Modelos e desigualdades válidas para o Problema da Árvore-Estrela

Jefferson Gurguri
MDCC - Departamento de Computação - UFC
Universidade Federal do Ceará - Campus do Pici, Bloco 910, s/n - Pici, Fortaleza - CE
jeffersongurguri@gmail.com

Rafael Andrade
DEMA - Departamento de Estatística e Matemática Aplicada - UFC
Universidade Federal do Ceará - Campus do Pici, Bloco 910, s/n - Pici, Fortaleza - CE
Fortaleza - Ceará - Brasil
rca@lia.ufc.br

RESUMO

Considere um grafo $G = (V, E)$ com conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E. Seja $T = (V_T, E_T)$, com $V_T = V$ e $E_T \subseteq E$, uma árvore geradora de G. Para cada aresta $e \in E$, existe um custo de roteamento c_e^R, se e conecta dois vértices internos de T; ou um custo de acesso c_e^A, caso contrário. O problema da árvore-estrela de custo mínimo consiste em determinar uma árvore geradora de G cuja soma dos custos de acesso e roteamento seja mínima. Apresentamos novas formulações e desigualdades válidas para esse problema, assim como um procedimento de plano de cortes (PC). Realizamos experimentos computacionais para os modelos existentes e os novos propostos. Nosso procedimento de plano de cortes permite resolver de forma ótima instâncias de tamanho médio de até 80 vértices. Já em instâncias com 85 vértices ou mais, nosso (PC) obtém os menores gaps entre todas as abordagens conhecidas. Resultados preliminares são promissores e indicam que os dois novos modelos apresentam melhor performance que os existentes na literatura para o problema.

PALAVRAS CHAVE. Problema da árvore-estrela. Programação Inteira. Planos de corte.

Tópicos PM, OC, TEL&SI.

ABSTRACT

Consider a graph $G = (V, E)$ of set of nodes V, and set of edges E. Let $T = (V_T, E_T)$, with $V_T = V$ and $E_T \subset E$, be a spanning tree of G. With each edge $e \in E$ there is an associated routing cost c_e^R if e connects two internal nodes of T; or an access cost c_e^A, otherwise. The problem of the minimum cost tree-star consist in determining a spanning-tree whose sum of the costs of access and routing is minimized. We present new formulations and valid inequalities for this problem, as well as a cutting-plane (PC) algorithm. We perform computational experiments for existing models and the new ones. Our cutting-plane procedure allowed to solve to optimality medium-size instances with up to 80 nodes. For instances with 85 vertices or more, our (PC) based model obtained the smallest gaps among all known approaches. Numerical results are very promising and indicate that the two new models presented better performance than existing ones for this problem.

KEYWORDS. Tree-star problem. Integer Programming. Cutting-plane.

Paper topics PM, OC, TEL&SI.

1 Introdução

Um problema prático na área de telecomunicações é o projeto de rede de telecomunicações baseado em estrutura de árvore geradora com o intuito de minimizar os custos de roteamento e acesso para comunicação de dados. Nesse caso, distinguimos dois tipos de custo de conexão na rede: um custo c_e^R caso a aresta e seja de roteamento (i.e., conecte dois vértices internos), ou um custo c_e^A caso essa aresta seja de acesso (i.e., conecte um vértice interno a uma folha). O problema da árvore-estrela[1] de custo mínimo consiste em determinar uma árvore geradora de G cuja soma dos custos de acesso e roteamento seja mínima. Esse problema foi introduzido e demonstrado ser NP-difícil em [Knippel e Nguyen, 2007]. Encontramos poucos trabalhos na literatura para esse problema. Em [Lucena et al., 2016] e em [Knippel e Nguyen, 2007], foram introduzidos modelos para o problema da árvore-estrela de custo mínimo baseados, respectivamente, em conjuntos dominantes conexos e em árvore geradora caracterizada através de fluxos.

Este trabalho introduz novas formulações para o problema da árvore-estrela, desigualdades válidas e propõe um procedimento de Planos-de-Corte (PC) baseado em propriedades estruturais do problema. Reportamos resultados numéricos para instâncias com até 125 vértices para os novos modelos e também para os existentes na literatura para o problema. Nossa estratégia (PC) supera todas as outras abordagens de resolução para as instâncias testadas.

O artigo é organizado da seguinte forma. Na Seção 2, lembramos alguns conceitos e notações de Teoria dos Grafos. Nas Seções 3 e 4, introduzimos, respectivamente, um modelo baseado em árvore geradora e cortes baseados em propriedades estruturais do problema. Na Seção 5, introduzimos uma variante do modelo apresentado na Seção 3, obtido pelo uso de novas variáveis de decisão. Na Seção 6, demonstramos a corretude dos modelos apresentados e introduzimos desigualdades válidas. Os resultados computacionais são apresentados na Seção 7. Concluímos o artigo na Seção 8.

2 Conceitos preliminares

Adotamos as seguintes notações e definições em nossos modelos. Dado um grafo simples $G = (V, E)$, $A(E) := \{uv, vu : \forall\{u, v\} \in E\}$ denota o conjunto de arcos obtido de E. Para todo $uv \in A(E)$, os custos de acesso e roteamento de uv são iguais aos respectivos custos da aresta $\{u, v\} \in E$. $\delta(v)$ denota o conjunto de arestas incidentes em v. A vizinhança de um vértice v é denotada por $\Gamma(v)$ e seu grau por $d(v) = |\Gamma(v)|$. Um conjunto $S \subseteq V$ é dominante se, para todo $v \in V$, ou $v \in S$, ou existe um vértice $w \in \Gamma(v) \cap S$. $\mathcal{D}$ denota a família de subconjuntos dominantes de V, $\bar{\mathcal{D}}$ representa a família de subconjuntos não dominantes de V. Dada uma árvore geradora T de G, vértices com grau 1 em T são chamados *folhas* e os vértices com grau 2 ou mais são chamados vértices *internos*. Dado um vetor característico $\bar{x}$ associado a E, as componentes não-nulas de $\bar{x}$ induzem um grafo suporte $G_{\bar{x}}$.

3 Uma formulação baseada em árvore geradora

Vamos distinguir em uma árvore geradora $T = (V_T, E_T)$ de G, uma *subárvore de roteamento* $T_R = (V_R, E_R) \subseteq T$ induzida pelos vértices internos V_R de T. Usamos as seguintes variáveis de decisão, acompanhadas de suas respectivas restrições de integralidade, $x_e \in \{0, 1\}$, $e \in E$ e $r_e \in \{0, 1\}$, $e \in E$ para identificar as arestas em E_T e em E_R, respectivamente; e variáveis $z_v \in \{0, 1\}, v \in V$ para identificar os vértices em V_R, ditos roteadores. Para todo $S \subseteq V$, $E(S)$ denota o subconjunto de arestas de G com ambas as extremidades em S. O modelo é dado por:

[1] Árvore-estrela é uma árvore geradora com a diferença que arestas ligando vértices internos preservam seu custo original e arestas ligadas às folhas têm custos alterados (multiplicados) por um fator α.

$$
\begin{aligned}
(P_{ST}) \qquad & \min \sum_{e\in E} \left[c_e^A x_e + (c_e^R - c_e^A) r_e\right] && && (1)\\
s.a. \qquad & \sum_{e\in E} x_e = |V| - 1 && && (2)\\
& \sum_{e\in E(S)} r_e \leq \sum_{v\in S\setminus\{s\}} z_v, && \forall S \subseteq V, \forall s \in S && (3)\\
& \sum_{e\in\delta(v)} x_e \geq 1 + z_v, && \forall v \in V && (4)\\
& \sum_{e\in\delta(v)} x_e \leq 1 + (d(v) - 1) z_v, && \forall v \in V && (5)\\
& \sum_{e\in\delta(v)} r_e \leq d(v) z_v, && \forall v \in V && (6)\\
& r_e \leq x_e, && \forall e \in E && (7)\\
& r_e + x_e \leq z_u + z_v, && \forall e = \{u, v\} \in E && (8)\\
& x_e + z_u + z_v - 2 \leq r_e, && \forall e = \{u, v\} \in E && (9)\\
& \sum_{e\in E} r_e = \sum_{v\in V} z_v - 1 && && (10)\\
& z_v \in \{0, 1\}, \forall v \in V;\ x_e, r_e \in \{0, 1\}, \forall e \in E. && && (11)
\end{aligned}
$$

Em (1), temos a soma dos custos das arestas de acesso e roteamento. Se $e \in E$ é uma aresta de acesso (i.e., $(x_e, r_e) = (1, 0)$), então seu custo é c_e^A; caso contrário, se for uma aresta de roteamento (i.e., $(x_e, r_e) = (1, 1)$), então seu custo é $c_e^A + (c_e^R - c_e^A) = c_e^R$. As restrições (3) e (10), com os limites das variáveis em (11), definem uma árvore geradora do subgrafo de G induzido pelos vértices com $z_v > 0$. As restrições (4), (5) e (6) impõem que os vértices não roteadores são folhas em T ou, caso contrário, que um nó interno deve ter grau pelo menos 2 em T. As restrições (7), (8) e (9) modelam a equivalência: $r_{\{u,v\}} = 1$ se e somente se $x_{\{u,v\}} = z_u = z_v = 1$. A restrição (10) estabelece o relacionamento entre o número de arestas de roteamento e de roteadores na subárvore T_R de T.

Plano de cortes para o modelo (P_{ST})

Utilizamos um plano de cortes (PC) baseado na estrutura em árvore dos vértices roteadores para fortalecer a relaxação linear de (P_{ST}), digamos $(P_{ST})_{RL}$. Dada uma solução relaxada linearmente $\bar{r}$ com respeito aos roteadores na solução $(P_{ST})_{RL}$, determinamos o grafo suporte $G_{\bar{r}}$ e uma floresta geradora F de $G_{\bar{r}}$. Se o número de componentes conexas de F é unitário, então, para cada aresta $e \in E(F)$, obtemos um corte de vértices $(S, V_R \setminus S)$, com $S \subset V_R$, induzido pela remoção da aresta e de F. Se nem S, nem $V_R \setminus S$ forem conjuntos dominantes e $\sum_{e\in E(S,V_R\setminus S)} \bar{r}_e < 1$, então adicionamos o corte sugerido por [Gendron et al., 2014] , digamos $\sum_{e\in E(S,V_R\setminus S)} r_e \geq 1$ em $(P_{ST})_{RL}$. Se o número de componentes de F é pelo menos 2, então, para cada componente conexa C de F, adicionamos uma restrição generalizada de eliminação de sub-rota conforme [Gendron et al., 2014] $\sum_{e\,\in E(C)} r_e \leq \sum_{v\in V(C)\setminus\{s\}} z_v$, uma para cada $s \in V(C)$, para cada componente C violando essa restrição. Iteramos esse procedimento até um número máximo de gerações de cortes (cem iterações) ou até a solução linear relaxada $\bar{r}$ não violar essas restrições. Denotamos por (P_{ST+PC}) o modelo (P_{ST}) acrescido dos cortes gerados pelo (PC).

4 Cortes geométricos

Para uma subárvore de roteamento $T_R = (V_R, E_R)$, existem diversas soluções viáveis que contêm T_R como subárvore de roteamento, dependendo das conexões entre vértices roteadores e não-roteadores. Nesta seção, iremos mostrar como obter $T^\star \supseteq T_R$ uma árvore geradora de G com custo mínimo entre aquelas que possuem exatamente T_R como subárvore de roteamento.

Para tal, iremos resolver um problema de fluxo obtido a partir de T_R. Seja $\hat{V} = V \cup \{s,t\}$, $\hat{A} \subseteq \hat{V} \times \hat{V}$ um conjunto de arcos, $D = (\hat{V}, \hat{A})$ um grafo orientado e funções $l, u, c : \hat{A} \to \mathbb{Z}_+$ com: $l(vw)$, o limite inferior do fluxo no arco vw; $u(vw)$, o limite superior do fluxo no arco vw; e $c(vw)$, o custo por unidade de fluxo em vw, para cada arco $vw \in \hat{A}$.

Observação 1. *Seja $\hat{A}$ composto pelos arcos:*

(i) sv *com* $(l(sv), u(sv)) = (1,1)$ *e* $c(sv) = 0$ *para todo* $v \in V \setminus V_R$ *;*

(ii) vw *com* $(l(vw), u(vw)) = (0,1)$ *e* $c(vw) = c^A_{vw}$ *para todo* $v \in V \setminus V_R$*,* $w \in V_R$ *com* $\{v,w\} \in E$*;*

(iii) vt *com* $(l(vw), u(vw)) = (0,1)$ *e* $c(vw) = 0$ *para todo vértice interno* v *em* T_R*.*

(iv) vt *com* $(l(vw), u(vw)) = (1,1)$ *e* $c(vw) = 0$ *para todo vértice folha* v *em* T_R*.*

Dado o grafo orientado D, podemos definir o seguinte Problema de Circulação de Custo Mínimo [Tardos, 1985]. As variáveis f_{uv} representam o fluxo no arco $uv \in \hat{A}$.

$$(P_C) = \min \sum_{vw \in A} c_{vw} f_{vw} \tag{12}$$

$$s.a. \sum_{vw \in A} f_{vw} - \sum_{wv \in A} f_{wv} = 0, \quad \forall v \in V \tag{13}$$

$$l(vw) \leq f_{vw} \leq u(vw), \quad \forall vw \in \hat{A} \tag{14}$$

$$f_{vw} \in \mathbb{R}_+, \ \forall vw \in \hat{A}. \tag{15}$$

Em (12), calculamos o custo do fluxo. As restrições (13) garantem a conservação de fluxo e as restrições (14) definem as capacidades mínima e máxima dos fluxos.

(P_C) é uma variante do Problema de Fluxo de Custo Mínimo e pode ser resolvido em tempo polinomial, ainda que adicionadas restrições de integralidade sobre o fluxo [Tardos, 1985]. Seja $(P_C)_\mathbb{Z}$ o modelo obtido de (P_C) pela adição de restrições de integralidade sobre as variáveis f. A proposição a seguir exibe uma árvore geradora de G, com T_R como subárvore de roteamento, que possui custo mínimo entre as árvores geradoras de G que possuem T_R como subárvore de roteamento.

Proposição 4.1. *Seja $\bar{f}$ uma solução ótima de $(P_C)_\mathbb{Z}$ para um dado conjunto de vértices de roteamento $V_R \subset V$. Defina $E' = \{\{v,w\} : \bar{f}_{vw} = 1, v \in V \setminus V_R, w \in V_R\}$ e $T^\star = G[E(T_R) \cup E']$. $T^\star$ é uma árvore-estrela de G, tendo T_R como subárvore de roteamento, sendo que $T^\star$ possui custo mínimo dentre todas as árvores-estrela de G, que possuem T_R como subárvore de roteamento.*

Demonstração. Primeiro, observe que, para qualquer conjunto de arestas que conecte cada folha de T_R a pelo menos um vértice em $V \setminus V_R$, corresponde uma solução inteira viável para $(P_C)_\mathbb{Z}$. Por hipótese, T_R é uma subárvore de roteamento e, portanto, $|V \setminus V_R|$ é maior que o número de folhas de T_R. Assim tais conexões são possíveis. Logo, $(P_C)_\mathbb{Z}$ é viável.

Alegamos que $T^\star$ é uma árvore geradora de G. Como $\bar{f}_{sv} = 1$ para todo $v \in V \setminus V_R$, temos, por (13), que existe um arco $vw \in \hat{A}$ com $\bar{f}_{vw} = 1$ e $w \in V_R$. Assim, existe $\{v,w\} \in E$ em $E(T^\star)$ para todo $v \in V \setminus V_R$. Além disso, como $T_R \subseteq G[T^\star]$ é uma árvore geradora de V_R, concluímos que $T^\star$ é uma árvore geradora de G.

Agora, verificamos que $T^\star$ é uma árvore-estrela e possui T_R como subárvore de roteamento. Seja $v \in V \setminus V_R$, pelo item (i) da Observação 1, a soma do fluxo de entrada em v é unitária. Por (13) temos que existe um único arco $vw \in \hat{A}$ com $\bar{f}_{vw} = 1$ e, portanto, v é folha em $T^\star$. Seja $v \in V_R$. Se v é vértice interno em V_R, então v possui pelos menos duas arestas incidentes a ele em $E_R \subseteq E(T^\star)$ e, portanto, v é vértice interno em $T^\star$. Se v é folha em T_R, com vizinho digamos $w \in V_R$, então, pelo item (iv) da Observação 1 e por (13), existe ao menos um arco uv com $u \in V \setminus V_R$ e $\bar{f}_{uv} = 1$. Assim, $\{\{v, w\}, \{u, v\}\} \subseteq E(T^\star)$ e concluímos que v é vértice interno em $T^\star$.

Os únicos arcos com custo não-nulos são aqueles que conectam os vértices entre $V \setminus V_R$ e V_R. Como o fluxo máximo que pode partir de v é unitário para todo $v \in V \setminus V_R$, temos que (12) captura corretamente o custo da extensão de T_R para uma árvore geradora que tenha T_R como subárvore de roteamento. Assim, pela otimalidade da solução, $T^\star$ possui custo mínimo entre todas as árvores-estrela de G que possuem T_R como subárvore de roteamento. $\square$

Assim, é possível reduzir o espaço de soluções viáveis de (P_{ST}) em um algoritmo de "Branch-and-Bound", cortando todas as árvores-estrela que tenham exatamente E_R como conjunto de arestas de roteamento pelo uso de cortes geométricos, definidos em função do correspondente vetor característico $\bar{r}$ de E_R, $||r - \bar{r}||_2 \geq 1$, ou equivalentemente,

$$\sum_{e \in E} (1 - 2\bar{r}_e) r_e \geq 1 - \sum_{e \in E} \bar{r}_e. \tag{16}$$

5 Formulação baseada em diciclo

Um diciclo associado a uma aresta $\{u, v\} \in E$ é um par de arcos $\{uv, vu\}$. Defina variáveis binárias $p_{uv} = x_{\{u,v\}} z_u$, onde $p_{uv} = 1$, se $\{u, v\}$ está na árvore-estrela T e u é roteador, ou $p_{uv} = 0$, caso contrário. Nesse caso, arestas de roteamento correspondem a diciclos entre vértices adjacentes em uma subárvore de roteamento. Por outro lado, arestas de acesso correspondem a arcos de entrada nas folhas de T. Assim, podemos definir o seguinte modelo.

$$(P_{DC}) \quad \min \sum_{\{u,v\} \in E} \left(c^A_{\{u,v\}} (p_{uv} + p_{vu}) + (c^R_{\{u,v\}} - 2c^A_{\{u,v\}}) r_{\{u,v\}} \right) \tag{17}$$

$$s.a. \qquad (2) - (5),\ e$$

$$\sum_{uv \in A(E)} p_{uv} = \sum_{v \in V} z_v + |V| - 2. \tag{18}$$

$$p_{uv} \leq z_u, \qquad \forall uv \in A(E) \tag{19}$$

$$p_{uv} + z_v - 1 \leq r_{\{u,v\}}, \qquad \forall uv \in A(E) \tag{20}$$

$$r_{\{u,v\}} \leq p_{uv}, \qquad \forall uv \in A(E) \tag{21}$$

$$p_{uv} + p_{vu} - 1 \leq r_{\{u,v\}}, \qquad \forall \{u,v\} \in E \tag{22}$$

$$p_{uv}, p_{vu}, r_{\{u,v\}} \in \{0, 1\}, \qquad \forall \{u,v\} \in E \tag{23}$$

A interpretação das restrições adicionais é a seguinte. As restrições (19) permitem arcos partindo somente de vértices roteadores. As restrições (20) impõem que se um arco uv estiver na solução e v for um roteador, então a aresta $\{u, v\}$ deve ser uma aresta de roteamento. As restrições (21) estabelecem que se um arco uv não estiver na solução, então a aresta $\{u, v\}$ não pode ser aresta de roteamento. As restrições (22) impõem que $r_{\{u,v\}} = 1$ se, e somente se, $p_{uv} = p_{vu} = 1$. A restrição (18) determina a relação entre o número de arcos e o número de arestas de roteamento na árvore-estrela. Essa restrição não é necessária para a corretude do modelo, contudo fortalece sua relaxação linear.

Podemos verificar ainda que ambas as variáveis x e z em (P_{ST}) correspondem a

$$x_{\{u,v\}} = p_{uv} + p_{vu} - r_{\{u,v\}},\ \forall \{u,v\} \in E. \tag{24}$$

$$z_v = 1 + \sum_{u \in \Gamma(v)} r_{\{u,v\}} - \sum_{u \in \Gamma(v) | uv \in A(E)} p_{uv},\ \forall v \in V. \tag{25}$$

Substituindo (24) e (25) em (2)-(5) e em (18)-(20) obtemos um novo modelo, denotado por $(P_{DC}{}^\star)$, com um número reduzido de variáveis.

6 Corretude dos modelos (P_{ST}) e (P_{DC})

Exibimos uma correspondência entre soluções viáveis das formulações (P_{ST}) e (P_{DC}) com árvores geradoras de G. Em seguida, exibimos algumas desigualdades válidas.

Seja $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{z})$ uma solução viável de (P_{ST}). Denotamos por $G_{\bar{x}}$ e $G_{\bar{r}}$, o grafo suporte induzido por $\bar{x}$ e $\bar{r}$, respectivamente. Seja $V_{\bar{z}} = \{v \in V | \bar{z}_v = 1\}$.

Lema 6.1. *Se $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{z})$ for solução viável para (P_{ST}), então:*

(i) $V_{\bar{z}}$ é o conjunto de vértices com grau pelo menos 2 em $G_{\bar{x}}$;

(ii) $G_{\bar{x}}$ é uma árvore geradora de G; e

(iii) $G_{\bar{r}} \subseteq G_{\bar{x}}$ é uma árvore geradora de $G[V_{\bar{z}}]$, se $|V_{\bar{z}}| \geq 2$.

Demonstração. Por (5), temos que o grau de v em $G_{\bar{x}}$ é 1, se $\bar{z}_v = 0$. Senão, por (4), seu grau é pelo menos 2. Assim, $V_{\bar{z}}$, como definido acima, é o conjunto de vértices com grau pelo menos 2 em $G_{\bar{x}}$, provando o item (i). Por (2), $G_{\bar{x}}$ tem $|V| - 1$ arestas. Alegamos que $G_{\bar{x}} \subseteq G$ é acíclico. Para mostrar isso, suponha, por contradição, que $G_{\bar{x}}$ contenha um ciclo C. Todo vértice $v \in V(C)$ tem grau pelo menos dois, portanto $\bar{z}_v = 1$, para todo $v \in V(C)$. Para cada aresta $\{u, v\} \in E(C)$, temos $\bar{x}_{\{u,v\}} = \bar{z}_u = \bar{z}_v = 1$ e, portanto, por (9), $\bar{r}_{\{u,v\}} = 1$. Nesse caso, temos $\sum\limits_{\{u,v\} \in E(C)} \bar{r}_{\{u,v\}} = |V(C)|$, e $\sum\limits_{v \in V(C) \setminus \{s\}} \bar{z}_v = |V(C)| - 1$, para todo $s \in V(C)$ e, consequentemente, estamos violando (3). Assim, $G_{\bar{x}}$ é acíclico e, portanto, ele é uma árvore geradora de G, provando o item (ii). Agora, por (7), temos que $G_{\bar{r}} \subseteq G_{\bar{x}}$ e, portanto, $G_{\bar{r}}$ é acíclico. Assuma que $|V_{\bar{z}}| \geq 2$. Alegamos que $G_{\bar{r}}$ é conexo. Para ver isso, suponha, por contradição, que $G_{\bar{r}}$ possua duas componentes conexas C_1 e C_2, onde existe $\{u, v\} \in E(G_{\bar{x}})$ com $u \in V(C_1), v \in V(C_2)$, tal que $\{u, v\} \notin E(G_{\bar{r}})$. Como $G_{\bar{x}}$ é uma árvore geradora, $\bar{x}_{\{u,v\}} = 1$. Mas, por (9), devemos ter $\bar{r}_{\{u,v\}} = 1$ ou, equivalentemente, $\{u, v\} \in E(G_{\bar{r}})$, o que é uma contradição, já que não existe aresta entre C_1 e C_2 em $G_{\bar{r}}$. Assim, $G_{\bar{r}}$ é uma árvore geradora de $G[V_{\bar{z}}]$, provando o item (iii). Assim, $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{z})$ é árvore-estrela de G. □

Lema 6.2. *Seja $G_{\bar{p}} = G[E_{\bar{p}}]$ o grafo subjacente obtido de $G(E_{\bar{p}})$, com $E_{\bar{p}} = \{\{u, v\} \in E : \bar{p}_{uv} = 1 \vee \bar{p}_{vu} = 1\}$, associado a $\bar{p}$. Seja $G_{\bar{r}}$ o grafo suporte de $\bar{r}$. Se $(\bar{p}, \bar{r})$ for solução viável para (P_{DC}), então:*

(i) $G_{\bar{p}}$ é uma árvore geradora de G; e

(ii) $G_{\bar{r}} \subseteq G_{\bar{p}}$ é uma árvore induzida pelos vértices de grau pelo menos 2 em $G_{\bar{p}}$, sendo $V(G_{\bar{r}})$ um conjunto dominante de $G_{\bar{p}}$ e $|V(G_{\bar{p}})| \geq 2$.

Demonstração. Primeiro, baseado na estrutura do problema, observamos que

$$x_{\{u,v\}} = p_{uv} + p_{vu} - r_{\{u,v\}} \ , \forall \{u, v\} \in E.$$
$$z_v = 1 + \sum_{u \in \Gamma(v)} r_{\{u,v\}} - \sum_{u \in \Gamma(v) | uv \in A(E)} p_{uv}, \ \forall v \in V.$$

A linearização clássica do termo quadrático $p_{uv} = x_{\{u,v\}} z_u$ é (19) e

$$p_{uv} \geq x_{\{u,v\}} + z_u - 1, \tag{26}$$
$$p_{uv} \leq x_{\{u,v\}}. \tag{27}$$

Substituindo as expressões de $x_{\{u,v\}}$ e z_v em (26) e (27), obtemos (20) e (21), respectivamente, e em (4) e (5), obtemos

$$\sum_{w\in\Gamma(v)|vw\in A(E)} p_{vw} + 2\left[\sum_{w\in\Gamma(v)|wv\in A(E)} p_{wv} - \sum_{\{v,w\}\in\delta(v)} r_{\{v,w\}}\right] \geq 2,\ \forall v \in V. \quad (28)$$

$$\sum_{w\in\Gamma(v)|vw\in A(E)} p_{vw} + d(v)\left[\sum_{w\in\Gamma(v)|wv\in A(E)} p_{wv} - \sum_{\{v,w\}\in\delta(v)} r_{\{v,w\}}\right] \leq d(v),\ \forall v \in V. \quad (29)$$

Provamos a seguir que a expressão definindo $\bar{z}_v$ é 0, se v é uma folha no grafo subjacente $G_{\bar{p}}$; senão, ela é 1, i.e., v é um vértice interno em $G_{\bar{p}}$. Inicialmente, de (21) e (22), temos que $\bar{r}_{\{u,v\}} = 1$ se, e somente se, $\bar{p}_{uv} = \bar{p}_{vu} = 1$. Quando $\bar{r}_{\{u,v\}} = 0$, no máximo uma das variáveis $\bar{p}_{uv}, \bar{p}_{vu}$ pode ser igual a 1. De (21), temos que

$$\sum_{w\in\Gamma(v)|wv\in A(E)} p_{wv} - \sum_{\{u,v\}\in\delta(v)} r_{\{v,w\}} \geq 0, \forall v \in V, \quad (30)$$

e de (29), como $\sum_{w\in\Gamma(v)|vw\in A(E)} p_{vw} \geq 0$ e $d(v) > 0$, então

$$\sum_{w\in\Gamma(v)|wv\in A(E)} p_{wv} - \sum_{\{v,w\}\in\delta(v)} r_{\{v,w\}} \leq 1, \forall v \in V, \quad (31)$$

Como $(\bar{p}, \bar{r})$ é um vetor 0-1, existe somente dois possíveis valores para $\sum_{w\in\Gamma(v)|wv\in A(E)} p_{wv} - \sum_{\{v,w\}\in\delta(v)} r_{\{v,w\}}$, os quais são 0 ou 1.

Caso I: Para um dado vértice $v \in V$, $\sum_{w\in\Gamma(v)|wv\in A(E)} \bar{p}_{wv} = \sum_{\{v,w\}\in\delta(v)} \bar{r}_{\{v,w\}} + 1$. Então, por (29), temos que $\sum_{w\in\Gamma(v)|wv\in A(E)} \bar{p}_{wv} = 0$ e, por (21), $\bar{r}_{\{v,w\}} = 0$, para todo $w \in \Gamma(v)$. Consequentemente, $\sum_{w\in\Gamma(v)|wv\in A(E)} \bar{p}_{wv} = 1$, o que equivale a dizer que v é uma folha em $G_{\bar{p}}$ e existe um único arco de entrada nesse vértice.

Caso II: Para um dado vértice $v \in V$, $\sum_{w\in\Gamma(v)|wv\in A(E)} \bar{p}_{wv} = \sum_{\{v,w\}\in\delta(v)} \bar{r}_{\{v,w\}}$. Então, por (28), temos que $\sum_{w\in\Gamma(v)|vw\in A(E)} \bar{p}_{vw} \geq 2$. Nesse caso, existe pelo menos dois vértices distintos conectados a v. Consequentemente, v é vértice interno em $G_{\bar{p}}$.

Agora, substituindo z_v em (19), obtemos

$$p_{uv} \leq 1 + \sum_{w\in\Gamma(u)} r_{\{w,u\}} - \sum_{w\in\Gamma(u)|wu\in A(E)} p_{wu},\ \forall uv \in A(E) \quad (32)$$

Alegamos que se $\bar{p}_{cc'} = 1$, com ambos c, c' vértices internos em $G_{\bar{p}}$, então $\bar{r}_{\{c,c'\}} = 1$. Para ver isso, substitua $\bar{p}_{cc'} = 1$ em (32), para $cc' \in A(E)$, levando a $\sum_{w\in\Gamma(c)} \bar{r}_{\{w,c\}} \geq \sum_{w\in\Gamma(c)|wc\in A(E)} \bar{p}_{wc}$ que, juntamente com (30), resulta em $\sum_{w\in\Gamma(c)} \bar{r}_{\{w,c\}} = \sum_{w\in\Gamma(c)|wc\in A(E)} \bar{p}_{wc}$. Como não existe arco de uma folha para um vértice interno, então $\bar{r}_{\{w,c\}} = \bar{p}_{wc}$, para todo $wc \in A(E)$, com w, c vértices internos em $G_{\bar{p}}$. Portanto, uma aresta de roteamento $\{c, c'\} \in E$ pertence à solução se, e somente se, $\bar{p}_{cc'} = \bar{p}_{c'c} = \bar{r}_{\{c,c'\}} = 1$.

Finalmente, substituindo z_v em (3) e (18), obtemos, respectivamente

$$\sum_{e \in E(S)} r_e \leq \sum_{u \in S \setminus \{s\}} \left[1 + \sum_{w \in \Gamma(u)} r_{\{w,u\}} - \sum_{w \in \Gamma(u) | wu \in A(E)} p_{wu} \right], \forall S \subseteq V, \forall s \in S \tag{33}$$

$$\sum_{uv \in A(E)} p_{uv} = \sum_{\{u,v\} \in E} r_{\{u,v\}} + |V| - 1. \tag{34}$$

Alegamos que o grafo induzido por $\bar{r}$, digamos $G_{\bar{r}}$, é acíclico. Suponha, por contradição, que exista um ciclo $C \subseteq G_{\bar{r}}$. Nesse caso, para todo $v \in V(C)$, existe $vw \in A(E)$, com $w \in V(C)$, tal que $\bar{p}_{vw} = 1$. Portanto, como vimos acima, $\sum\limits_{\{u,v\} \in E(C)} \bar{r}_{\{u,v\}} = \sum\limits_{uv \in A(C)} \bar{p}_{uv}$.

Assim, para $S = V(C)$, e para cada $s \in V(C)$, o lado direito de (33) é $|V(C)| - 1 + \sum\limits_{v \in V(C) \setminus \{s\}} \left[\sum\limits_{\{u,v\} \in E(C)} \bar{r}_{\{u,v\}} - \sum\limits_{uv \in A(C)} \bar{p}_{uv} \right] = |V(C)| - 1$. Mas, como C é um ciclo, $\sum\limits_{\{u,v\} \in E} \bar{r}_{\{u,v\}} = |V(C)|$, assim, violando (33). Portanto, $G_{\bar{r}}$ não contém um ciclo. Além disso, como todo vértice interno possui pelo menos dois vizinhos, eles são conectados por diciclos ou, equivalentemente, por arestas de roteamento, bem como cada vértice folha é conectado por 1 arco partindo de um vértice interno. Nesse caso, não é difícil ver que (34) é satisfeita. Consequentemente, o grafo subjacente $G_{\bar{p}}$ é uma árvore geradora de G, provando o item (i), assim como $G_{\bar{r}}$ é uma árvore dominante de $G_{\bar{p}}$, provando o item (ii). □

Teorema 6.1. *Os modelos (P_{ST}) e (P_{DC}) obtêm uma árvore-estrela de custo mínimo de $G = (V, E)$.*

Demonstração. Seja $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{z})$ e $(\bar{p}, \bar{r})$ soluções viáveis de (P_{ST}) e (P_{DC}), respectivamente. Lemas (6.1) e (6.2) provam que soluções viáveis para essas formulações correspondem à árvores geradoras de G, assim elas são árvores-estrela. Temos que mostrar que as funções objetivo desses modelos capturam corretamente os custos de acesso e de roteamento de uma solução viável. Considere uma árvore-estrela T de G em (P_{ST}). Se $e \in E(T)$ é uma aresta de acesso, então $\bar{x}_e = 1$ e $\bar{r}_e = 0$. Nesse caso, sua contribuição para o custo da solução em (1) é c_e^A. Se $e \in E(T)$ é uma aresta de roteamento, então $\bar{x}_e = 1$ e $\bar{r}_e = 1$. Assim, sua contribuição para o custo da solução em (1) é $c_e^A + (c_e^R - c_e^A) = c_e^R$. Quando uma aresta não pertencer à solução, então $\bar{x}_e = 0$ e $\bar{r}_e = 0$, logo ela não contribui para (1). Portanto, pela minimização da função objetivo, a solução de (P_{ST}) é uma árvore-estrela de custo mínimo. Agora, seja T uma árvore-estrela de G em (P_{DC}). Se $\{u, v\} \in E(T)$ for uma aresta de acesso, então $\bar{p}_{uv} = 1$, $\bar{p}_{vu} = 0$ e $\bar{r}_{\{u,v\}} = 0$. Assim, a contribuição para o custo da solução em (17) é $[c^A_{\{u,v\}} \times (1 + 0) + (c^R_{\{u,v\}} - 2c^A_{\{u,v\}}) \times 0] = c^A_{\{u,v\}}$. Caso contrário, se $\{u, v\} \in E(T)$ for uma aresta de roteamento, então $\bar{p}_{uv} = 1$, $\bar{p}_{vu} = 1$ e $\bar{r}_{\{u,v\}} = 1$. Sua contribuição em (17) é $[c^A_{\{u,v\}} \times (1 + 1) + (c^R_{\{u,v\}} - 2c^A_{\{u,v\}}) \times 1] = c^R_{\{u,v\}}$. Se uma aresta não pertencer à solução, então as variáveis correspondentes são nulas e, assim, ela não contribui para a função objetivo. Como (17) é uma função de minimização, então (P_{DC}) corretamente resolve o problema.

□

A seguir, propomos algumas desigualdades válidas para o problema.

Proposição 6.1. *Para todo $u \in V$, a seguinte desigualdade é válida para (P_{ST})*

$$\sum_{\{u,v\} \in \delta(u)} (x_{\{u,v\}} - r_{\{u,v\}}) \leq \left(d(u) - \sum_{v \in \Gamma(u)} z_v \right) + (1 - z_u)$$

.

Demonstração. Como $\sum_{v\in\Gamma(u)} z_v \leq d(u)$. Se $z_u = 0$, então, por (5), $\sum\limits_{\{u,v\}\in\delta(u)} \left(x_{\{u,v\}} - r_{\{u,v\}}\right) \leq 1$. Se $z_u = 1$, então por (5) e (3), definindo $S = \Gamma(u) \cup \{u\}$, temos que

$$\sum_{uv\in\delta(u)} \left(x_{\{u,v\}} - r_{\{u,v\}}\right) \leq \left(d(u) - \sum_{v\in\Gamma(u)} z_v\right).$$

Assim, a desigualdade é válida. □

Proposição 6.2. *Se a subárvore de roteamento de qualquer árvore-estrela de G possuir pelo menos duas arestas, então, para todo $\{u,v\} \in E$, $\sum\limits_{e\in\delta(u)\cup\delta(v)} r_e \geq z_u + z_v$ é válida para (P_{ST}).*

Demonstração. Para uma solução viável $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{z})$ de (P_{ST}), seja $T_R = (V_R, E_R)$ a subárvore de roteamento induzida por $\bar{r}$. Por hipótese, $|E_R| \geq 2$ e portanto $|V_R| \geq 3$.

Agora, suponha que (i) $(\bar{z}_u, \bar{z}_v) = (1, 0)$. Como T_R é uma árvore e $|V_R| \geq 3$, existe um roteador w adjacente a u tal que $\bar{r}_{\{u,w\}} = 1$. Assim, $\sum\limits_{e\in\delta(u)\cup\delta(v)} \bar{r}_e \geq 1$; e (ii) que $(\bar{z}_u, \bar{z}_v) = (1, 1)$. Provamos a seguir que $\sum\limits_{e\in\delta(u)\cup\delta(v)} \bar{r}_e \geq 2$. Seja P_{uv} o caminho mais curto entre u e v em T_R e $|P_{uv}|$ o comprimento de P_{uv}. Se $|P_{uv}| = 1$, então $\{u, v\} \in V_R$ (i.e., $\bar{r}_{\{u,v\}} = 1$). Como $|V_R| \geq 3$ e T_R é uma árvore, temos que existe um roteador $w \in \Gamma(v) \setminus \{u\}$ tal que $\bar{r}_{\{v,w\}} = 1$. Assim, $\sum\limits_{e\in\delta(u)\cup\delta(v)} \bar{r}_e \geq 2$. Se $|P_{uv}| \geq 2$, então existem vértices adjacentes u e v em P_{uv}, digamos u' e v' não necessariamente distintos, respectivamente, tal que $(\bar{r}_{\{u,u'\}}, \bar{r}_{\{v',v\}}) = (1, 1)$. Assim, $\sum\limits_{e\in\delta(u)\cup\delta(v)} \bar{r}_e \geq 2$.

□

7 Experimentos computacionais preliminares

Realizamos experimentos para 54 instâncias aleatórias euclidianas com $40 \leq |V| \leq 125$ geradas como descritos em [Knippel et al., 1999] e [Knippel et al., 2003]. Cada vértice é uniformemente distribuído em um quadrado de área 1000×1000 e conectado aos vértices mais próximos dele seguindo as 8 direções cardeais. O custo de roteamento de uma aresta é dado pela distância euclidiana entre seus dois vértices. O custo de acesso de uma aresta é dado pela parte inteira do produto de 0.7 por seu custo de roteamento.

Implementamos cinco algoritmos, incluindo dois existentes na literatura, em C++/14 usando Boost Graph Library e CPLEX 12.6.1, um para cada um dos seguintes modelos: (P_{ST}), (P_{ST+PC}), $(P_{DC}{}^{\star})$, (P_{Flow}) [Knippel e Nguyen, 2007], e (P_{HR}) [Lucena et al., 2016]. Os algoritmos dos modelos (P_{ST}), (P_{ST+PC}), $(P_{DC}{}^{\star})$ e (P_{HR}) são implementações do método “Branch-and-Cut” com separação das restrições generalizadas de eliminação de sub-rota [Gendron et al., 2014], enquanto o algoritmo associado ao modelo (P_{Flow}) trata-se de uma implementação de um modelo matemático baseado em fluxo em redes para o problema. Os experimentos foram executados em uma máquina virtual Open Stack com 12 núcleos Intel Xeon, 2.0 GHz, 16 GB RAM. O tempo limite de CPU foi configurado para 1 hora.

A Tabela 1 reporta a média do tempo de CPU (em segundos), o gap relativo médio “(UB - LB)/LB” (em percentagem) e o número de instâncias resolvidas com prova de otimalidade. Existem 27 instâncias até 80 vértices e 27 instâncias com pelo menos 85 vértices. O modelo (P_{ST+PC}) obteve os melhores tempos médios de CPU e menores gaps para todas as instâncias, enquanto $(P_{DC}{}^{\star})$ apresentou performance melhor que os demais modelos. O modelo (P_{Flow}) não foi capaz de resolver qualquer instância com pelo menos 85 vértices dentro de uma hora.

Modelo	$40 \leq \|V\| \leq 80$			$85 \leq \|V\| \leq 125$		
	CPU(s)	Gap %	Opt-Instâncias	CPU(s)	Gap %	Opt-Instâncias
P_{ST}	533.33	0.94	24	2691.15	2.27	8
P_{ST+PC}	15.41	0.00	27	2032.52	0.92	13
$P_{DC}{}^{\star}$	338.00	0.29	26	2316.96	1.98	11
P_{Flow}	1897.96	5.01	14	*	11.18	0
P_{HR}	574.04	0.87	23	2535.41	3.13	10

* O tempo limite de 3600 segundos foi atingido para todas as instâncias.

Tabela 1: Resultados computacionais para instâncias euclidianas aleatórias.

Exibimos na Tabela 2 detalhes completos de nossos experimentos numéricos. As instâncias foram rotuladas com um identificador "$\langle num\_vertices \rangle\_b\langle identificador \rangle$". Resultados são agrupados por modelo. A coluna CPU exibe o tempo de execução (em segundos). A coluna GAP exibe o gap relativo (UB-LB)/LB (em percentagem), onde as colunas LB e UB indicam o valor do melhor limite inferior e superior ou na solução ótima da instância, respectivamente, obtidos pelo CPLEX em no máximo uma hora de tempo de CPU. Os símbolos "H" e "-" denotam respectivamente 3600 segundos e 0.0%.

8 Conclusão

Este trabalho introduz novos modelos para o problema da árvore-estrela de custo mínimo. Exploramos propriedades estruturais do problema para obter desigualdades válidas, onde algumas delas foram úteis para fortalecer a relaxação linear do problema. Desigualdades válidas baseadas em conjuntos dominantes foram explorados em um "framework" de planos-de-corte e provaram ser úteis quando usados para caracterizar a subárvore de roteamento R no modelo (P_{ST+PC}). Entre os cinco modelos implementados, o modelo (P_{ST+PC}) superou todos os demais em termos de tempo de execução e gaps relativos, sugerindo que nosso (PC) pode beneficiar outros modelos, particularmente o modelo (P_{HR}).

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao CNPq (processo 449254/2014-3) e à CAPES (processo DS-1508171/15).

Somos gratos aos dois revisores pela leitura cuidadosa e por seus comentários e sugestões muito pertinentes.

	P_{HR}				P_{Flow}				$P_{DC}^{\star}$				P_{ST+PC}				P_{ST}			
Instância	CPU(s)	GAP(%)	LB	UB	CPU(s)	GAP(%)	LB	UB	CPU(s)	GAP(%)	LB	UB	CPU(s)	GAP(%)	LB	UB	CPU(s)	GAP(%)	LB	UB
40b20	8	-	4417	4417	3	-	4417	4417	3	-	4417	4417	1	-	4417	4417	6	-	4417	4417
40b21	1	-	3796	3796	6	-	3796	3796	1	-	3796	3796	1	-	3796	3796	1	-	3796	3796
40b22	15	-	4422	4422	16	-	4422	4422	6	-	4422	4422	2	-	4422	4422	13	-	4422	4422
45b20	1	-	4381	4381	22	-	4381	4381	2	-	4381	4381	1	-	4381	4381	2	-	4381	4381
45b21	1	-	4159	4159	43	-	4159	4159	1	-	4159	4159	1	-	4159	4159	1	-	4159	4159
45b22	18	-	4486	4486	20	-	4486	4486	4	-	4486	4486	1	-	4486	4486	17	-	4486	4486
50b20	6	-	4619	4619	42	-	4619	4619	3	-	4619	4619	1	-	4619	4619	7	-	4619	4619
50b21	1	-	4613	4613	2196	-	4613	4613	1	-	4613	4613	2	-	4613	4613	1	-	4613	4613
50b22	192	-	4642	4642	63	-	4642	4642	33	-	4642	4642	2	-	4642	4642	111	-	4642	4642
55b20	1	-	4908	4908	83	-	4908	4908	1	-	4908	4908	1	-	4908	4908	1	-	4908	4908
55b21	1	-	4829	4829	H	1.08	4777.4	4829	1	-	4829	4829	2	-	4829	4829	1	-	4829	4829
55b22	76	-	4844	4844	106	-	4844	4844	25	-	4844	4844	5	-	4844	4844	27	-	4844	4844
60b20	1	-	5035	5035	221	-	5035	5035	1	-	5035	5035	2	-	5035	5035	1	-	5035	5035
60b21	1	-	4974	4974	H	3.54	4803.94	4974	2	-	4974	4974	2	-	4974	4974	1	-	4974	4974
60b22	61	-	5124	5124	72	-	5124	5124	21	-	5124	5124	1	-	5124	5124	59	-	5124	5124
65b20	1	-	5310	5310	H	0.62	5277.28	5310	1	-	5310	5310	3	-	5310	5310	2	-	5310	5310
65b21	1	-	5236	5236	H	4.9	4991.42	5236	1	-	5236	5236	2	-	5236	5236	1	-	5236	5236
65b22	514	-	5351	5351	1552	-	5351	5351	124	-	5351	5351	8	-	5351	5351	699	-	5351	5351
70b20	1	-	5521	5521	H	5.11	5261.34	5530.2	2	-	5521	5521	5	-	5521	5521	2	-	5521	5521
70b21	1	-	5533	5533	H	6.4	5200.18	5533	3	-	5533	5533	5	-	5533	5533	2	-	5533	5533
70b22	H	0.2	5541.91	5553	H	3.11	5392.59	5560.3	2218	-	5553	5553	76	-	5553	5553	H	0.4	5530.87	5553
75b20	3	-	5583	5583	H	7.06	5214.83	5583	7	-	5583	5583	8	-	5583	5583	35	-	5583	5583
75b21	159	-	5856	5856	H	8.27	5408.7	5856	19	-	5856	5856	40	-	5856	5856	17	-	5856	5856
75b22	H	1.03	5684.45	5743	H	4.24	5509.4	5743	1032	-	5743	5743	15	-	5743	5743	H	0.47	5716.13	5743
80b20	35	-	5797	5797	H	6.68	5434	5797	25	-	5797	5797	104	-	5797	5797	225	-	5797	5797
80b21	H	0.72	6080.22	6124	H	8.94	5621.44	6124	1989	-	6124	6124	107	-	6124	6124	2368	-	6124	6124
80b22	H	1.52	5870.76	5960	H	5.24	5773.56	6076.1	H	0.29	5942.76	5960	18	-	5960	5960	H	1.94	5846.57	5960
85b20	12	-	6012	6012	H	8.69	5629.58	6118.8	12	-	6012	6012	6	-	6012	6012	55	-	6012	6012
85b21	H	1.42	6248.27	6337	H	8.8	5972.88	6498.5	H	0.8	6286.7	6337	118	-	6337	6337	H	0.94	6277.98	6337
85b22	21	-	6065	6065	H	6.84	5826.56	6225.1	18	-	6065	6065	100	-	6065	6065	142	-	6065	6065
90b20	130	-	6215	6215	H	10.56	5783.64	6394.4	73	-	6215	6215	37	-	6215	6215	284	-	6215	6215
90b21	H	0.63	6428.5	6469	H	7.83	6094.87	6572.1	1976	-	6469	6469	948	-	6469	6469	2248	-	6469	6469
90b22	1629	-	6165	6165	H	8.58	5838.55	6339.5	1092	-	6165	6165	493	-	6165	6165	H	0.86	6112.43	6165
95b20	233	-	6305	6305	H	9.96	5853.67	6436.7	57	-	6305	6305	7	-	6305	6305	218	-	6305	6305
95b21	H	3.9	6423.48	6674	H	9.13	6268.02	6840.3	H	2.61	6504.23	6674	335	-	6674	6674	H	3.08	6474.58	6674
95b22	H	2.27	6298.03	6441	H	10.04	5985.73	6586.7	H	1.27	6355.28	6436	H	0.79	6367.69	6418	H	2.73	6247.44	6418
100b20	138	-	6452	6452	H	10.92	6006.4	6662.3	39	-	6452	6452	11	-	6452	6452	142	-	6452	6452
100b21	H	4.93	6535.78	6858	H	10.32	6039.06	7009.1	H	2.86	6577.87	6766	113	-	6766	6766	H	3.27	6551.75	6766
100b22	H	2.64	6556.89	6730	H	9.89	6297.47	6920.3	H	1.29	6599.86	6685	H	3.03	6516.54	6714	H	2.51	6521.31	6685
105b20	1731	-	6657	6657	H	13.2	6198.14	7016.3	202	-	6657	6657	62	-	6657	6657	257	-	6657	6657
105b21	H	5.63	6598.5	6970	H	10.36	6358.28	7017	H	3.46	6610.28	6839	1557	-	6839	6839	H	4.02	6574.69	6839
105b22	H	1.5	6687.68	6788	H	10.66	6282.66	6952.4	H	0.35	6741.4	6765	H	0.52	6730	6765	H	2.01	6631.7	6765
110b20	H	0.46	6737	6768	H	11.37	6267.84	6980.5	694	-	6762	6762	691	-	6762	6762	915	-	6762	6762
110b21	H	6.01	6744.64	7150	H	11.91	6484.31	7256.6	H	4.23	6762.92	7049	H	1.44	6903.58	7003	H	4.19	6723.29	7005
110b22	57	-	6920	6920	H	12.73	6357.66	7167	79	-	6920	6920	H	0.36	6895.17	6920	H	0.55	6882.14	6920
115b20	H	0.58	6977.53	7018	H	14.53	6428.79	7362.9	H	0.16	7006.78	7018	H	0.21	7003.29	7018	H	0.54	6980.3	7018
115b21	H	6.15	6933.58	7360	H	11.56	6669.77	7440.8	H	4.15	6920.78	7208	H	0.64	7118.44	7164	H	4.19	6918.13	7208
115b22	601	-	7034	7034	H	12.63	6455.29	7270.6	716	-	7034	7034	H	0.43	7003.88	7034	H	0.88	6972.64	7034
120b20	H	1.82	7094.87	7224	H	13.75	6622.41	7533	H	0.58	7131.63	7173	H	0.33	7149.4	7173	H	1.29	7088.55	7180
120b21	H	4.87	7068.75	7413	H	10.42	6775.4	7481.4	H	3.81	7041.71	7310	H	2.14	7154.88	7308	H	3.89	7031.47	7305
120b22	2704	-	7132	7132	H	14.98	6493.47	7466.2	H	0.25	7114.21	7132	H	0.41	7102.87	7132	H	0.66	7085.23	7132
125b20	H	2.92	7287.21	7500	H	14.11	6785.55	7743	H	1.04	7322.84	7399	H	0.31	7376.13	7399	H	2.0	7253.92	7399
125b21	H	6.33	7223.73	7681	H	11.86	6972.55	7799.5	H	4.34	7232.12	7546	H	1.42	7414.71	7520	H	4.26	7211.77	7519
125b22	H	1.15	7242.7	7326	H	16.27	6664.83	7749.2	H	0.45	7282.22	7315	H	0.86	7252.62	7315	H	1.35	7217.56	7315
I.O.N.	33	21			14	40			37	17			40	14			32	22		
Média	1554.72	2.69			2748.98	9.17			1327.48	1.87			1023.96	0.92			1612.24	2.09		

I.O.N. é acrônimo para "Instâncias Ótimas/Não-ótimas" e corresponde ao número de instâncias resolvidas respectivamente, ou de forma ótima, ou com gap de otimalidade, para cada algoritmo.
O símbolo "H" denota 3600 segundos.
O símbolo "-" denota 0.0%.

Tabela 2: Resultados computacionais, em detalhes, obtidos com os cinco modelos que implementamos para 54 instâncias euclidianas aleatórias.

Referências

Gendron, B., Lucena, A., da Cunha, A. S., e Simonetti, L. (2014). Benders Decomposition, Branch-and-Cut, and Hybrid Algorithms for the Minimum Connected Dominating Set Problem. *INFORMS Journal on Computing*, 26(4):645–657.

Knippel, A., Minoux, M., e Gabrel, V. (1999). Exact solution of multicommodity network optimization problems with general step cost functions. *Operations Research Letters*, 25:15–23.

Knippel, A., Minoux, M., e Gabrel, V. (2003). A comparison of heuristics for the discrete cost multicommodity. *Operations Research Letters*, 9:429–445.

Knippel, A. e Nguyen, V. H. (2007). On Tree Star Network design. *Proceedings of International Network Optimization Conference INOC 2007*.

Lucena, A., da Cunha, A. S., e Simonetti, L. (2016). The Tree-Star Problem: A Formulation and a Branch-and-Cut Algorithm. *INOC 2015 – 7th International Network Optimization Conference*, 52:285–292.

Tardos, É. (1985). A strongly polynomial minimum cost circulation algorithm. 5(3):247–255.