrições (16) e (17) a fim de fortalecer o modelo, as quais impõem que cada linha vertical (e horizontal) associada a cada coordenada no conjunto  $H_L$  (e  $H_C$ ) está coberta por itens cuja soma do comprimento (e de largura) seja limitada ao comprimento  $C$  (e largura  $L$ ) da base do veículo. O domínio das variáveis de decisão é imposto nas restrições (19).

#### 4. Experimentos Computacionais

Para fins de validação do modelo desenvolvido, considerou-se a implementação na linguagem de programação C++ com suporte pelo *Gurobi Optimizer*, versão 7.0, para o algoritmo *branch-and-cut*. Os experimentos ocorreram em um computador com as seguintes características: sistema operacional Linux Ubuntu 14.04 LTS, processador Intel Core i7-4790K CPU 4 GHz e 32 GB de memória RAM.

As instâncias usadas nos experimentos foram obtidas de Iori et al. [2007] e consistem em um total de 60 instâncias divididas em 12 grupos, cada um com 5 instâncias variando conforme a classe. A classe 1 envolve instâncias puras do problema de roteamento de veículos, ao passo que as classes de 2 a 5 consideram o mesmo conjunto de vértices e arestas da classe 1, porém os clientes passam a ter itens bidimensionais de tamanhos variados, entre homogêneos, mais largos e mais cumpridos. Nestas instâncias, a quantidade de clientes varia entre 15 até 36, enquanto há entre um total de 15 a 114 itens.

A resolução de cada instância foi limitada em duas horas (7200 segundos), sendo que a cada chamada do modelo de empacotamento foi imposto um tempo limite de uma hora (3600 segundos). Assim, a melhor solução encontrada pelo *branch-and-cut* dentro do período de 7200 segundos é retornada. No caso dos parâmetros associados ao custo do combustível na função objetivo (3), adotaram-se os mesmos utilizados em Xiao et al. [2012], a saber:  $c_0 = 1$ ,  $\rho_0 = 1$  e  $\rho_f = 2$ .

As Tabelas 1 e 2 trazem os resultados para as 60 instâncias consideradas, sendo que em cada linha das tabelas há: nome da instância com a classe, número de clientes, total de cortes de conectividade e capacidade, total de cortes para as rotas inviáveis para o empacotamento, tempo total gasto (em segundos) com o modelo de empacotamento, tempo total gasto para resolver a instância, valor da solução para o G2L-CVRP, custo total das rotas para o G2L-CVRP, custo total das rotas para o 2L-CVRP, diferença (em porcentagem) entre a custo das rotas para o G2L-CVRP com a do 2L-CVRP. Usa-se '\*' para marcar as soluções que não são comprovadas ótimas, uma vez que o tempo limite foi atingido durante a resolução da instância (7200 segundos).

Os resultados na Tabela 1 indicam que todas as 30 instâncias foram resolvidas na otimalidade, com tempo total médio de 114,98 segundos por instância, sendo que o tempo gasto para resolver o modelo de empacotamento foi de 104,79 segundos, na média. Isso mostra que a maior parte do tempo total para resolver essas instâncias está relacionado com o checagem da viabilidade do empacotamento nas rotas. Por sua vez, a média de cortes de capacidade e conectividade inseridos por instância foi de 1275, ao passo que houve uma média de 6 cortes de empacotamento por instância. Embora o número de cortes de empacotamento inserido por instância tenha sido pequeno, o tempo gasto com o modelo de empacotamento foi relativamente alto quando comparado ao tempo total médio gasto por instância.

Ao comparar o tamanho das rotas entre as soluções do G2L-CVRP com as do 2L-CVRP, nos resultados da Tabela 1, tem-se diferença no tamanho das rotas para 22 das 30 instâncias, em que houve um aumento médio de cerca de 1,10% para o G2L-CVRP. Esse aumento no tamanho das rotas acaba ocorrendo pela necessidade de economizar combustível, pois o gasto com o combustível está relacionado com a quantidade de carga transportada e a distância percorrida. Assim, pode ser preferível percorrer uma rota de distância maior, porém com o veículo menos carregado, o que pode facilitar a checagem da viabilidade do empacotamento, para gerar uma melhor economia no consumo de combustível.

A Tabela 2 traz os resultados para as 30 instâncias restantes do conjunto de 60 instâncias. Os resultados mostram que 12 destas 30 instâncias não foram resolvidas na otimalidade, pois o



Tabela 1: Resultado para as primeiras 30 instâncias do conjunto.

Nome	n	Cortes Con.-Cap.	Cortes Emp.	Tempo Emp. (s)	Tempo Total (s)	Sol. G2L-CVRP	Rotas G2L-CVRP	Rotas 2L-CVRP	Diferença (%)
E016-03m.1	15	906	0	0,00	5,35	373,98	273,00	273,00	0,00
E016-03m.2	15	2828	18	73,34	92,92	378,76	278,00	273,00	1,83
E016-03m.3	15	1515	3	48,05	53,92	380,23	279,00	279,00	0,00
E016-03m.4	15	12	1	3,80	4,42	355,90	280,00	277,00	1,08
E016-03m.5	15	17	2	272,59	273,24	356,30	284,00	277,00	2,53
E016-05m.1	15	683	0	0,00	1,73	456,87	331,00	329,00	0,61
E016-05m.2	15	683	0	0,03	1,88	456,87	331,00	329,00	0,61
E016-05m.3	15	5553	9	17,47	64,90	476,36	353,00	347,00	1,73
E016-05m.4	15	683	0	2,29	4,93	456,87	331,00	329,00	0,61
E016-05m.5	15	683	0	0,92	3,54	456,87	331,00	329,00	0,61
E021-04m.1	20	3533	0	0,01	25,58	488,45	351,00	351,00	0,00
E021-04m.2	20	1263	28	12,58	25,67	494,89	389,00	381,00	2,10
E021-04m.3	20	1835	98	2211,25	2253,22	500,14	391,00	387,00	1,03
E021-04m.4	20	588	6	101,12	106,78	489,47	381,00	369,00	3,25
E021-04m.5	20	89	0	1,67	2,97	481,00	375,00	369,00	1,63
E021-06m.1	20	965	0	0,00	2,28	596,60	434,00	423,00	2,60
E021-06m.2	20	965	0	1,50	3,96	596,60	434,00	423,00	2,60
E021-06m.3	20	965	0	2,99	6,21	596,60	434,00	423,00	2,60
E021-06m.4	20	4855	4	52,41	120,79	610,10	453,00	438,00	3,42
E021-06m.5	20	965	0	0,73	3,63	596,60	434,00	423,00	2,60
E022-04g.1	21	64	0	0,00	0,43	509,07	367,00	367,00	0,00
E022-04g.2	21	70	1	12,74	13,41	509,07	367,00	367,00	0,00
E022-04g.3	21	114	4	15,84	17,96	515,43	373,00	373,00	0,00
E022-04g.4	21	1806	12	274,04	285,19	529,85	377,00	377,00	0,00
E022-04g.5	21	77	0	1,73	3,02	527,95	389,00	389,00	0,00
E022-06m.1	21	1073	0	0,00	3,09	680,77	490,00	488,00	0,41
E022-06m.2	21	1314	1	2,70	8,69	680,77	490,00	488,00	0,41
E022-06m.3	21	1322	1	3,63	11,38	680,78	490,00	489,00	0,20
E022-06m.4	21	1764	6	29,36	43,72	681,10	490,00	489,00	0,20
E022-06m.5	21	1073	0	1,00	4,55	680,77	490,00	488,00	0,41





Tabela 2: Resultado para as demais 30 instâncias do conjunto.

Nome	n	Cortes Con.-Cap.	Cortes Emp.	Tempo Emp. (s)	Tempo Total (s)	Sol. G2L-CVRP	Rotas G2L-CVRP	Rotas 2L-CVRP	Diferença (%)
E023-03g.1	22	228	0	0,00	1,13	708,98	563,00	558,00	0,90
E023-03g.2	22	4367	157	123,97	382,02	827,11	715,00	715,00	0,00
E023-03g.3	22	279	15	101,10	109,21	808,10	685,00	685,00	0,00
E023-03g.4	22	1823	121	7147,15	7200,00	844,09*	717,00*	717,00*	0,00
E023-03g.5	22	275	6	17,00	20,54	861,56	746,00	742,00	0,54
E023-05s.1	22	228	0	0,00	1,04	708,98	563,00	558,00	0,90
E023-05s.2	22	206	10	13,18	16,23	800,69	680,00	680,00	0,00
E023-05s.3	22	14145	319	655,53	7200,00	848,09*	732,00*	729,00	0,41
E023-05s.4	22	779	33	7200,00	7200,00	833,82*	708,00*	704,00*	0,57
E023-05s.5	22	43	0	3,12	4,03	846,45	721,00	721,00*	0,00
E026-08m.1	25	2302	0	0,00	9,92	850,69	610,00	609,00	0,16
E026-08m.2	25	2655	0	0,02	10,34	850,69	610,00	609,00	0,16
E026-08m.3	25	5660	0	1,40	86,74	850,69	610,00	609,00	0,16
E026-08m.4	25	10535	1	2,81	352,37	871,37	629,00	626,00	0,48
E026-08m.5	25	2302	0	1,12	11,66	850,69	610,00	609,00	0,16
E030-03g.1	29	24372	0	0,01	1546,85	720,53	525,00	524,00	0,19
E030-03g.2	29	18381	561	576,72	7200,00	846,31*	693,00*	681,00*	1,76
E030-03g.3	29	14191	78	2684,29	7200,00	778,63*	625,00*	625,00*	0,00
E030-03g.4	29	13790	339	1805,66	7200,00	887,48*	742,00*	742,00*	0,00
E030-03g.5	29	1541	146	7200,00	7200,00	913,75*	739,00*	739,00*	0,00
E033-03n.1	32	2586	0	0,01	118,84	2530,98	2034,00	1991,00	2,16
E033-03n.2	32	17962	479	363,92	7200,00	3089,27*	2662,00*	2636,00*	0,99
E033-03n.3	32	4607	183	7200,00	7200,00	3071,18*	2608,00*	2553,00*	2,15
E033-03n.4	32	97	0	7200,00	7200,00	-	-	-	-
E033-03n.5	32	3348	70	7200,00	7200,00	3083,06*	2623,00*	2623,00*	0,00
E036-11h.1	35	9239	0	0,01	583,24	954,43	687,00	686,00*	0,15
E036-11h.2	35	26234	3	2,03	2941,20	954,43	687,00	682,00*	0,73
E036-11h.3	35	15469	2	42,29	1116,03	955,72	683,00	682,00*	0,15
E036-11h.4	35	69355	2	5,27	7200,00	954,43*	687,00*	687,00*	0,00
E036-11h.5	35	9239	0	1,34	574,05	954,43	687,00	686,00*	0,15



tempo limite de 7200 segundos foi atingido, sendo que o *branch-and-cut* não conseguiu obter qualquer solução viável para a instância E033-03n.4. Na média, o tempo total gasto foi de 3142,85 segundos por instância, ao passo que o tempo gasto médio com o modelo de empacotamento foi de 1651,60 segundos. Estes resultados são piores quando comparados aos resultados apresentados na Tabela 1. Nota-se que houve também um aumento significativo na quantidade de cortes de capacidade e conectividade inseridos, com a média de 9207 cortes por instância. Da mesma forma, a quantidade de cortes de empacotamento inseridos por instância também aumentou, sendo de 84 cortes por instância na média.

Observando e comparando o tamanho das rotas entre o 2L-CVRP e o G2L-CVRP para a Tabela 2, nota-se mais uma vez que ocorre um aumento no tamanho das rotas para 19 instâncias do G2L-CVRP, sendo este de 0,44% na média. O aumento mais significativo ocorreu para a instância E033-03n.1, com diferença de 2,16% no tamanho das rotas. Em comparação com a Tabela 1, nota-se que menos instâncias foram influenciadas pela minimização do gasto com combustível. Para aquelas instâncias da Tabela 2 que sofreram influência no tamanho da rota, o aumento médio também foi menor comparado ao da Tabela 1.

De maneira geral, para todas as 60 instâncias, a quantidade de cortes de capacidade e conectividade inseridos foi de 314501, ao passo que foram inseridos um total de 2719 cortes relacionados ao empacotamento nas rotas. A média de aumento no tamanho das rotas para o G2L-CVRP foi de 0,78% por instância, sendo que no pior caso houve um aumento de 3,42% (veja a instância E021-06m.4).

## 5. Conclusões

Os agentes logísticos estão buscando considerar questões ambientais durante a modelagem e otimização de seus problemas. Neste aspecto, este artigo tratou do problema de roteamento de veículos com restrições geométricas de empacotamento buscando por soluções de custo ótimo no gasto de combustível, o que impacta diretamente na emissão de gases poluentes. O gasto de combustível foi modelado proporcionalmente a quantidade de carga sendo transportada de um destino a outro.

Para o problema em questão, desenvolveu-se um modelo de programação linear inteira mista com o objetivo de usar um frota fixa de veículos minimizando o gasto com combustível. Desigualdades violadas relacionadas a conectividade, capacidade e empacotamento das rotas foram detectadas por procedimentos de separação e adicionadas no modelo sob demanda durante o processo de otimização.

Os testes computacionais em instâncias da literatura mostraram que reduzir o consumo de combustível traz impacto no tamanho das rotas, pois rotas mais longas e com menos carga transportada são preferíveis em detrimento a rotas curtas com bastante carga. Ao mesmo tempo, nota-se a preferência por rotas que atendem os clientes com maior demanda de carga primeiro, deixando por último os clientes com bem pouca demanda de forma que o veículo trafegue mais vazio.

Os resultados computacionais indicaram um acréscimo médio de 0,78% no tamanho das rotas quando se busca minimizar o gasto com combustível, que permite também diminuir a emissão de poluentes na atmosfera. Esses resultados sugerem que as empresas de transporte podem desenvolver suas operações de forma mais sustentável, não olhando apenas para a minimização de custos do transporte, mas também para questões relacionadas a emissão de poluentes pelos veículos. Os trabalhos futuros devem incluir outros aspectos ambientais para a construção das rotas, como a questão da emissão sonora e zonas de congestionamento.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro recebido do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq - processos 306918/2014-5, 165896/2015-9 e 308312/2016-3) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG).



## Referências

- Côté, J. F., Guastarofa, G., e Speranza, M. G. (2017). The value of integrating loading and routing. *European Journal of Operational Research*, 257(1):89 – 105.
- Dominguez, O., Juan, A. A., de A. I. Pestana, e Ouelhadj, D. (2016). An ils-biased randomization algorithm for the two-dimensional loading hfvpr with sequential loading and items rotation. *Journal of the Operational Research Society*, 67(1):37–53.
- Dominguez, O., Juan, A. A., e Faulin, J. (2014). A biased-randomized algorithm for the two-dimensional vehicle routing problem with and without item rotations. *International Transactions in Operational Research*, 21(3):375–398.
- Duhamel, C., Lacomme, P., Quilliot, A., e Toussaint, H. (2011). A multi-starts evolutionary local search for the two dimensional loading capacitated vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 38(3):617–640.
- Erdoğan, S. e Miller-Hooks, E. (2012). A green vehicle routing problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 48(1):100–114.
- Figliozzi, M. (2010). Vehicle routing problem for emissions minimization. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 2197:1–7.
- Fuellerer, G., Doerner, K. F., Hartl, R. F., e Iori, M. (2009). Ant colony optimization for the two-dimensional loading vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 36(3):655 – 673.
- Herz, J. C. (1972). A recursive computational procedure for two-dimensional stock-cutting. *IBM Journal of Research Development*, p. 462–469.
- Hokama, P., Miyazawa, F. K., e Xavier, E. C. (2016). A branch-and-cut approach for the vehicle routing problem with loading constraints. *Expert Systems with Applications*, 47:1 – 13.
- Iori, M. e Martello, S. (2013). An annotated bibliography of combined routing and loading problems. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 23:311–326.
- Iori, M., Salazar-Gonzalez, J. J., e Vigo, D. (2007). An exact approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Transportation science*, 41:253–264.
- Kumar, R. S., Kondapaneni, K., Dixit, V., Goswami, A., Thakur, L. S., e Tiwari, M. K. (2016). Multi-objective modeling of production and pollution routing problem with time window: A self-learning particle swarm optimization approach. *Computers & Industrial Engineering*, 99: 29–40.
- Leung, S. C. H., Zhang, Z., Zhang, D., Hua, X., e Lim, M. K. (2013). A meta-heuristic algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 225(2):199 – 210.
- Leung, S. C. H., Zheng, J., Zhang, D., e Zhou, X. (2010). Simulated annealing for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Flexible services and manufacturing journal*, 22(1–2):61–82.
- Lin, C., Choy, K., Ho, G., Chung, S., e Lam, H. (2014). Survey of green vehicle routing problem: Past and future trends. *Expert Systems with Applications*, 41(4, Part 1):1118–1138.
- Lysgaard, J., Letchford, A. N., e Eglese, R. W. (2004). A new branch-and-cut algorithm for the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical Programming*, 100(2):423–445.



- Ma, R., Ban, X. J., e Szeto, W. Y. (2017). Emission modeling and pricing on single-destination dynamic traffic networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, 100:255–283.
- Martinez, L. e Amaya, C. A. (2013). A vehicle routing problem with multi-trips and time windows for circular items. *Journal of the Operational Research Society*, 64(11):1630–1643.
- Pollaris, H., Braekers, K., Caris, A., Janssens, G. K., e Limbourg, S. (2015). Vehicle routing problems with loading constraints: state-of-the-art and future directions. *OR Spectrum*, 37(2): 297–330.
- Queiroz, T. A. e Toledo, F. M. B. (2016). Solver de busca local no problema integrado de roteamento com restrições de empacotamento. In *Anais do XLVIII SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, p. 1590–1600, Vitória, ES, Brasil.
- Silva, L. C., Queiroz, T. A., e Toledo, F. M. B. (2016). Abordagem para o problema de roteamento de veículos com empacotamento bidimensional. In *Anais do XLVIII SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, p. 1364–1375, Vitória, ES, Brasil.
- Toro, E., Escobar, A., e Granada, M. (2016). Literature review of vehicle routing problem in the green transportation context. *Revista Luna Azul*, 42:362–387.
- Toro, E., Franco, J., Echeverri, M., Guimarães, F., e Rendón, R. (2017a). Green open location-routing problem considering economic and environmental costs. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 8(2):203–216.
- Toro, E. M., Franco, J. F., Echeverri, M. G., e Guimarães, F. G. (2017b). A multi-objective model for the green capacitated location-routing problem considering environmental impact. *Computers & Industrial Engineering*, 110:114–125.
- Wei, L., Zhang, Z., Zhang, D., e Lim, A. (2015). A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 243:798–814.
- Xiao, Y., Zhao, Q., Kaku, I., e Xu, Y. (2012). Development of a fuel consumption optimization model for the capacitated vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 39(7): 1419–1431.