ABORDAGEM ESTOCÁSTICA COM RECURSO EM DOIS ESTÁGIOS APLICADA A UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR SUJEITOS A INCERTEZAS

Geovana Aparecida França dos Santos
Universidade Estadual do Paraná – Campus de Campo Mourão
Av. Comendador Norberto Marcondes, 733 – Centro.
geovanaafs@gmail.com

Solange Regina dos Santos
Universidade Estadual do Paraná – Campus de Campo Mourão
Av. Comendador Norberto Marcondes, 733 – Centro.
solaregina@gmail.com

RESUMO

Os problemas de otimização tentam resolver de forma eficiente situações do mundo real através de modelos matemáticos que, comumente, estão associados a parâmetros incertos, como produção, demanda, custos e preços, decorrentes de erros de medição, previsão dos dados ou de caráter inerente. Na literatura encontramos diversas abordagens para incorporar e tratar estas incertezas, podendo destacar a Programação Estocástica. Tal metodologia incorpora incertezas em sua modelagem, por meio da inclusão de variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conhecida. Assim, buscamos nesse artigo realizar uma discussão sobre a importância de considerar as incertezas associadas a um problema de programação linear, por meio da abordagem estocástica com recurso em dois estágios.

PALAVRAS CHAVE. Otimização, Otimização Estocástica com recurso em dois estágios, Aplicação.

Tópicos: Programação Matemática, Modelos Probabilísticos, Estatística.

ABSTRACT

Optimization problems attempt to efficiently solve real world situations through mathematical models that are commonly associated with uncertain parameters such as production, demand, costs and prices, due to measurement errors, data prediction or inherent characteristics. In the literature we find several approaches to incorporate and deal with these uncertainties, and may highlight Stochastic Programming. Such methodology incorporates uncertainties in its modeling, through the inclusion of random variables with known probability distribution. Thus, we seek in this article to carry out a discussion about the importance of considering the uncertainties associated to a linear programming problem, through the two - stage stochastic approach.

KEYWORDS. Optimization, Stochastic Optimization with two-stage recourse, Application.

Paper topics: Mathematical Programming, Probabilistic Models, Estatistics.

1. Introdução

Situações reais são frequentemente modeladas como problemas de otimização e estes, por sua vez, estão sujeitos a incertezas nos dados. Essas incertezas, em geral, decorrem de erros de medição ou até mesmo devido à falta de previsão de informações no momento desejado.

Nos últimos anos vários pesquisadores têm se dedicado ao desenvolvimento de abordagens destinadas ao tratamento de problemas de otimização sob incerteza. Tais abordagens podem ser classificadas em duas categorias: estocástica e robusta. A primeira delas assume que a distribuição de probabilidade das incertezas é conhecida e, por ser o foco desse estudo, será apresentada mais detalhadamente nesse artigo. Já para a segunda, informações probabilísticas não são necessárias e assume-se que as incertezas são descritas por meio de conjuntos limitados, geralmente convexos [Bertsimas e Sim, 2004].

O termo estocástico se refere aquilo cujo estado é indeterminado, com origem em eventos aleatórios, em que seu modelo possui variáveis que respondem a uma distribuição específica. Logo, segundo Bortolossi e Pagnoncelli [2006], a área de otimização estocástica estuda modelos e métodos que incorporam incertezas na modelagem através da inclusão de variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conhecida. O objetivo é encontrar soluções que sejam admissíveis para todas as possíveis realizações das variáveis aleatórias que são parte da modelagem, de forma a otimizar algum funcional que depende das variáveis aleatórias. Uma importante restrição dessa metodologia é a suposição de que a distribuição de probabilidade dos dados é conhecida e não depende da decisão tomada.

Neste estudo, nos direcionamos a uma classe importante de problemas de otimização estocástica, os problemas de programação linear sujeito a incertezas com coeficientes aleatórios, em que são propostos os modelos de recursos em dois estágios. Em linhas gerais, conforme Alem e Morabito [2015], estes modelos permitem que se faça uma escolha inicial, dita de primeiro estágio, antes de se conhecer o valor de cada parâmetro incerto. Após o conhecimento dos valores dos mesmos, o agente de decisão faz novas escolhas, ditas de segundo estágio, que visam corrigir possíveis efeitos negativos gerados pela decisão do primeiro estágio. O objetivo de um modelo de programação estocástica de dois estágios é identificar uma solução de primeiro estágio que seja bem equilibrada, diante de todas as possíveis realizações das variáveis aleatórias.

2. Otimização Estocástica

Em várias aplicações, como por exemplo Mulvey et al. [1995], é comum representar as variáveis aleatórias em algum espaço de probabilidade (Ω, F, Π), em que Ω é o conjunto de possíveis estados da natureza (sendo que a realização genérica da variável aleatória é denotada por w) equipado com uma $\sigma -$ álgebra de eventos F e com uma medida de probabilidade Π. O modelo geral linear de dois estágios com recurso pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x + \mathbb{E}[\min q(\omega)^T y(\omega)] \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) \geq h(\omega) \\ & x, y(\omega) \geq 0. \end{array} \tag{1}$$

No modelo (1), c, A e b são parâmetros determinísticos e definem a parte determinística do vetor de custos, da matriz tecnológica e do termo independente, respectivamente. Para cada possível realização $\omega, q(\omega), T(\omega), W(\omega)$ e $h(\omega)$ definem, nessa ordem, os parâmetros estocásticos referentes ao custo, à matriz tecnológica, à matriz de recursos e ao termo independente. Além disso, x é a variável de decisão de primeiro estágio e $y(\omega)$ define a variável de decisão de segundo estágio, como função da realização ω. Colocando todos parâmetros estocásticos juntos, obtém-se o valor aleatório $\xi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (q(\omega), T(\omega), W(\omega), h(\omega))$. O valor esperado de (1) é tomado em relação à distribuição de probabilidade de $\xi(\omega)$, que é supostamente conhecida com expectância finita.

O modelo (1) pode ainda ser escrito como o seguinte modelo determinístico equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (2)$$

sendo que $\mathcal{Q}(x) = \mathbb{E}[\, Q(x, \xi(\omega))]$ e o valor ótimo do problema de segundo estágio é representado da seguinte forma:

$$Q(x, \xi(\omega)) \; = \; \min_{y(\omega)} \{q(\omega)^T y(\omega) | T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega), y(\omega) \geq 0\}. \qquad (3)$$

A representação (2) e (3) ilustra a sequência de eventos no problema de recurso. Primeiramente, são determinadas as decisões de primeiro estágio na presença de incertezas. No segundo estágio, as realizações ω tornam-se conhecidas e as ações corretivas $y(\omega)$ podem ser tomadas para remediar as decisões de primeiro estágio. As decisões de primeiro estágio são escolhidas, entretanto, levando em consideração seus efeitos futuros, os quais são medidos pela função recurso $\mathcal{Q}(x)$.

Após estudos mais detalhados em relação aos processos estocásticos e com auxílio do software QM, analisamos aplicações de problemas clássicos de otimização estocástica disponíveis na literatura, como iremos expor a seguir.

3. Problema do Lojista

Um lojista tem disponível determinado modelo de camiseta. Mensalmente, ele compra uma quantia x de camiseta pelo preço c por unidade. Como possui um determinado capital para a compra de camiseta, logo obterá uma quantia limitada em um intervalo de 0 a u. As camisetas são vendidas a um preço unitário q.

O lojista possui uma incerteza em sua demanda e enfrenta um dilema: se ele comprar um número x de camiseta e a demanda for maior, ele perderá a oportunidade de vender mais camisetas. Porém, se ele comprar certa quantidade de camiseta e a demanda for menor que esta quantidade, o lojista terá um prejuízo em suas vendas, já que deve cobrir o preço de custo.

Assim, vamos supor que a demanda ω é uma variável aleatória não-negativa com função densidade f e função de distribuição F, que y é o número de camisetas efetivamente vendidas. Sendo assim, a formulação do problema é

$$\min_{0 \leq x \leq u} \{cx + \mathcal{Q}(x)\} \qquad (4)$$

onde

$$\mathcal{Q}(x) = \mathbb{E}_\omega[Q(x, \omega)] \qquad (5)$$

e

$$\begin{array}{lll} Q(x, \omega) = & \mathit{minimizar} & -q\, y(\omega) + c\, b(\omega) \\ & \mathit{sujeito\ a} & y(\omega) + b(\omega) \leq x \\ & & y(\omega), b(\omega) \geq 0 \end{array} \qquad (6)$$

em que $\mathbb{E}_\omega$ representa a esperança com respeito a demanda ω. Para a quantidade x de camisetas compradas, a função $-Q(x, \omega)$ denota o lucro obtido com a venda das camisetas com um valor ω fixo.

Esse problema se baseia em dois estágios. No primeiro estágio o lojista precisa decidir quantas camisetas irá comprar através da variável x. Após esta decisão, ele irá vender as camisetas para uma demanda ω. As variáveis de segundo estágio são a quantidade de camisetas que ele vendeu $(y(\omega))$ e a não vendidas que permanecem no estoque $(b(\omega))$. Sendo assim, o problema do lojista busca determinar a quantidade exata de camisetas que irá comprar de forma a maximizar o lucro esperado sob incerteza de demanda.

4. Resolução do Problema

Para resolver esse problema, precisamos primeiramente encontrar a solução de segundo estágio, a qual é felizmente imediata: se a demanda ω for menor do que o número de camisetas compradas, então $y^*(\omega) = \omega$. Se for maior, então $y^*(\omega) = x$. Para encontrar o valor de $b^*(\omega)$, basta notar que só haverá camisetas no estoque se a demanda for menor do que o número de camisetas compradas. Logo,

$$\begin{aligned} y^*(\omega) = &\quad \min\{\omega, x\} \\ b^*(\omega) = &\quad \max\{x - \omega, 0\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Deste modo, podemos reescrever a formulação (5) da seguinte forma

$$Q(x) = \mathbb{E}_\omega[-q \min\{\omega, x\} + c \max\{x - \omega, 0\}]. \tag{8}$$

Logo, se desejamos encontrar uma solução ótima para este problema de otimização, podemos utilizar o método da derivada primeira da função $Q(x)$ e analisarmos o seu sinal, buscando uma solução em seus extremos, ou em seus pontos críticos. Para isto, lembramos que a função analisada está limitada no intervalo de $[0, u]$. A fim de definir melhor a função $Q(x)$, precisamos definir um dos conceitos utilizados para se calcular a esperança de uma variável aleatória continua.

Definição 1: Seja g uma função contínua e X uma variável aleatória contínua com função densidade f. Então, $\mathbb{E}[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$, caso a integral exista.

Assim, considerando a equação (5) e a Definição 1, podemos dizer que

$$\mathbb{E}[g(t)] = \quad \int_{-\infty}^{x} g(t)f(t)dt + \int_{x}^{+\infty} g(t)f(t)dt. \tag{9}$$

Sabendo que a variável ω é incerta e que x é fixo, caso $\omega < x$, pela equação (8) temos que $Q(x) = \mathbb{E}_\omega[-q\omega + c(x - \omega)]$. Porém, caso $\omega > x$, temos que $Q(x) = \mathbb{E}_\omega[-qx]$. Sendo assim, substituindo estes valores na equação (9), segue que

$$Q(x) = \mathbb{E}_\omega[Q(\omega, x)] = \int_{-\infty}^{x}(-qt + c(x - t))f(t)dt + \int_{x}^{+\infty}(-qx)f(t)dt. \tag{10}$$

Resolvendo a equação (10),

$$\begin{aligned} Q(x) = &\quad \int_{-\infty}^{x} -qtf(t) + c(x - t)f(t)dt + \int_{x}^{+\infty} (-qx)f(t)dt \\ = &\quad -qx + (q + c)\int_{-\infty}^{x} F(t)dt. \end{aligned} \tag{11}$$

A função Q é definida pela soma da função distribuição acumulada da variável aleatória t com a função polinomial $-qx$. Portanto, os candidatos a solução do problema (4) estarão nos extremos do intervalo $[0, u]$ ou nos pontos críticos encontrados ao calcular $Q'(x) = 0$.

Assim, temos que $Q'(x) = -q + (q + c)F(x)$, sendo as soluções possíveis dadas por

Extremos do Intervalo $[\mathbf{0}, \boldsymbol{u}]$	$c + Q'(0) > 0$	$c + [-q + (q - r)F(0)] > 0$	$F(0) > \dfrac{q-c}{q-r}$	$x^* = 0$
	$c + Q'(u) < 0$	$c + [-q + (q - r)F(u)] < 0$	$F(u) < \dfrac{q-c}{q-r}$	$x^* = u$
Ponto Crítico	$Q'(x) = 0$	$c + [-q + (q - r)F(x)] = 0$	$F(x) = \dfrac{q-c}{q-r}$	$x^* = F^{-1}\left(\dfrac{q-c}{q-r}\right)$

Resumidamente,

$$\begin{cases} x^* = 0, & \text{se } F(0) > \frac{q-c}{q+c} \\ x^* = u, & \text{se } F(u) < \frac{q-c}{q+c} \\ x^* = F^{-1}(x)\left(\dfrac{q-c}{q+c}\right), & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{12}$$

Vimos, por hipótese, que a função Q é convexa.

Definição 2: Seja I um intervalo não vazio de $\mathbb{R}$. A função $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ é dita convexa em I quando

$$f(\alpha x_0 + (1-\alpha)x_1) \leq \alpha f(x_0) + (1-\alpha) f(x_1), \tag{13}$$

para todos os pares de pontos (x_0, x_1) em I e todo $\alpha \in (0,1)$.

Resultado: Com base na Definição 2, vamos provar que a função Q é convexa.

Prova: Primeiramente, tomemos um $\alpha \in (0,1)$, com $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ e $x := \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$. Consideremos,

$$\Phi := f(x) - \alpha f(x_1) - (1-\alpha) f(x_2),$$

que deve ser não-positiva ($\Phi \leq 0$), para que tenhamos

$$f(x) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2),$$

ou seja, queremos que f seja convexa. Temos

$$\Phi = f(x) - \alpha f(x_1) - (1-\alpha) f(x_2).$$

Substituímos $f(x)$ por $-qx + (q+c)\int_{-\infty}^{x} F(t)dt$:

$$\begin{aligned}\Phi &= -qx + (q+c)\int_{-\infty}^{x} F(t)dt + \alpha q x_1 - \alpha(q+c)\int_{-\infty}^{x_1} F(t)dt + (1-\alpha) q x_2 + \\ &\quad -(1-\alpha)(q+c)\int_{-\infty}^{x_2} F(t)dt \\ &= q(\alpha x_1 - x) + (1-\alpha) q x_2 - (q+c)\int_{x}^{x_2} F(t)dt + \alpha(q+c)\int_{x_1}^{x_2} F(t)dt.\end{aligned}$$

Considere a função F não decrescente, então temos que

$$x \leq y \Rightarrow \{X \leq x\} \subset \{X \leq y\} \Rightarrow F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq y) = F(y).$$

Além disso, temos que $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$. Como F é crescente em $[a, b]$, se $u \in (x_1, x)$, então $F(u) \leq F(x)$. Logo, vale

$$\Phi = q(\alpha x_1 - x) + (1-\alpha)qx_2 - (q+c)\int_x^{x_2} F(t)dt + \alpha(q+c)\int_{x_1}^{x_2} F(t)dt$$
$$\leq q(\alpha x_1 - x) + (1-\alpha)qx_2 - (q+c)\int_x^{x_2} F(x)dt + \alpha(q+c)\int_{x_1}^{x_2} F(x)dt$$
$$\Phi \leq q(\alpha x_1 - x) + (1-a)qx_2 - (q+c)F(x)(x_2 - x) + \alpha(q+c)F(x)(x_2 - x_1).$$

Substituindo $x := \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$.

$$\Phi \leq q(\alpha x_1 - ax_1 - (1-a)x_2) + (1-a)qx_2 +$$
$$-(q+c)F(x)(x_2 - ax_1 - (1-\alpha)x_2)\ + \alpha(q+c)F(x)(x_2 - x_1)$$
$$\leq -a(x_2 - x_1)(q+c)F(x)) + \alpha(q+c)F(x)(x_2 - x_1)$$
$$\Phi \leq 0.$$

Logo,

$$f(x) - \alpha f(x_1) - (1-\alpha)f(x_2) \leq 0.$$

5. Um exemplo numérico

Suponha que o custo por camiseta para o lojista seja $c = R\$26{,}90$, que o preço de venda seja $q = R\$49{,}90$ e que o poder de compra seja $u = 500$ camisetas. Além disso, considere que a demanda ω é dada por uma variável aleatória uniforme contínua definida no intervalo $[0{,}500]$. Por definição, uma variável aleatória uniforme possui função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|a,b) = \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b \tag{14}$$

com esperança $\mathbb{E}[X] = (a+b)/2$ e variância $\sigma^2(X) = (b-a)^2/12$. Logo, integrando-se a densidade de ω, obtemos a função de distribuição da demanda:

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega}{500}, & \text{se } 0 \leq x \leq 500 \\ 1, & \text{se } x > 500 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{15}$$

A inversa dessa função é $F^{-1}(y) = 500y$ no intervalo $[0, 500]$. Usando (1.6), temos que a solução do problema é $x^* = F^{-1}\left(\frac{115}{384}\right) = 149{,}74$. Contudo, como é um problema real e não podemos produzir 149,74 camisetas, assumiremos $x^* = 149$. Assim, utilizando a formulação (1.1) e a equação (1.9) podemos dizer que o lucro esperado para este valor é

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\omega[cx + Q(x,\omega)] &= cx - qx + (q+c)\int_0^x \frac{\omega}{500} d\omega \\ \mathbb{E}_\omega[26{,}9 \cdot 149 + Q(149,\omega)] &= 4008{,}1 - 7435{,}1 + 76{,}8\int_0^{149} \frac{\omega}{500} d\omega \\ &= -3427 + \tfrac{96}{625}\left(\tfrac{22201}{2}\right) = R\$\text{-}1721{,}96. \end{aligned} \tag{16}$$

Portanto, o lojista teria que comprar 149 camisetas mensalmente para obter um lucro esperado de $R\$$ 1721,96. Vamos atribuir ao valor encontrado na equação (3.3) o nome de Valor do Problema Estocástico, ou RP (*Recourse Problem* - RP). Na próxima seção, iremos mensurar o ganho por considerarmos o problema estocástico bem como a quantidade deixada de lucrar por não conhecer com exatidão o futuro.

6. EVPI e VSS

Existem alguns conceitos na Otimização Estocástica que servem de apoio para a compreensão e estudo dos resultados obtidos na seção anterior. Um deles é o Valor Esperado de Informação Perfeita (*Expected Value of Perfect information* - EVPI), o qual é obtido pela diferença entre o Valor do Problema Estocástico (*Recourse Problem* - RP) e o valor esperado das soluções (*Wait and See* - WS). Assim

$$EVPI = RP - WS.$$

Outra forma de tentar explicar estes termos seria de que o EVPI, segundo Birge e Louveaux [1997], mede o quanto o agente de decisão estaria disposto a pagar para se obter informação perfeita e precisa sobre o futuro. Neste problema, seria o quanto o Lojista estaria disposto a pagar para se obter com precisão o valor da demanda ω. Para Kall e Wallace [1994], o EVPI também representa quanto se esperaria ganhar se fosse possível determinar de antemão o valor das variáveis aleatórias. Ainda na ideia destes autores, o EVPI é importante, porque mostra se é importante considerar a aleatoriedade do problema, pois não necessariamente um valor alto para o EVPI possa indicar a necessidade de se resolver o problema estocástico. Porém, quando o EVPI é baixo, temos uma indicação de que não é tão importante considerar a aleatoriedade do problema e, portanto, aproximações podem funcionar bem.

O RP representa o valor do problema estocástico, o qual foi encontrado na seção anterior. Já o WS representa o valor ótimo do problema para cada cenário, o qual neste caso está definido no intervalo de $[0,500]$.

Como o valor de RP já foi calculado, basta encontrar o valor de WS. Para isto, precisamos lembrar que o valor de ω está definido no intervalo $[0,500]$. Assim, como o EVPI supõe que o valor do coeficiente aleatório é conhecido, para um determinado valor ω, a solução é obviamente $x^* = \omega$. Logo,

$$WS = \mathbb{E}_\omega[c\omega - q\omega] = \mathbb{E}_\omega[-23\omega] = -23\mathbb{E}_\omega[\omega] = -23 \cdot \frac{0+500}{2} = -5750.$$

O valor da esperança de ω foi calculado lembrando que $E[X] = (a+b)/2$. Por fim, o valor do EVPI será dado por

$$EVPI = R\$\,5750{,}00 - R\$\,1721{,}96 = R\$4028{,}04.$$

Outro valor importante em se considerar na Otimização Estocástica é o Valor da Solução Estocástica (*Value of Stochastic Solution* - VSS), o qual é obtido pela diferença entre a Solução do Valor Esperado (*Expectation of the Expected Solution* - EEV) e o RP. Assim,

$$VSS = EEV - RP.$$

Para se encontrar o valor de EEV, inicialmente calcula-se a solução ótima do problema para $\omega = 250$, ou seja, com demanda constante igual a média de ω. Em seguida, o valor de x^* encontrado é substituído na equação (3.3) para se obter um novo lucro ótimo. Novamente, como o valor de RP já foi obtido, vamos calcular o valor de EEV. Para isto, vamos inicialmente encontrar o valor ótimo para $\omega = 250$, a qual é obtido facilmente, uma vez que conhecendo-se o valor de ω basta comprar $x^* = 250$ camisetas para maximizar o lucro. O próximo passo é usar o valor de x^* na equação (3.3). A solução após os cálculos será $-R\$\,950{,}00$. Deste modo

$$VSS = R\$\,1721{,}96 - R\$\,950{,}00 = R\$\,771{,}96.$$

Assim, concluímos ser essencial o modelo estocástico nesse problema, pois quando os valores do EVPI são elevados, como nesse caso EVPI = $R\$4028{,}04$, indicam a necessidade de resolver tal modelo, confirmando essa necessidade pelo resultado do VSS, já que nos fornece o quanto estamos ganhando em considerar o modelo estocástico, ao invés de simplesmente supor que o lucro de vendas é dado por sua média.

7. Considerações Finais

O método de otimização estocástica, por meio do exemplo abordado, mostrou-se uma alternativa adequada e flexível na configuração do plano de produção, pois permitem modelar as variáveis aleatórias de forma bastante natural com a utilização de cenários que podem ser gerados com diferentes estruturas e distribuições de probabilidade. Também, a possibilidade de utilizar as variáveis de decisão de segundo estágio se apresentou uma estratégia interessante, visto que tais variáveis podem ser utilizadas para se remediar dos parâmetros estocásticos, ajustando e corrigindo decisões do primeiro estágio tomadas antes da realização das variáveis aleatórias.

Em linhas gerais, a otimização estocástica em dois estágios permite que se faça uma escolha inicial, dita de primeiro estágio, antes de se conhecer o valor de cada parâmetro incerto. Após o conhecimento dos valores dos mesmos, o agente de decisão faz novas escolhas, ditas de segundo estágio, que visam corrigir possíveis efeitos negativos gerados pela decisão do primeiro estágio. Além disso, essa abordagem é considerada uma metodologia muito rica, por empregar conceitos e resultados de diversas áreas como, programação linear, probabilidade e estatística.

Além disso, ao considerarmos o método estocástico em relação ao determinístico, o valor ótimo do determinístico corresponde a um único custo mínimo, o valor ótimo do estocástico refere-se a uma composição de custos mínimos, um para cada cenário, ponderados pelas probabilidades desses cenários, comumente denominado como custo mínimo esperado. Ainda, o modelo determinístico gera um único plano de produção, ao passo que o modelo estocástico de dois estágios gera plano de produção dependentes dos cenários.

8. Agradecimentos

Agradecemos a Fundação Araucária e a PRPPG/UNESPAR pelo incentivo ao desenvolvimento deste trabalho e o apoio financeiro concedido.

Referências

Alem, D.; Morabito, R. (2015) Planejamento da produção sob incerteza: programação estocástica versus otimização robusta. *Gestão da Produção,* 22(3): 539-551.

Bertsimas, D.; Sim, M. (2004) The price of robustness. *Operations Research*, 52(1): 35-53.

BIRGE, John R.; LOUVEAUX, Francois. Introduction to stochastic programming. Springer Science & Business Media, 2011.

Bortolossi, H. J.; Pagnoncelli, B. K. (2006) Uma introdução à otimização sob incerteza. In*: III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática.* Universidade Federal de Goiás.

Kali, Peter; WALLACE, Stein W. (1994) *Stochastic programming.* New York: Springer.

Mulvey, J. M.; Vanderbei, R. J.; Zenios, S. A. (1995) *Operations Research. Robust optimization of large-scale systems*. 43, 264–281.