



Rescalamento Não-Linear com Penalidade e Região de Confiança para Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo

Diego Nunes da Silva

Laboratório de Análise de Sistemas de Energia Elétrica – LASEE
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, EESC – USP
Av. Trabalhador São-Carlense, 400 - Centro, CEP: 13566-590, São Carlos - SP, Brasil
diegons@usp.br

Geraldo Roberto Martins da Costa

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, EESC – USP
Av. Trabalhador São-Carlense, 400 - Centro, CEP: 13566-590, São Carlos - SP, Brasil
geraldo@sc.usp.br

RESUMO

O problema de Fluxo de Potência Ótimo é um problema de programação não-linear, não-convexo, com restrições de igualdade e desigualdade, e com variáveis contínuas e discretas, utilizado no planejamento e operação dos sistemas elétricos de potência. Neste trabalho, uma nova abordagem para resolução deste problema é apresentada, a qual combina um método de rescalamento não-linear, um método de penalidade e um método de programação quadrática sequencial com região de confiança. Este último utiliza uma técnica de passo composto, de modo que o passo tentativo é determinado através da soma de um passo normal e um passo tangencial. Resultados numéricos obtidos com a abordagem proposta são apresentados para os sistemas elétricos IEEE de 14 e 30 barras.

PALAVRAS CHAVE. Fluxo de Potência Ótimo, Rescalamento Não-Linear, Região de Confiança.

Tópicos: EN - PO na Área de Energia, PM - Programação Matemática.

ABSTRACT

The Optimal Power Flow problem is a non-convex nonlinear programming problem, with equality and inequality constraints, and with continuous and discrete variables, which is applied in the electric power systems planning and operation. In this paper, we present a new approach to solve this problem, that combines a nonlinear rescaling method, a penalty method and a trust region sequential quadratic programming method. This latter one employs a composite step technique, so that the trial step is calculated as the sum of a normal step and a tangential step. Numerical experiments with the proposed approach for the IEEE 14 and 30 buses electric power systems are presented.

KEYWORDS. Optimal Power Flow, Nonlinear Rescaling, Trust Region.

Paper topics: EN - OR in Energy, MP - Mathematical Programming.



1. Introdução

O desenvolvimento da sociedade moderna está intimamente associado ao acesso à energia elétrica. No Brasil, o planejamento e operação do sistema elétrico é coordenado pelo Operador Nacional do Sistema (ONS), que atua de modo a garantir que a rede elétrica opere de forma segura, atendendo à demanda e aos padrões de qualidade da energia estipulados por órgãos reguladores.

Uma ferramenta bastante difundida para a tomada de decisão em sistemas de transmissão é o problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO), proposto por [Carpentier, 1962], que visa obter os ajustes das variáveis de controle, a fim de otimizar algum critério de desempenho da rede elétrica, ao mesmo tempo em que são satisfeitas suas restrições físicas e operacionais. O FPO constitui uma ampla classe de problemas de otimização em sistemas elétricos, sendo que neste trabalho considera-se o problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR), para minimização das perdas de potência ativa. Este problema tem sido amplamente investigado na literatura, e pode ser modelado como um problema de Programação Não-Linear (PNL), não-convexo, com restrições de igualdade e desigualdade, e com variáveis contínuas e discretas, sendo por isso de difícil resolução. No modelo de FPOR aqui apresentado, as variáveis contínuas são as magnitudes e ângulos de tensão (com exceção do ângulo da barra de referência), e as variáveis discretas são os *taps* dos transformadores em-fase e as susceptâncias equivalentes dos bancos de capacitores e reatores *shunt*.

Abordagens para resolução do problema de FPO com variáveis de controle discretas são reportadas na literatura, dentre as quais pode-se citar: métodos com penalidade não-diferenciável [Liu et al., 2002], métodos de planos de corte [Ding et al., 2004], metaheurísticas [AlRashidi e El-Hawary, 2007], métodos baseados em sensibilidade [Capitanescu e Wehenkel, 2010]. Recentemente, [Soler et al., 2012] propuseram uma função penalidade para tratamento das variáveis discretas em um problema de PNL. Nesta abordagem, a qual também é adotada neste trabalho, funções senoidais diferenciáveis penalizam a função objetivo quando as variáveis discretas não assumem valores discretos permitidos. Como as variáveis discretas são tratadas como contínuas, o problema penalizado pode ser resolvido através de métodos clássicos de otimização contínua.

Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar um método para PNL que possa resolver problemas de FPO com variáveis contínuas e discretas, quando combinado com a função penalidade de [Soler et al., 2012]. A abordagem proposta combina as ideias do método de rescalamento não-linear para tratamento das restrições de desigualdade [Polyak e Griva, 2004; Griva e Polyak, 2006], o método de programação quadrática sequencial e região de confiança de passo composto para problemas com restrições de igualdade [Lalee et al., 1998; Byrd et al., 2000], e a função penalidade para discretização de [Soler et al., 2012].

O restante deste trabalho está dividido como segue: na Seção 2 é apresentado o modelo matemático para o problema de FPOR com variáveis contínuas e discretas; na Seção 3, a abordagem proposta neste trabalho é descrita; na Seção 4 alguns resultados computacionais preliminares e análises dos mesmos são apresentados; finalmente, na Seção 5 algumas conclusões são delineadas.

2. Modelo Matemático para o problema de FPOR

O problema de FPOR é modelado matematicamente como um problema de PNL, não-convexo, estático, e com variáveis contínuas e discretas. Neste trabalho, em particular, consideramos o problema de FPOR para minimização das perdas de potência ativa na transmissão, que pode ser expresso por:

$$\min P_L(V, \theta, t) = \sum_{(k,m) \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}} g_{km} \left[\frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{t_{km}} V_k V_m \cos(\theta_k - \theta_m) \right] \quad (1a)$$

$$\text{s.a. } P_k - \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{G}' \cup \mathcal{C} \quad (1b)$$

$$Q_k + Q_k^{sh}(V_k, b_k^{sh}) - \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{C} \quad (1c)$$

$$Q_k^{G, \min} \leq Q_k^G(V, \theta, t, b_k^{sh}) \leq Q_k^{G, \max} \quad \forall k \in \mathcal{G} \quad (1d)$$



$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \forall k \in \mathcal{B} \quad (1e)$$

$$t_{km} \in \mathcal{D}_{km}^{tap} \quad \forall (k, m) \in \mathcal{T} \quad (1f)$$

$$b_k^{sh} \in \mathcal{D}_k^{sh} \quad \forall k \in \mathcal{B}^{sh} \quad (1g)$$

em que os fluxos de potência ativa e reativa da barra k para a barra m são calculados, respectivamente, por:

$$P_{km}(V, \theta, t) = g_{km} \frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 - \frac{1}{t_{km}} V_k V_m [g_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) + b_{km} \sin(\theta_k - \theta_m)],$$

$$Q_{km}(V, \theta, t) = - \left(b_{km} \frac{1}{t_{km}^2} + b_{km}^{sh} \right) V_k^2 + \frac{1}{t_{km}} V_k V_m [b_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) - g_{km} \sin(\theta_k - \theta_m)],$$

V e θ são, respectivamente, os vetores de magnitudes e ângulos de tensão; t é o vetor de *taps* dos transformadores em-fase; b^{sh} é o vetor das susceptâncias equivalentes dos bancos de capacitores e reatores *shunt*; P_k e Q_k são, respectivamente, as injeções de potência ativa e reativa na barra k ; Q_k^{sh} é a injeção de potência reativa na barra k por capacitores ou reatores *shunt*; Q_k^G é a geração de potência reativa na barra k ; $Q_k^{G,min}$ e $Q_k^{G,max}$ são, respectivamente, os limites mínimo e máximo para geração de potência reativa na barra k ; V_k^{min} e V_k^{max} são, respectivamente, os limites mínimo e máximo para a magnitude de tensão na barra k ; g_{km} e b_{km} são, respectivamente, a condutância e a susceptância série do ramo (k, m) .

Além disso, Ω_k é o conjunto das barras vizinhas à barra k ; \mathcal{G}' é o conjunto das barras de geração, excluindo-se a barra *slack*; \mathcal{G} é o conjunto das barras de geração; \mathcal{C} é o conjunto das barras de carga; \mathcal{B} é o conjunto de todas as barras do sistema elétrico; \mathcal{L} é o conjunto dos ramos que são linhas de transmissão; \mathcal{T} é o conjunto dos ramos com transformador em-fase; \mathcal{B}^{sh} é o conjunto das barras com bancos de capacitores e reatores *shunt*; \mathcal{D}_{km}^{tap} é o conjunto dos valores discretos admissíveis para o *tap* do transformador no ramo (k, m) ; \mathcal{D}_k^{sh} é o conjunto dos valores discretos admissíveis para a susceptância equivalente do banco de capacitores e reatores *shunt* na barra k .

3. Metodologia de Resolução

Nesta seção, a proposta metodológica deste trabalho é apresentada. Para tanto, as principais ideias dos métodos de rescalamento não-linear [Polyak e Griva, 2004; Griva e Polyak, 2006], do método de região de confiança de Byrd-Omojokun [Lalee et al., 1998; Byrd et al., 2000] e do método de penalidade discreta [Soler et al., 2012] são expostas.

3.1. Método de Rescalamento Não-Linear

A fim de apresentar o método de rescalamento não-linear, consideremos o seguinte PNL com apenas restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & h_j(x) \geq 0 \quad j = 1, \dots, n_h. \end{aligned} \quad (2)$$

Uma *função de rescalamento* é uma função $\psi : (a_0, a_1) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , em que $-\infty \leq a_0 < 0 < a_1 \leq \infty$, que satisfaz as condições:

- (P₁) $\psi(0) = 0$ e $\psi'(0) = 1$;
- (P₂) $\psi'(t) > 0$, para todo $t \in (a_0, a_1)$, isto é, ψ é uma função estritamente crescente;
- (P₃) $\psi''(t) < 0$, para todo $t \in (a_0, a_1)$, isto é, ψ é uma função estritamente côncava;
- (P₄) existe $a > 0$ tal que $\psi(t) \leq -at^2$, para $t \leq 0$;
- (P₅) existem $b > 0$ e $c > 0$ tais que $\psi'(t) \leq bt^{-1}$ e $-\psi''(t) \leq ct^{-2}$, para $t > 0$.

Pode-se verificar que a função barreira logarítmica modificada com extrapolação quadrática, apresentada a seguir, é uma função de rescalamento:

$$\psi(t) = \begin{cases} \ln(t+1), & \text{se } t \geq \beta \\ p(t) = \frac{1}{2}p_2t^2 + p_1t + p_0, & \text{se } t < \beta \end{cases} \quad (3)$$



em que $\beta \in (-1, 0)$ é o ponto de extrapolação e os parâmetros p_2 , p_1 e p_0 são calculados por:

$$p_2 = -\frac{1}{(1+\beta)^2}, \quad p_1 = \frac{1+2\beta}{(1+\beta)^2}, \quad p_0 = \ln(1+\beta) - \frac{\beta(2+3\beta)}{2(1+\beta)^2}. \quad (4)$$

Nota-se que a função de rescalamento em (3) está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $\mu > 0$, devido às propriedades de ψ , o seguinte problema é equivalente ao problema original:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & -\mu\psi\left(\frac{1}{\mu}h_j(x)\right) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_h. \end{aligned} \quad (5)$$

Ao problema transformado (5) podemos associar a seguinte função Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_\mu(x, \sigma) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^{n_h} \sigma_j \psi\left(\frac{1}{\mu}h_j(x)\right) \quad (6)$$

em que $\sigma \in \mathbb{R}_+^{n_h}$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange relacionado às restrições de desigualdade do problema transformado.

No método de rescalamento não-linear, a resolução do problema de PNL é feita de modo semelhante aos métodos de Lagrangiana aumentada clássicos: no ciclo interno, a função Lagrangiana do problema transformado (6) é minimizada em relação às variáveis primais, com multiplicadores de Lagrange, σ , e parâmetro de rescalamento, μ , fixos; no ciclo externo, σ e μ são atualizados. A atualização dos multiplicadores de Lagrange no ciclo externo é feita através da expressão:

$$\sigma_j^{k+1} = \sigma_j^k \psi'\left(\frac{1}{\mu^k}h_j(x^{k+1})\right), \quad j = 1, \dots, n_h. \quad (7)$$

em que x^{k+1} é a solução obtida no último ciclo interno.

3.2. Penalidade para discretização

Consideremos o seguinte problema de PNL com variáveis contínuas e discretas:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) \\ \text{s.a.} \quad & x_{2,i} \in \mathcal{D}_{x_{2,i}}, \quad i = 1, \dots, n_2 \end{aligned} \quad (8)$$

em que $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ é o vetor de variáveis contínuas, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ é o vetor de variáveis discretas e $\mathcal{D}_{x_{2,i}}$ é o conjunto de valores discretos permitidos para a variável $x_{2,i}$.

Neste trabalho, uma função penalidade $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é utilizada para tratamento das variáveis discretas x_2 , conforme descrito em [Soler et al., 2012]:

$$\phi(x_{2,i}) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_{2,i} \leq \underline{x}_{2,i} \text{ ou } x_{2,i} > \overline{x}_{2,i} \\ [\text{sen}(v_i(x_{2,i} - d_i^L))]^2, & \text{se } \underline{x}_{2,i} < x_{2,i} \leq \overline{x}_{2,i} \end{cases} \quad (9)$$

em que $v_i = \frac{\pi}{d_i^U - d_i^L}$, d_i^L é o valor discreto em $\mathcal{D}_{x_{2,i}}$ mais próximo e menor que $x_{2,i}$, d_i^U é o valor discreto em $\mathcal{D}_{x_{2,i}}$ mais próximo e maior ou igual a $x_{2,i}$, $\underline{x}_{2,i} = \min \mathcal{D}_{x_{2,i}}$ e $\overline{x}_{2,i} = \max \mathcal{D}_{x_{2,i}}$. Esta função se anula no intervalo $[\underline{x}_{2,i}, \overline{x}_{2,i}]$ somente para valores discretos em $\mathcal{D}_{x_{2,i}}$.

Termos de penalidade são associados a cada variável discreta e acrescentados à função objetivo através de parâmetros de penalidade γ_i , $i = 1, \dots, n_2$, obtendo-se o seguinte problema de penalidade:

$$\min \quad f(x) + \sum_{i=1}^{n_2} \gamma_i \phi(x_{2,i}) \quad (10a)$$

$$\text{s.a.} \quad \underline{x}_{2,i} \leq x_{2,i} \leq \overline{x}_{2,i}, \quad i = 1, \dots, n_2 \quad (10b)$$

Este problema de penalidade pode ser resolvido através de um método para problemas de PNL com restrições de desigualdade, tal como o método de rescalamento não linear, descrito na Subseção 3.1. Como o valor dos parâmetros γ_i afeta a forma da função objetivo do problema de penalidade (10a), o processo de otimização é iniciado com valores baixos para os parâmetros de penalidade, os quais são gradativamente aumentados até que as variáveis discretas tenham assumido



valores discretos permitidos [Soler et al., 2012]. A atualização do parâmetro de penalidade será feita através da expressão:

$$\gamma_i^{k+1} = \tau_{\gamma_i} \gamma_i^k, \quad i = 1, \dots, n_2 \quad (11)$$

em que $\tau_{\gamma_i} > 1$ é o fator de atualização de γ_i .

O processo de resolução do problema penalizado e atualização dos parâmetros de penalidade continua até que a seguinte condição de discretização seja satisfeita:

$$|x_{2,i}^k - x'_{2,i}| < \varepsilon_D, \quad i = 1, \dots, n_2, \quad (12)$$

onde $x'_{2,i} \in \mathcal{D}_{x_{2,i}}$ é o valor discreto permitido mais próximo de $x_{2,i}^k$ e ε_D é a tolerância de discretização no algoritmo.

3.3. Método de Região de Confiança para PNL com Restrições de Igualdade

Seja o seguinte problema de PNL, com apenas restrições de igualdade:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, n_g \end{aligned} \quad (13)$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_g}$ são funções de classe C^2 .

A função Lagrangiana associada a esse problema é expressa por:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{n_g} \lambda_i g_i(x). \quad (14)$$

Para cada iterando x^k , um raio $\Delta^k > 0$ da região de confiança e multiplicadores de Lagrange λ^k são escolhidos, e um passo tentativo d^k é computado resolvendo o seguinte problema de programação quadrática, com uma restrição de região de confiança:

$$\begin{aligned} \min \quad & q_k(d) = \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \\ \text{s.a.} \quad & Jg(x^k)d + g(x^k) = 0 \\ & \|d\| \leq \Delta^k \end{aligned} \quad (15)$$

no qual $Jg(x^k)$ é a matriz Jacobiana de g avaliada em x^k e B_k é uma matriz simétrica que aproxima a matriz Hessiana da função Lagrangiana em relação às variáveis primais, $\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^k, \lambda^k)$. Assumiremos que a matriz $Jg(x^k)$ possui posto completo, para todo x^k .

Algumas dificuldades podem ocorrer na tentativa de resolver (15). Em especial, se o raio da região de confiança for pequeno, a restrição de região de confiança, $\|d\| \leq \Delta^k$, pode impedir o atendimento das restrições de igualdade linearizadas levando à infactibilidade do problema.

Em vez de atender as restrições linearizadas de modo exato a cada iteração, no método de passo composto de Byrd-Omojokun busca-se atendê-las da melhor maneira possível, no sentido de mínimos quadrados, e satisfazê-las de maneira exata apenas quando a região de confiança permite. Neste método, o passo tentativo é decomposto da forma:

$$d^k = n^k + t^k \quad (16)$$

em que n^k é um *passo normal*, que busca satisfazer as restrições linearizadas da melhor maneira possível, e t^k é um *passo tangencial* que busca reduzir o modelo, preservando quaisquer ganhos de factibilidade atingidos através de n^k .

3.3.1. Subproblema Normal

O passo normal, n^k , é calculado minimizando-se o resíduo das restrições linearizadas na norma ℓ_2 , através do seguinte *subproblema normal*:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \|Jg(x^k)n + g(x^k)\|^2 \\ \text{s.a.} \quad & \|n\| \leq \zeta \Delta^k \end{aligned} \quad (17)$$

em que $\zeta \in (0, 1)$. O fator de contração ζ evita que um passo normal na fronteira da região de confiança seja computado, o que poderia impossibilitar o progresso em direção à otimalidade através do passo tangencial.



O subproblema normal sempre possui uma solução na imagem de $Jg(x^k)^T$ (aqui denotada por $\mathcal{R}(Jg(x^k)^T)$), isto é, n^k é uma combinação linear das colunas de $Jg(x^k)^T$. Esta propriedade aparentemente simples permite desacoplar o cálculo dos passos normal e tangencial.

Na prática, na maioria das vezes não computaremos a solução exata n^k . Entretanto, é importante que a solução quase-exata ou aproximada obtida ao resolver o subproblema normal esteja na imagem de $Jg(x^k)^T$, pois a simplificação do subproblema tangencial apresentado a seguir depende desta propriedade. Na implementação deste trabalho, utilizou-se o método *dogleg* de Powell para obter um passo normal aproximado [Powell, 1969; Lalee et al., 1998].

3.3.2. Subproblema Tangencial

O passo tangencial, t^k , é obtido resolvendo a seguinte versão relaxada do problema (15):

$$\begin{aligned} \min \quad & q_k(d) = \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \\ \text{s.a.} \quad & Jg(x^k)d + g(x^k) = r^k \\ & \|d\| \leq \Delta^k \end{aligned} \quad (18)$$

Idealmente, gostaríamos que o resíduo r^k fosse nulo. Contudo, conforme discutido anteriormente, isto pode tornar o problema infactível. Em vez disso, escolhemos r^k a partir da solução do subproblema normal, $r^k = Jg(x^k)n^k + g(x^k)$. Assim, r^k é o resíduo de norma mínima que garante que as restrições sejam compatíveis com uma margem, dependendo do parâmetro ζ .

Observando que $d = n^k + t$ e ignorando termos constantes da função objetivo, o subproblema tangencial pode ser reescrito na variável t , que é o passo tangencial:

$$\begin{aligned} \min \quad & [\nabla f(x^k) + B_k n^k]^T t + \frac{1}{2} t^T B_k t \\ \text{s.a.} \quad & Jg(x^k)t = 0 \\ & \|n^k + t\| \leq \Delta^k \end{aligned} \quad (19)$$

Nota-se que qualquer solução factível t está no núcleo de $Jg(x^k)$. Logo, se uma base $Z_k \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ para $\mathcal{N}(Jg(x^k))$ – o núcleo de $Jg(x^k)$ – for conhecida, então o passo tangencial pode ser obtido como combinação linear das colunas de Z_k , isto é, $t = Z_k u$, onde $u \in \mathbb{R}^{n-m}$. Esta mudança de variável permite eliminar a restrição de igualdade. Deve-se recordar que $n^k \in \mathcal{R}(Jg(x^k)^T)$ e que, por sua vez, $\mathcal{R}(Jg(x^k)^T) = \mathcal{N}(Jg(x^k))^\perp$. Assim, o passo normal n^k é ortogonal a $t = Z_k u$. Tendo em vista este fato, deve valer a igualdade pitagórica:

$$\|n^k + Z_k u\|^2 = \|n^k\|^2 + \|Z_k u\|^2. \quad (20)$$

Substituindo $t = Z_k u$ em (19) e considerando a igualdade (20), o subproblema tangencial pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \min \quad & [\nabla f(x^k) + B_k n^k]^T Z_k u + \frac{1}{2} u^T Z_k^T B_k Z_k u \\ \text{s.a.} \quad & \|Z_k u\| \leq \sqrt{(\Delta^k)^2 - \|n^k\|^2} \end{aligned} \quad (21)$$

Neste trabalho, uma base ortonormal Z_k é calculada utilizando uma fatoração QR de $Jg(x^k)^T$. A vantagem de se utilizar uma base ortonormal é que $\|Z_k u\| = \|u\|$, e a restrição de região de confiança é simplificada ainda mais. Na implementação utilizada, (21) é resolvido de forma aproximada pelo método do gradiente conjugado de Steihaug [Steihaug, 1983].

3.3.3. Multiplicadores de Lagrange

Os multiplicadores de Lagrange utilizados no cálculo de B_k não são obtidos como subproduto durante a resolução aproximada dos subproblemas normal e tangencial. Portanto, a cada novo iterando é necessário obter uma nova estimativa λ^k . Dado um iterando x^k , uma estimativa de mínimos quadrados pode ser obtida resolvendo o sistema linear:

$$[Jg(x^k)Jg(x^k)^T]\lambda^k = -Jg(x^k)\nabla f(x^k). \quad (22)$$

Neste trabalho, este sistema linear é resolvido computando uma fatoração de Cholesky de $Jg(x^k)Jg(x^k)^T$, que pode ser reaproveitada no método *dogleg* para calcular o passo normal e no procedimento de correção de segunda ordem, se necessário.



3.3.4. Função de Mérito e Correção de Segunda Ordem

A seguinte função de mérito é utilizada para avaliar a qualidade do passo tentativo d^k :

$$\omega(x, \eta) = f(x) + \eta \|g(x)\| \quad (23)$$

em que $\eta > 0$ é o parâmetro de penalidade da função de mérito, que pondera o atendimento das restrições de igualdade e a redução da função objetivo.

O modelo, $\bar{\omega}$, da função de mérito ω , em torno de um ponto x^k , é expresso por:

$$\bar{\omega}(d, \eta) = \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d + \eta \|Jg(x^k)d + g(x^k)\|. \quad (24)$$

A *redução predita* pelo modelo da função de mérito é calculada por:

$$\begin{aligned} \text{pred}(d^k, \eta^+) &= \bar{\omega}(0, \eta^+) - \bar{\omega}(d^k, \eta^+) \\ &= -\nabla f(x^k)^T d^k - \frac{1}{2} (d^k)^T B_k d^k + \eta^+ (\|g(x^k)\| - \|Jg(x^k)d^k + g(x^k)\|) \end{aligned} \quad (25)$$

em que η^+ é o valor tentativo do parâmetro de penalidade, calculado por:

$$\eta^+ = \max \left\{ \eta^k, 0, 1 + \frac{\nabla f(x^k)^T d^k + \frac{1}{2} (d^k)^T B_k d^k}{\|g(x^k)\| - \|Jg(x^k)d^k + g(x^k)\|} \right\} \quad (26)$$

Esta escolha de parâmetro de penalidade garante que a redução predita é sempre positiva, e que a sequência de parâmetros de penalidade é monotonicamente crescente, o que é uma propriedade importante na análise de convergência global do algoritmo [Byrd et al., 1999]. Este valor de η^+ é, em seguida, aperfeiçoado pela heurística descrita em [Lalee et al., 1998].

A *redução real* na função de mérito é definida como:

$$\begin{aligned} \text{ared}(d^k, \eta^+) &= \omega(x^k, \eta^+) - \omega(x^k + d^k, \eta^+) \\ &= f(x^k) - f(x^k + d^k) + \eta^+ (\|g(x^k)\| - \|g(x^k + d^k)\|). \end{aligned} \quad (27)$$

Se $\text{ared}(d^k, \eta^+) \geq \rho_1 \text{pred}(d^k, \eta^+)$, então o passo tentativo é aceito e o ponto atualizado por $x^{k+1} = x^k + d^k$. Por outro lado, se $\text{ared}(d^k, \eta^+) < \rho_1 \text{pred}(d^k, \eta^+)$, ou o passo tentativo é rejeitado ou um procedimento de correção de segunda ordem é chamado.

A função de mérito (23), por ser não-diferenciável, é suscetível à ocorrência do efeito Maratos, o qual pode afetar o desempenho do método. Este problema pode ser evitado computando um termo de *correção de segunda ordem* [Lalee et al., 1998]:

$$y^k = -Jg(x^k)^T [Jg(x^k)Jg(x^k)^T]^{-1} g(x^k + d^k). \quad (28)$$

Nota-se que o cálculo de y^k pode reaproveitar a fatoração de Cholesky de $Jg(x^k)Jg(x^k)^T$ utilizada no cálculo dos multiplicadores de Lagrange. Este termo é adicionado ao passo tentativo d^k , obtendo-se o passo tentativo corrigido:

$$d_{CSO}^k = d^k + y^k. \quad (29)$$

Como o cálculo de d_{CSO}^k aumenta o custo computacional de uma iteração, a correção de segunda ordem somente é aplicada quando d^k for rejeitado e, além disso, o ponto x^k for quase factível e o passo normal for pequeno quando comparado ao passo tangencial, o que é testado através das condições:

$$\|n^k\| \leq 0,8\zeta\Delta^k \quad \text{e} \quad \|n^k\| \leq 0,1\|t^k\|. \quad (30)$$

Quando um passo de correção de segunda ordem é obtido, a redução real é recalculada, utilizando d_{CSO}^k . Se uma redução suficiente na função de mérito for obtida, isto é,

$$\text{ared}(d_{CSO}^k, \eta^+) \geq \rho_1 \text{pred}(d^k, \eta^+), \quad (31)$$

então atualiza-se o ponto por $x^{k+1} = x^k + d_{CSO}^k$. Caso contrário, o passo tentativo é rejeitado.



3.3.5. Atualização do Raio da Região de Confiança

Se um passo tentativo d^k (ou d_{CSO}^k) é aceito, isto é, $\rho^k = \frac{\text{ared}(d^k, \eta^+)}{\text{pred}(d^k, \eta^+)} \geq \rho_1$, o raio é atualizado de acordo com a regra:

$$\Delta^{k+1} = \begin{cases} \min\{\bar{\Delta}, \max\{5\|d^k\|, \Delta^k\}\}, & \text{se } \rho^k \geq \rho_3 \\ \min\{\bar{\Delta}, \max\{2\|d^k\|, \Delta^k\}\}, & \text{se } \rho_2 \leq \rho^k < \rho_3 \\ \Delta^k, & \text{se } \rho_1 \leq \rho^k < \rho_2 \end{cases} \quad (32)$$

em que $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < 1$ são parâmetros pré-definidos pelo usuário e $\bar{\Delta} > 0$ é um limitante superior para o raio da região de confiança.

Se o passo tentativo for rejeitado, isto é, $\rho^k < \rho_1$, o raio da região de confiança é reduzido a uma fração $\bar{\delta} \in [0,1, 0,5]$ do comprimento do passo rejeitado, d^k . Para tanto calcula-se:

$$\bar{\delta} = \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho^k}, \quad (33)$$

e o raio da região de confiança é reduzido por:

$$\Delta^{k+1} = \begin{cases} 0,1\|d^k\|, & \text{se } \bar{\delta} < 0,1 \\ \bar{\delta}\|d^k\|, & \text{se } 0,1 \leq \bar{\delta} \leq 0,5 \\ 0,5\|d^k\|, & \text{se } \bar{\delta} > 0,5 \end{cases} \quad (34)$$

Tendo em vista o exposto, o Algoritmo 1 sintetiza os principais passos do método de região de confiança de Byrd-Omojokun, para problemas de PNL com restrições de igualdade.

Algoritmo 1: Método de Região de Confiança

Entrada: Parâmetros: $\varepsilon > 0$, $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < 1$, $\zeta \in (0, 1)$

Escolher x^0 , $\Delta^0 > 0$ e $\eta^0 > 0$

Saída: Solução x^k dentro da tolerância especificada, ε , para as condições necessárias de KKT.

- 1 **loop** começando com $k = 0$
 - 2 Calcular $f(x^k)$, $g(x^k)$, $\nabla f(x^k)$, $Jg(x^k)$ e λ^k
 - 3 **se** $\|\nabla f(x^k) + Jg(x^k)^T \lambda^k\|_\infty < \varepsilon$ e $\|g(x^k)\|_\infty < \varepsilon$ **então** *pare*
 - 4 Calcule o passo normal n^k
 - 5 Obtenha B_k e uma base ortonormal Z_k para $\mathcal{N}(Jg(x^k))$
 - 6 Calcule o passo tangencial t^k
 - 7 Faça $d^k = n^k + t^k$, calcule η^+ , $\text{pred}(d^k, \eta^+)$, $\text{ared}(d^k, \eta^+)$ e ρ^k
 - 8 **se** $\rho^k \geq \rho_1$ **então** faça $x^{k+1} = x^k + d^k$, $\eta^{k+1} = \eta^+$ e atualize o raio por (32)
 - 9 **senão se** $\|n^k\| \leq 0,8\zeta\Delta^k$ e $\|n^k\| \leq 0,1\|t^k\|$ **então**
 - 10 Calcular um passo de correção de segunda ordem, d_{CSO}^k
 - 11 Calcular $\text{ared}(d_{CSO}^k, \eta^+)$ e $\rho_{CSO}^k = \frac{\text{ared}(d_{CSO}^k, \eta^+)}{\text{pred}(d_{CSO}^k, \eta^+)}$
 - 12 **se** $\rho_{CSO}^k \geq \rho_1$ **então** faça $x^{k+1} = x^k + d_{CSO}^k$, $\eta^{k+1} = \eta^+$ e atualize o raio por (32)
 - 13 **senão** faça $x^{k+1} = x^k$, $\eta^{k+1} = \eta^k$ e atualize o raio por (34)
 - 14 **senão** faça $x^{k+1} = x^k$, $\eta^{k+1} = \eta^k$ e atualize o raio por (34)
 - 15 $k = k + 1$
-

3.4. Algoritmo de RNPRC

Com base no que foi exposto, apresentamos agora a proposta deste trabalho, denominada algoritmo de Rescalamento Não-Linear com Penalidade e Região de Confiança (RNPRC). Para



tanto, consideremos o seguinte problema de PNL com variáveis contínuas e discretas:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g(x) = 0 \\ & h(x) \leq 0 \\ & x_{2,i} \in \mathcal{D}_{x_{2,i}}, \quad i = 1, \dots, n_2 \end{aligned} \quad (35)$$

em que $x = (x_1, x_2)$ é o vetor de variáveis do problema, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ é o vetor de variáveis contínuas, $x_2 \in \prod_{i=1}^{n_2} \mathcal{D}_{x_{2,i}} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ é o vetor de variáveis discretas, e $\mathcal{D}_{x_{2,i}}$ é o conjunto de valores discretos aceitáveis para a variável $x_{2,i}$, com $i = 1, \dots, n_2$.

Utilizando a função de penalidade apresentada na Subseção 3.2 e assumindo que as desigualdades em (10b) já estão incluídas nas restrições $h(x) \leq 0$, a discretização das variáveis é feita através da resolução da sequência de problemas modificados:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n_2} \gamma_i \phi(x_{2,i}) \\ \text{s.a.} \quad & g(x) = 0 \\ & h(x) + s = 0 \\ & s \geq 0 \end{aligned} \quad (36)$$

em que $s \in \mathbb{R}^{n_h}$ são variáveis de folga.

Utilizando o método de rescalamento não-linear descrito na Subseção 3.1, o problema modificado (36) pode ser resolvido através de uma sequência de problemas de rescalamento não-linear da forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi_\mu(x, s) = f(x) + \sum_{i=1}^{n_2} \gamma_i \phi(x_{2,i}) - \mu \sum_{j=1}^{n_h} \sigma_j \psi\left(\frac{1}{\mu} s_j\right) \\ \text{s.a.} \quad & g(x) = 0 \\ & h(x) + s = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Como cada problema de rescalamento não-linear com penalidade possui apenas restrições de igualdade, ele pode ser resolvido através do método de região de confiança da Subseção 3.3. Com base no que foi exposto, a abordagem proposta é apresentada no Algoritmo 2.

4. Experimentos Numéricos

Testes numéricos preliminares foram conduzidos em problemas de FPOR com variáveis contínuas e discretas, utilizando os sistemas elétricos IEEE de 14 e 30 barras. Os parâmetros destas redes podem ser obtidos em <https://www2.ee.washington.edu/research/pstca>, sendo que alguns dados são apresentados na Tabela 1. O algoritmo proposto foi implementado em linguagem Matlab[®] e executado em um microcomputador com processador Intel Core i7-4770 3.50 GHz e 16GB de memória RAM.

Admitiu-se que os *taps* dos transformadores possuem limites mínimo e máximo iguais a 0,88 p.u. e 1,12 p.u., respectivamente. No caso de *taps* discretos, considerou-se que os mesmos devem pertencer ao conjunto discreto igualmente espaçado por passos de 0,0075 p.u. entre 0,88 p.u. e 1,12 p.u., totalizando 33 posições discretas possíveis para cada transformador. Para as magnitudes de tensão, os limites mínimo e máximo adotados foram, respectivamente, $\underline{V} = 0,95$ p.u. e $\bar{V} = 1,05$ p.u. Os valores das susceptâncias *shunt* equivalentes discretas foram extraídos de [Lage, 2013], e são apresentadas na Tabela 2. Na execução do algoritmo RNPRC, utilizou-se os parâmetros indicados na Tabela 3, em que ϵ_{GCS} é a precisão utilizada no método do gradiente conjugado de Steihaug, para obtenção do passo tangencial. No caso discreto, a primeira iteração externa é executada com parâmetro de penalidade discreta γ^0 nulo. Somente a partir do segundo ciclo externo (γ^1), o parâmetro de penalidade é introduzido.



Algoritmo 2: Algoritmo de RNPRC

Entrada: Parâmetros do método de rescalamento não-linear: $\sigma^0 \in (\mathbb{R}_+^*)^{n_h}$, $\mu^0 > 0$, $\tau_\mu \in (0, 1)$

Parâmetros do método de região de confiança: $\varepsilon_{RC} > 0$, $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < 1$, $\zeta \in (0, 1)$

Parâmetros do método de penalidade discreta: $\gamma^0 > 0$, $\tau_\gamma > 1$, $\varepsilon_D > 0$

Escolher x^0 , s^0 , λ_g^0 , λ_h^0 e a tolerância de parada $\varepsilon > 0$

Saída: Solução x^k satisfazendo as condições necessárias de KKT para o problema penalizado (36) com tolerância ε e precisão ε_D para a condição de discretização (12)

- 1 $k = 0$
- 2 **enquanto** as condições necessárias de KKT de (36) não forem satisfeitas para $(x^k, s^k, \lambda_g^k, \lambda_h^k)$ com a precisão ε e a condição de discretização (12) não for satisfeita com precisão ε_D
- 3 Forme o problema (37) e resolva-o pelo método de região de confiança do Algoritmo 1 com precisão ε_{RC} , obtendo $(x^{k+1}, s^{k+1}, \lambda_g^{k+1}, \lambda_h^{k+1})$
- 4 Atualize $\sigma_j^{k+1} = \sigma_j^k \psi' \left(\frac{1}{\mu^k} s_j^{k+1} \right)$, $j = 1, \dots, n_h$
- 5 **se** as condições necessárias de KKT de (36) não forem satisfeitas para $(x^k, s^k, \lambda_g^k, \lambda_h^k)$ com a precisão ε **então** atualize $\mu^{k+1} = \tau_\mu \mu^k$
- 6 **se** a condição de discretização (12) não for satisfeita com precisão ε_D **então** atualize $\gamma^{k+1} = \tau_\gamma \gamma^k$
- 7 $k = k + 1$

Tabela 1: Dados dos sistemas elétricos testados.

Sistema	$ \mathcal{B} $	$ \mathcal{G} $	$ \mathcal{C} $	$ \mathcal{L} $	$ \mathcal{T} $	$ \mathcal{B}^{sh} $
IEEE 14 barras	14	5	9	17	3	1
IEEE 30 barras	30	6	24	37	4	2

Tabela 2: Susceptâncias *shunt* equivalentes discretas.

Sistema	Susceptâncias <i>shunt</i> equivalentes
IEEE 14 barras	$\mathcal{D}_9^{sh} = \{0; 0,05; 0,15; 0,19; 0,20; 0,24; 0,34; 0,39\}$
IEEE 30 barras	$\mathcal{D}_{10}^{sh} = \{0; 0,05; 0,15; 0,19; 0,20; 0,24; 0,34; 0,39\}$ $\mathcal{D}_{24}^{sh} = \{0; 0,04; 0,05; 0,09\}$

Tabela 3: Parâmetros utilizados nos testes.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
ε	10^{-6}	ρ_1	0,1	Δ^0	1	τ_μ	0,4
ε_{RC}	10^{-6}	ρ_2	0,3	ζ	0,8	β	-0,9
ε_D	10^{-5}	ρ_3	0,9	η^0	0,001	γ^1	10^{-6}
ε_{GCS}	10^{-8}	$\bar{\Delta}$	100	μ^0	0,1	τ_γ	2,5

As Figuras 1a e 1b apresentam os perfis de magnitude de tensão para os sistemas elétricos testados, resolvendo-se a relaxação contínua e o caso discreto. Nelas, as linhas tracejadas correspondem aos limites inferior e superior para as magnitudes de tensão. As Tabelas 4 e 5 apresentam os valores dos *taps* dos transformadores e das susceptâncias *shunt* equivalentes dos bancos de capacitores, para a relaxação contínua e para o caso discreto dos sistemas IEEE de 14 e 30 barras, respectivamente, bem como o número de iterações externas efetuadas pelo Algoritmo RNPRC e o valor da perda de potência ativa na solução obtida.

A Tabela 6 compara os valores ótimos e tempos computacionais para o caso discreto obtidos pelo método proposto (RNPRC) e o *solver* IPOPT, utilizado no trabalho de [Mazzini e Asada, 2014]. Ressalta-se, porém, que a comparação dos tempos computacionais deve ser feita com cuidado, uma vez que o *solver* IPOPT é um pacote de otimização não-linear maduro, beneficiado



pelos anos de experiência de seus desenvolvedores e implementado em uma linguagem compilada, enquanto que a abordagem aqui proposta foi implementada em uma linguagem interpretada.

Em ambos sistemas testados, nota-se que a perda de potência ativa no caso discreto é levemente maior que aquela da relaxação contínua, o que era esperado, e que o algoritmo discretizou adequadamente as variáveis de controle discretas. Observa-se que a função penalidade não atua arredondando os valores discretos para a posição discreta mais próxima, o que permite que o método tenha maior liberdade para determinar soluções discretas de boa qualidade.

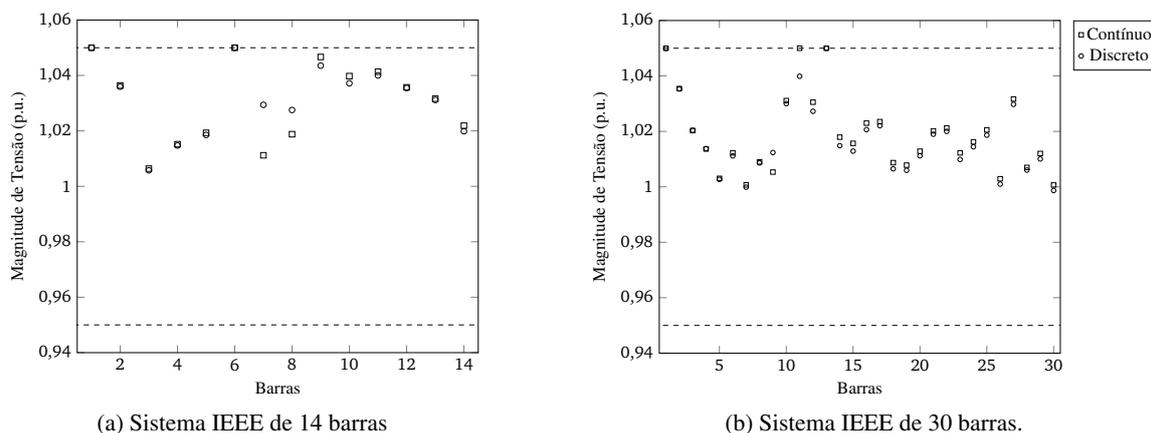


Figura 1: Magnitudes de Tensão para a Relaxação Contínua e Problema Discreto.

Tabela 4: Resultados: Sistema IEEE de 14 barras.

Caso	# It. Ext.	$t_{4,7}$	$t_{4,9}$	$t_{5,6}$	b_9^{sh}	Perda (MW)
Rel. Cont.	8	1,08333	0,88000	0,98106	0,39000	13,60419
Discreto	11	1,00750	0,97750	0,97750	0,39000	13,60651

Tabela 5: Resultados: Sistema IEEE de 30 barras.

Caso	# It. Ext.	$t_{6,9}$	$t_{6,10}$	$t_{4,12}$	$t_{28,27}$	b_{10}^{sh}	b_{24}^{sh}	Perda (MW)
Rel. Cont.	9	1,10723	0,93769	0,98163	0,95412	0,39000	0,09000	17,75429
Discreto	12	1,06000	0,97000	0,99250	0,95500	0,39000	0,09000	17,75790

Tabela 6: Comparação dos Resultados do Caso Discreto.

Sistema	IEEE de 14 barras		IEEE de 30 barras	
Método	RNPRC	IPOPT	RNPRC	IPOPT
Perda – Discreto (MW)	13,60651	13,61	17,75790	17,76
Tempo (s)	0,80452	0,657	1,07143	0,875

5. Conclusões

O problema de FPO pode ser modelado matematicamente como um problema de PNL, não-convexo, estático, com restrições de igualdade e desigualdade e com variáveis contínuas e discretas, sendo um problema clássico na área de sistemas elétricos de potência. Neste trabalho, uma nova abordagem que combina os métodos de rescalamento não-linear, penalidade e região de confiança foi proposta para resolução do problema de FPO. Este algoritmo, denominado Rescalamento Não-Linear com Penalidade e Região de Confiança (RNPRC), foi aplicado ao problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR) com variáveis contínuas e discretas, para os sistemas elétricos IEEE de 14 e 30 barras. Os resultados indicam que a abordagem desenvolvida é promissora para resolução de problemas de PNL com variáveis contínuas e discretas, em particular para problemas de FPO. Propostas futuras para aperfeiçoamento deste trabalho incluem sua aplicação a sistemas elétricos de maior dimensão, refinamento do algoritmo e a resolução de problemas de FPOR com variáveis discretas e restrições de complementaridade.



6. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), bem como os revisores, cujos comentários possibilitaram a melhoria deste trabalho.

Referências

- AlRashidi, M. R. e El-Hawary, M. E. (2007). Hybrid Particle Swarm Optimization Approach for Solving the Discrete OPF Problem Considering the Valve Loading Effects. *IEEE Transactions on Power Systems*, 22(4):2030–2038.
- Byrd, H. R., Gilbert, C. J., e Nocedal, J. (2000). A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 89(1):149–185.
- Byrd, R. H., Hribar, M. E., e Nocedal, J. (1999). An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming. *SIAM Journal on Optimization*, 9(4):877–900.
- Capitanescu, F. e Wehenkel, L. (2010). Sensitivity-Based Approaches for Handling Discrete Variables in Optimal Power Flow Computations. *IEEE Transactions on Power Systems*, 25(4): 1780–1789.
- Carpentier, J. L. (1962). Contribution à l'étude du dispatching économique. *Bulletin de la Société Française des Electriciens*, 3(8):431–447.
- Ding, X., Wang, X., e Song, Y. H. (2004). Interior point cutting plane method for optimal power flow. *IMA Journal of Management Mathematics*, 15(4):355–368.
- Griva, I. e Polyak, A. R. (2006). Primal-dual nonlinear rescaling method with dynamic scaling parameter update. *Mathematical Programming*, 106(2):237–259.
- Lage, G. G. (2013). *O Fluxo de Potência Ótimo Reativo com Variáveis de Controle Discretas e Restrições de Atuação de Dispositivos de Controle de Tensão*. Tese (Doutorado), Universidade de São Paulo.
- Lalee, M., Nocedal, J., e Plantenga, T. (1998). On the implementation of an algorithm for large-scale equality constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 8(3):682–706. ISSN 1052-6234.
- Liu, M., Tso, S. K., e Cheng, Y. (2002). An extended nonlinear primal-dual interior-point algorithm for reactive-power optimization of large-scale power systems with discrete control variables. *IEEE Transactions on Power Systems*, 17(4):982–991.
- Mazzini, A. P. e Asada, E. N. (2014). A penalty function for reactive power optimization with discrete variables. In *2014 IEEE PES General Meeting | Conference Exposition*, p. 1–5.
- Polyak, R. e Griva, I. (2004). Primal-dual nonlinear rescaling method for convex optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 122(1):111–156.
- Powell, M. J. D. (1969). A method for nonlinear constraints in minimization problems. In Fletcher, R., editor, *Optimization*, p. 283–298. Academic Press, New York.
- Soler, E. M., de Sousa, V. A., e Costa, G. R. M. (2012). A modified primal-dual logarithmic-barrier method for solving the optimal power flow problem with discrete and continuous control variables. *European Journal of Operational Research*, 222(3):616–622.
- Steihaug, T. (1983). The Conjugate Gradient Method and Trust Regions in Large Scale Optimization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3):626–637.