



Aplicação de Medidas de Centralidade ao Método Louvain para Detecção de Comunidades em Redes Sociais

Victoria Aires

Instituto de Computação – Universidade Federal do Amazonas (UFAM)
Av. Gen Rodrigo Octávio, 6200, Coroado, 69077-000
Manaus - AM, Brasil
vpsa@icomp.ufam.edu.br

Fabiola Nakamura

Instituto de Computação – Universidade Federal do Amazonas (UFAM)
Av. Gen Rodrigo Octávio, 6200, Coroado, 69077-000
Manaus - AM, Brasil
fabiola@icomp.ufam.edu.br

RESUMO

Neste projeto de iniciação científica, estudamos o método Louvain para o problema de detecção de comunidades, aplicado a redes sociais. O objetivo é aliar conceitos de medidas de centralidade em redes complexas ao método, modificando o critério guloso do mesmo. Utilizamos as medidas para alterar a ordem de avaliação dos vértices e verificar se esta mudança aumenta a qualidade das comunidades encontradas. Mostramos que a modificação trouxe comunidades de maior modularidade em redes com alto coeficiente de agrupamento global, porém, não foi promissora em redes sem esta característica. Além disso, mostramos que a construção de comunidades a partir dos vértices menos centrais melhorou a qualidade das comunidades obtidas pelo algoritmo.

PALAVRAS CHAVE. Detecção de Comunidades, Redes Sociais, Redes Complexas.

Tópicos (TAG – Teoria e Algoritmos em Grafos)

ABSTRACT

In this scientific initiation, we studied the Louvain method for the problem of community detection applied to social networks. The aim is to ally the concepts of centrality measures in complex networks to the method, modifying the greedy criterion of the method. We used the measures to change the order of evaluation of the vertices and we verified if this change increases the quality of the communities found. We showed that the modification brought best modularity values in networks with high global clustering coefficient, however, it wasn't promising in networks without this property. In addition, we showed that the construction of communities from the less central vertices improved the quality of communities obtained by the method.

KEYWORDS. Community Detection. Social Networks. Complex Networks.

Paper topics (TAG – Theory and Algorithms in Graphs)



1. Introdução

A *rede social* de um indivíduo é resultado das interações e relacionamentos do mesmo com outros membros da sociedade [Bedi e Sharma, 2016]. Alguns exemplos de redes sociais são aquelas geradas por amizades, interações em uma plataforma virtual como Facebook e Twitter, redes de citação e colaboração de cientistas e interação de personagens em um filme ou obra literária. Redes sociais são *redes complexas*. Tais redes são utilizadas para modelar aplicações do mundo real. Elas possuem algumas propriedades, como distribuição do grau dos vértices seguindo a lei de potência, alto coeficiente de agrupamento e estrutura de comunidades bem definida. Comunidades são grupos mais conectados entre si que ao restante do grafo. O processo de descobrir tais grupos é conhecido como *detecção de comunidades*.

A qualidade das comunidades obtidas pelos algoritmos disponíveis na literatura pode ser comparada através da *modularidade*, uma métrica que indica o quanto os elementos de uma comunidade estão conectados. Uma vez que obter a máxima modularidade em uma rede é um problema NP-Difícil [Brandes et al., 2007], são necessários algoritmos heurísticos, como o método Louvain [Blondel et al., 2008]. Este algoritmo possui complexidade linear no número de arestas, e é capaz de identificar comunidades com alta modularidade através de um algoritmo iterativo de duas fases. Observamos que o critério guloso do algoritmo é muito simples: ao construir comunidades, o algoritmo analisa os vértices em sequência (de 0 a $n - 1$).

Neste projeto, o objetivo é estudar o impacto que uma solução gulosa aliada a métricas de redes complexas tem na qualidade das comunidades encontradas pelo método Louvain. Para isso, modificamos o critério para construção de comunidades: os vértices são avaliados segundo as *medidas de centralidade* dos mesmos. Estas indicam quais os vértices mais influentes ou centrais da rede segundo algum critério. Mostramos que o uso destas medidas traz comunidades de maior qualidade em redes com alto coeficiente de agrupamento global, porém, redes com baixo coeficiente de agrupamento não se beneficiam desta técnica. Além disso, notamos que são obtidos melhores valores de modularidade quando as comunidades são construídas a partir dos vértices menos centrais.

O restante do artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 contém os fundamentos teóricos utilizados para o desenvolvimento do trabalho. A Seção 3 apresenta alguns algoritmos para o problema de detecção de comunidades em redes sociais. A Seção 4 descreve como foi feita a alteração no método Louvain, proposta neste trabalho. A Seção 5 traz os resultados obtidos e, por fim, a Seção 6 contém as considerações finais do artigo, seguida das referências.

2. Fundamentação teórica

Nesta seção, são descritos os conceitos fundamentais, envolvendo redes complexas, medidas de centralidade, coeficientes de agrupamento e redes sociais, utilizados neste trabalho.

2.1. Redes complexas

Na natureza e sociedade existe uma variedade de sistemas complexos que podem ser modelados através de redes. Estes fenômenos incluem redes sociais online, redes de telecomunicações, relações sociais, a *World Wide Web* e a Internet, entre outros exemplos.

Redes complexas possuem propriedade de *small-world* (mundo pequeno), onde os vértices são separados por distâncias pequenas e possuem a característica de serem altamente conectados [Hofstad, 2016]. Isto significa que há tendência a apresentar um alto coeficiente de agrupamento, levando à formação de uma estrutura de *clusters* ou comunidades [Shen, 2013]. Em uma rede complexa, os vértices possuem diferentes importâncias ou influência, ou seja, alguns vértices possuem papel mais central que os demais. Para mensurar o quanto um vértice é central na rede, são utilizadas *medidas (ou métricas) de centralidade* [Opsahl et al., 2010]. Neste trabalho, focamos nas seguintes métricas:

- Centralidade de grau ponderado (*weighted degree centrality*): a métrica mais simples, trata-se basicamente do grau de cada vértice, levando em consideração os pesos em grafos ponderados. Segundo esta medida, a centralidade de um vértice é dada pelo seu número de conexões [Perra e Fortunato, 2008].



- Centralidade de intermediação (*betweenness centrality*): esta métrica indica, dado um vértice, quantos caminhos mínimos entre dois vértices quaisquer passam por ele. Um vértice que possui alta intermediação funciona como ponte na rede, pois conecta vários elementos, adquirindo maior importância [Dehmer e Emmert-Streib, 2009].
- Centralidade de proximidade (*closeness centrality*): esta métrica é obtida ao computar o inverso do comprimento médio dos caminhos mínimos entre um dado vértice e todos os demais na rede. Quanto maior a proximidade, mais central é o vértice, por estar mais próximo em média do restante da rede [Motta et al., 2009].

Uma propriedade de grafos, que é importante quando se analisa redes complexas, é o *coeficiente de agrupamento*. Esta medida indica o quanto os vértices estão conectados entre si, em dois contextos distintos: *local*, onde é medido o quanto cada vértice está agrupado aos seus vizinhos e *global*, onde é verificado o quanto os vértices estão conectados a todos os demais vértices do grafo. Em redes livres de escala, o coeficiente de agrupamento global (κ) é geralmente menor que o coeficiente de agrupamento local médio (κ_{avg}), que é a média dos coeficientes de agrupamento locais de todos os vértices do grafo [Prokhorenkova e Samosvat, 2014].

2.2. Redes sociais

As *redes sociais* nasceram na Sociologia [Scott e Carrington, 2011], porém, tornaram-se um conceito presente no cotidiano devido ao advento da Internet e aos avanços em computação. Uma rede social pode ser modelada como uma rede complexa, ou seja, possui as propriedades características de redes complexas, como *power-law degree*, propriedade de *small-world* e estrutura de comunidades.

Assim como outras redes complexas, uma rede social é formada por entidades e relacionamentos. Neste contexto, as entidades podem ser pessoas, instituições, *web sites* e os relacionamentos podem indicar amizade, trabalho, colaboração e outros tipos de interação social. Além disso, estes relacionamentos podem ser recíprocos ou não [Öztürk, 2014]. Alguns exemplos de redes sociais da vida real incluem redes com base em amizade, telefone, e-mail e redes de colaboração e citação de cientistas. Representar tais redes como grafos permite a extração de informações relevantes sobre a relação que ela modela, através do estudo e análise das propriedades das mesmas, possuindo um grande potencial para aplicações úteis, como sistemas de recomendação.

3. Método Louvain para detecção de comunidades

Uma *comunidade* pode ser definida como um grupo de entidades mais próximas entre si em comparação com as outras na rede [Bedi e Sharma, 2016]. Em outras palavras, uma comunidade é formada por indivíduos que interagem mais frequentemente uns com os outros do que com aqueles que estão fora do grupo. Nesta seção, será apresentado o método Louvain para detecção de comunidades, um algoritmo guloso baseado no conceito de modularidade.

3.1. Introdução à modularidade

Em geral, quando um método de detecção de comunidades é aplicado em uma base de dados do mundo real, as comunidades ainda não são conhecidas. Logo, uma questão importante é de que forma a qualidade das comunidades encontradas pode ser avaliada. A *modularidade* é uma medida amplamente aceita para a qualidade de comunidades, proposta por Girvan e Newman [Girvan e Newman, 2002]. O cálculo da modularidade é mostrado na equação:

$$Q = \sum_i (e_{ii} - a_i^2) \quad (1)$$

Na equação 1, i representa uma comunidade, e_{ii} é a fração de arestas que estão inteiramente na comunidade i e a_i é a fração de arestas que possuem pelo menos um extremo na comunidade i . A modularidade assume um valor entre -1 e 1 . Quanto mais próximo de 1 , melhores são as estruturas de comunidades encontradas. O problema de determinar a máxima modularidade é NP-Difícil [Brandes et al., 2007], ou seja, este problema pertence a uma classe de problemas (que podem ser de decisão ou otimização) para os quais não se conhece solução em tempo polinomial.



3.2. Método Louvain

O método Louvain é um algoritmo heurístico que busca maximizar a modularidade Q [Blondel et al., 2008]. Também é um método de agrupamento de natureza aglomerativa. Assumindo que a entrada é uma rede ponderada com n vértices, o funcionamento do método é dividido em duas fases.

Na primeira fase, cada vértice é considerado uma comunidade. Após, para cada vértice i , considera-se cada um de seus j vizinhos e avalia-se o ganho de modularidade que ocorreria se o vértice i fosse removido de sua comunidade e colocado na comunidade de j . Ao final da avaliação em todos os vizinhos, o vértice i é colocado na comunidade onde o ganho é máximo, mas apenas se o ganho é positivo. Se não for, permanece em sua comunidade. Este processo se repete até que nenhum indivíduo possa melhorar a modularidade.

A segunda fase consiste em construir uma nova rede onde os vértices são as comunidades encontradas na primeira fase. Para isto, os pesos das conexões entre os novos vértices são dados pela soma dos pesos das arestas entre vértices nas duas comunidades correspondentes. Conexões entre vértices na mesma comunidade tornam-se laços nesta comunidade na nova rede. A Figura 1 apresenta um exemplo destes passos em uma rede de entrada.

Uma vez que a segunda fase esteja concluída, a primeira fase é reaplicada na nova rede. Cada execução de primeira e segunda fases é chamada de passo. Os passos prosseguem até que não ocorram mais mudanças e a máxima modularidade seja obtida. O Algoritmo 1 sumariza as etapas deste algoritmo.

Algoritmo 1: Método Louvain

```
Entrada: Um grafo ponderado  $G = (V, E)$   
Saída: Árvore hierárquica do grafo  $G$  indicando as comunidades detectadas.  
início  
  enquanto houver mudança na modularidade faça  
    enquanto mudar vértices de comunidade melhora a modularidade faça  
      cria uma comunidade para cada vértice  $v \in V(G)$ ;  
      para cada  $v_i \in V(G)$  faça  
        para cada  $v_j$  vizinho de  $v_i$  faça  
          avalia o ganho de modularidade que seria obtido ao mover o vértice  $v_i$  para a  
          comunidade de  $v_j$ ;  
        fim para cada  
        se o ganho máximo é positivo então  
           $v_i$  é movido para a comunidade do vizinho onde o ganho foi máximo;  
        fim se  
      senão  
         $v_i$  permanece em sua comunidade;  
      fim se  
    fim para cada  
  fim enquanto  
  cria  $G_1$ , onde cada comunidade é um vértice;  
  para cada  $v_i, v_j \in V(G_1)$  faça  
     $e_{ij}$  recebe como peso a soma dos pesos dos links entre as duas comunidades originais;  
  fim para cada  
   $G \leftarrow G_1$   
fim
```

Este método é essencialmente linear em sua primeira fase [Lancichinetti e Fortunato, 2009], conseguindo um bom desempenho em grafos de tamanhos variados. Além disso, o método obtém melhores valores de modularidade em comparação aos obtidos por outros algoritmos baseados em modularidade, como Girvan-Newman [Girvan e Newman, 2002] e Clauset, Newman e Moore [Clauset et al., 2004].

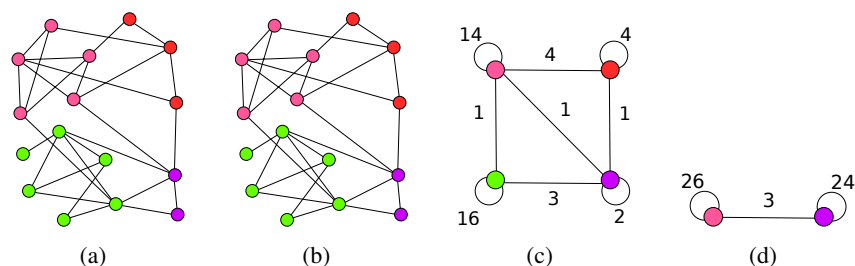


Figura 1: Exemplo de execução do método Louvain. Em 1(a), rede original. Em 1(b), após passar pela primeira fase, com as comunidades identificadas. Em 1(c), a nova rede construída na segunda etapa. Por fim, em 1(d) a rede obtida após a repetição da primeira e segunda fase na rede obtida em 1(c).

4. Proposta de alteração no método Louvain

O método Louvain possui vantagens interessantes sobre outros algoritmos, como seu tempo de execução de menor complexidade e comunidades com maiores valores de modularidade. Porém, observamos que as comunidades são construídas de acordo com um critério muito simples: os vértices são analisados sequencialmente, ou seja, seguindo a ordem definida pelos rótulos dos vértices, de 0 a $n - 1$.

Sendo o Louvain um método adequado para encontrar comunidades em redes complexas devido à sua escalabilidade em grafos de grande dimensão, desenvolvemos uma modificação, buscando aliar o mecanismo guloso aos conceitos de medidas de centralidade. Esta modificação ocorre apenas na primeira fase do método, e altera a ordem dos vértices a serem analisados durante a construção de comunidades. O objetivo é verificar o impacto que a escolha do critério para o método guloso possui na modularidade final obtida.

As métricas de centralidade escolhidas foram *weighted degree* (grau ponderado), *betweenness* (intermediação) e *closeness* (proximidade), uma vez que quantificam, de maneira complementar, a conectividade de cada vértice ao resto da rede. O *weighted degree* é uma métrica local dos vértices uma vez que leva em consideração apenas seus vizinhos, retratando as interações entre estes vértices. O *betweenness* e o *closeness* avaliam cada vértice a partir de uma visão global da rede. Em função destas características achamos interessante explorar como estas métricas poderiam ser integradas ao processo de formação de comunidades.

Antes de iniciar a análise da primeira fase, as medidas de centralidade de todos os vértices da rede são calculadas e ordenadas. Na primeira execução os vértices foram ordenados em ordem crescente (do menor valor da medida para o maior), e na segunda, em ordem decrescente (do maior valor da medida para o menor). Ao usar a ordem crescente, a avaliação inicia a partir dos vértices mais periféricos, uma vez que em algumas soluções tais vértices tendem a ficar isolados, afetando o valor da modularidade. Por outro lado, na ordenação decrescente queríamos explorar a alta conectividade dos vértices, verificando o que ocorre ao criar comunidades a partir dos membros mais influentes da rede.

5. Resultados obtidos

Para observar os resultados, realizamos experimentos modificando uma implementação em Python do método Louvain [Odent e Saint-Guillain, 2012], utilizando Python 3.5.2. As bases de dados utilizadas durante os testes foram extraídas de redes sociais e podem ser acessadas no site Network Repository [Rossi e Ahmed, 2015]. A seguir, listamos as bases de dados utilizadas nos experimentos.

- Facebook-ego e Twitter-ego [Leskovec e Mcauley, 2012]: rede social de amigos no Facebook, coletada a partir da rede pessoal de alguns participantes anônimos; e círculos do Twitter, coletados de fontes públicas.



- Brightkite e Loc-Brightkite [Cho et al., 2011]: redes extraídas da rede social online Brightkite, baseada em localização, permitindo a interação de usuários por meio de check-ins.
- Soc-Anybeat [Fire et al., 2012]: base de dados coletada da rede social Anybeat, que possui a proposta de conectar o usuário a pessoas que ele não conhece, mas vivem próximas à casa do mesmo.
- Gplus [Rossi e Ahmed, 2015]: rede coletada a partir dos círculos da rede social Google Plus.

A Tabela 1 sumariza as características destas bases de dados. Nesta tabela, $|V|$ indica a quantidade de vértices, $|E|$, a quantidade de arestas, κ_{avg} denota o coeficiente de agrupamento local médio da rede, κ mostra o coeficiente de agrupamento global. A última coluna contém a densidade de cada base de dados.

Tabela 1: Atributos das redes sociais utilizadas durante os experimentos.

Base de dados	$ V $	$ E $	κ_{avg}	κ	Densidade
Facebook-ego	4K	88K	0,61	0,52	0,01
Twitter-ego	81K	2M	0,57	0,37	0,000267
Loc-Brightkite	58K	2M	0,17	0,11	0,0001
Brightkite	57K	213K	0,17	0,11	0,000132294
Soc-Anybeat	13K	67K	0,23	0,02	0,000838774
Gplus	24K	392K	0,22	0	0,0001

Os experimentos ocorreram da seguinte forma: cada medida de centralidade (*weighted degree*, *betweenness* e *closeness*) foi utilizada no algoritmo por vez, de maneira individual. Para cada medida de centralidade fizemos duas execuções, uma com a ordenação crescente dos valores e outra com a ordenação decrescente. A Tabela 2 apresenta os valores de modularidade obtidos em cada teste.

Tabela 2: Modularidade obtida originalmente e após as modificações no método Louvain em cada base de dados, destacada por cores. Os valores em vermelho foram piores que o original; em verde, melhores. Em negrito, os melhores valores de modularidade obtidos pelas métricas.

	Facebook-ego	Twitter-ego	Brightkite	Loc-Brightkite	Soc-Anybeat	Gplus
Original	0,834819	0,818775	0,677205	0,672425	0,467740	0,737804
Weighted degree crescente	0,835442	0,818555	0,688056	0,689556	0,464287	0,733603
Weighted degree decrescente	0,833764	0,804863	0,670847	0,673442	0,459209	0,737038
Betweenness crescente	0,834938	0,820271	0,687444	0,689383	0,460658	0,733830
Betweenness decrescente	0,834553	0,802587	0,686708	0,688618	0,451577	0,736515
Closeness crescente	0,835469	0,819311	0,680594	0,682667	0,462158	0,733946
Closeness decrescente	0,833937	0,818697	0,680541	0,682640	0,463957	0,733385

Ao analisar os resultados dos experimentos, percebemos que nas redes com maior coeficiente de agrupamento global o uso das métricas trouxe ganhos positivos em modularidade. No caso das redes Brightkite e Loc-Brightkite, o desempenho pode ter sido melhor na segunda rede (todas as métricas trouxeram ganho positivo) devido à sua densidade: por ser mais esparsa que a primeira, as medidas de centralidade tendem a ser mais diferenciadas que em uma rede mais conectada.



Observamos também que em redes com baixo coeficiente de agrupamento global, o uso das métricas piorou o desempenho do algoritmo. Por exemplo, na base de dados GPlus, que possui coeficiente de agrupamento global igual a zero, ordenar os vértices de acordo com as métricas trouxe valores menores de modularidade, tanto na ordenação crescente quanto decrescente.

Estes resultados indicam que o uso das medidas de centralidade no critério de avaliação do método Louvain traz benefícios quando a rede complexa possui um alto coeficiente de agrupamento. Por outro lado, se a rede não possuir esta característica, o algoritmo original funciona melhor.

Outro indício dos resultados mostra que, quando os vértices são ordenados em ordem crescente de acordo com as medidas, obtêm-se melhores valores de modularidade e, portanto, comunidades com maior qualidade. Isto pode ser explicado pelo fato de que, ao ordenar os vértices, aqueles com menores valores segundo a métrica são analisados primeiro. Estes vértices são mais periféricos, pouco conectados ao restante da rede. Ao analisá-los primeiro, eles podem ser agrupados a vértices mais centrais, evitando comunidades muito pequenas e vértices isolados. Isto reflete em melhoria nos valores de modularidade.

6. Considerações finais

Neste artigo, o foco foi o estudo de algoritmos para o problema de detecção de comunidades em redes sociais, mais especificamente, no método Louvain, um método que utiliza heurística gulosa e é mais eficiente em tempo de execução e em qualidade das comunidades encontradas (avaliadas através da modularidade), em comparação a outros algoritmos da literatura.

O objetivo, desta forma, foi aliar os conceitos de medidas de centralidade em redes complexas ao método Louvain. Para isto, alteramos o critério do algoritmo de construção das comunidades, fazendo com que os vértices fossem analisados de acordo com suas medidas de centralidade, em ordem crescente e decrescente de *weighted degree*, *betweenness* e *closeness*.

Descrevemos neste trabalho o impacto que estas modificações trouxeram em termos de modularidade obtida pelo algoritmo. Durante nossos experimentos, observamos que o uso das métricas trouxe mais ganhos positivos em modularidade em redes com maior coeficiente de agrupamento global. Em contrapartida, não houve bons resultados em redes com baixo coeficiente de agrupamento global, sendo preferível o uso do algoritmo original.

Observamos também que, nas redes em que o ganho foi positivo, ordenar os vértices de acordo com as medidas, da menor pontuação para a maior, leva à construção de comunidades com mais qualidade, pois os vértices mais periféricos vão sendo progressivamente agrupados aos vértices mais centrais, evitando vértices isolados e comunidades muito pequenas. Além disso, os resultados indicam que estas modificações possuem maior eficiência em redes esparsas, pois nestas redes as medidas de centralidade de cada vértice são mais variáveis.

Como trabalhos futuros, pretendemos fazer uso de mais de uma métrica para o critério guloso, verificando se esta mudança possui alguma influência na qualidade das comunidades encontradas pelo método Louvain. Pretendemos também utilizar o coeficiente de aglomeração global como métrica para avaliar o quanto os vértices estão associados e o quanto isso influencia nas comunidades identificadas, uma vez que existiu relação entre o coeficiente de agrupamento global e a melhora do método.

Referências

- Bedi, P. e Sharma, C. (2016). Community detection in social networks. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*, 6(3):115–135.
- Blondel, V. D., Guillaume, J.-L., Lambiotte, R., e Lefebvre, E. (2008). Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of statistical mechanics: theory and experiment*, 2008(10): P10008.
- Brandes, U., Delling, D., Gaertler, M., Görke, R., Hofer, M., Nikoloski, Z., e Wagner, D. (2007). On finding graph clusterings with maximum modularity. In *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, p. 121–132. Springer.



- Cho, E., Myers, S. A., e Leskovec, J. (2011). Friendship and mobility: user movement in location-based social networks. In *Proceedings of the 17th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, p. 1082–1090. ACM.
- Clauset, A., Newman, M. E., e Moore, C. (2004). Finding community structure in very large networks. *Physical review E*, 70(6):066111.
- Dehmer, M. e Emmert-Streib, F. (2009). *Analysis of complex networks: from biology to linguistics*. John Wiley & Sons.
- Fire, M., Puzis, R., e Elovici, Y. (2012). Link prediction in highly fractional data sets. *Handbook of Computational Approaches to Counterterrorism*.
- Girvan, M. e Newman, M. E. (2002). Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the national academy of sciences*, 99(12):7821–7826.
- Hofstad, R. V. D. (2016). *Random graphs and complex networks*, volume 1. Cambridge University Press.
- Lancichinetti, A. e Fortunato, S. (2009). Community detection algorithms: a comparative analysis. *Physical review E*, 80(5):056117.
- Leskovec, J. e Mcauley, J. J. (2012). Learning to discover social circles in ego networks. In *Advances in neural information processing systems*, p. 539–547.
- Motta, R., de Alneu Andrade Lopes, e de Oliveira, M. C. F. (2009). Centrality measures from complex networks in active learning. In *International Conference on Discovery Science*, p. 184–196. Springer.
- Odent, J. e Saint-Guillain, M. (2012). Automatic detection of community structure in networks. Technical report, Université catholique de Louvain.
- Opsahl, T., Agneessens, F., e Skvoretz, J. (2010). Node centrality in weighted networks: Generalizing degree and shortest paths. *Social networks*, 32(3):245–251.
- Öztürk, K. (2014). *Community detection in social networks*. PhD thesis, Middle East Technical University.
- Perra, N. e Fortunato, S. (2008). Spectral centrality measures in complex networks. *Physical Review E*, 78(3):036107.
- Prokhorenkova, L. O. e Samosvat, E. (2014). Global clustering coefficient in scale-free networks. In *International Workshop on Algorithms and Models for the Web-Graph*, p. 47–58. Springer.
- Rossi, R. A. e Ahmed, N. K. (2015). The network data repository with interactive graph analytics and visualization. In *Proceedings of the Twenty-Ninth AAAI Conference on Artificial Intelligence*. URL <http://networkrepository.com>.
- Scott, J. e Carrington, P. J. (2011). *The SAGE handbook of social network analysis*. SAGE publications.
- Shen, H.-W. (2013). *Community structure of complex networks*. Springer Science & Business Media.