



UMA NOVA CENTRALIDADE: PROXIMIDADE ESPECTRAL

Celso M. da Silva Jr.
DEMET/CEFET-RJ
Rio de Janeiro, Brasil
celso.silva@cefet-rj.br

Maria A. A. de Freitas¹
IM/UFRJ and COPPE-PEP
Rio de Janeiro, Brasil
maguieiras@im.ufrj.br

Renata R. Del-Vecchio²
IME/UFF
Niterói, Brasil
renata@vm.uff.br

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma nova medida de centralidade em grafos, a partir da matriz distância: proximidade espectral. Além de exibir algumas de suas propriedades, comparamos os resultados desta nova centralidade com a centralidade de proximidade. Um condição suficiente para que um grafo possua o mesmo vértice como mais central, de acordo com estas medidas, é determinada. Também provamos que, na classe dos grafos threshold, estas centralidades ordenam os vértices da mesma forma.

PALAVRAS CHAVE. Medidas de centralidade. Matriz distância. Autovetor principal.

Tópicos: Teoria e Algoritmos em Grafos. Outras aplicações em PO.

ABSTRACT

The objective of this work is to present a new measure of centrality in graphs, from the matrix distance: spectral closeness. In addition to displaying some of its properties, we compare the results of this new centrality with the closeness centrality. A sufficient condition for a graph to have the same vertex as more central, according to these measures, is determined. We also prove that, in the class of threshold graphs, these centralities order the vertices in the same way.

KEYWORDS. Measures of centrality. Distance matrix. Principal eigenvector.

Paper topics: Theory and Algorithms in Graphs, Other applications in OR.

¹Parcialmente fomentado pelo CNPq e FAPERJ.

²Parcialmente fomentado pelo CNPq.



Introdução

No contexto da Teoria Espectral de Grafos, dada uma matriz associada a um grafo, o estudo do seu maior autovalor pode fornecer diversas informações sobre a estrutura do grafo. No caso desta matriz ser não negativa, simétrica e irredutível, fixada uma norma p ($1 \leq p < \infty$), pelo Teorema de Perron-Frobenius, existe único autovetor positivo e unitário associado a este autovalor, chamado *autovetor principal p -normalizado*. No caso de não ser necessário explicitar a norma p utilizada, diremos apenas *autovetor principal*. O estudo de grafos a partir destes autovetores tem sido considerado para diversas matrizes (Cioaba e Gregory [2009]; Das [2009, 2011]; Das et al. [2015]). No caso particular da matriz de adjacência, o autovetor principal ganha especial destaque por representar uma medida de centralidade.

A Teoria de Grafos representa uma importante ferramenta para modelagem e análise de diferentes tipos de redes, problema que torna-se relevante devido à sua natureza real. Neste sentido, o conceito de medida de centralidade, introduzido por Bavelas [1950], auxilia a mensurar a relevância dos atores (vértices) envolvidos na rede, sendo aplicada as mais diversas áreas de conhecimento (Jeong et al. [2001]; Okamoto et al. [2008]; Reggiani et al. [2009]; Hein et al. [2012]). Devido à diversidade de características que as redes modeladas podem apresentar, um grande número de medidas de centralidade já foram definidas, dentre elas a centralidade de grau, centralidade de autovetor e a centralidade de proximidade, as quais iremos nos ater.

Neste trabalho, após apresentarmos, na Seção 2, conceitos da Teoria de Grafos e de medidas de centralidades, na terceira seção propomos uma nova medida de centralidade: proximidade espectral. Assim como a centralidade de autovetor pode ser vista como uma generalização da centralidade de grau, pensamos na proximidade espectral como uma generalização para a proximidade, já que considera um maior número de fatores para atribuir relevância aos vértices. O teor espectral da medida proposta implica em que discutir suas propriedades passe, necessariamente, pela discussão de resultados da Teoria Espectral. Mais precisamente, dos valores assumidos pelas entradas do autovetor principal da matriz distância de um grafo. Desta forma, após comparar através de alguns exemplos os resultados desta nova medida e da proximidade, na Seção 4 obtemos uma cota inferior para a menor entrada do autovetor principal da matriz distância. Em Das [2011] são exibidas cotas superiores para esta entrada. Também apresentamos uma condição suficiente para que um grafo possua o mesmo vértice como mais central, segundo as centralidades de proximidade e proximidade espectral, além de provar que na família dos grafos threshold, a ordenação de vértices segundo estas centralidades é a mesma. Problemas semelhantes foram considerados no contexto das centralidades de grau e autovetor em, por exemplo, Grassi et al. [2007], onde foi determinada uma condição suficiente para que os vértices mais centrais coincidam e, em Grassi et al. [2010], onde foi discutida a ordenação dos vértices de árvores segundo estas centralidades.

Preliminares

Neste trabalho, vamos considerar $G = (V, E)$ um grafo simples, finito e não orientado em que V é um conjunto de n vértices. O comprimento de um caminho é o número de arestas que o compõe. Um caminho de comprimento mínimo entre dois vértices v_i e v_j é chamado *geodésica* entre v_i e v_j . Se G é um grafo conexo, a *distância* entre dois vértices v_i e v_j de G , denotada por $d(v_i, v_j)$, é o comprimento de uma geodésica entre v_i e v_j . Consideramos $d(v_i, v_i) = 0$.

Dados grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, uma função $f : V_1 \rightarrow V_2$ é dita um *homomorfismo* de G_1 em G_2 se $\{v, w\} \in E_1$ implica $\{f(v), f(w)\} \in E_2$. G_1 e G_2 são *isomorfos*, o que é denotado por $G_1 \cong G_2$, quando existe um homomorfismo bijetor ou *isomorfismo* de G_1 em G_2 . Um *automorfismo* de G é um isomorfismo de G em si mesmo. Dois vértices $v_1, v_2 \in V$ serão ditos *transitivos* caso exista automorfismo f em G tal que $f(v_1) = v_2$.

A *matriz de adjacência* de um grafo G , $A(G) = [a_{i,j}]$, é a matriz quadrada de ordem n , tal que $a_{i,j} = 1$, se os vértices v_i e v_j são adjacentes e, em caso contrário, $a_{i,j} = 0$. A *matriz distância* de um grafo conexo G , $\mathcal{D}(G) = [d_{i,j}]$, é a matriz quadrada de ordem n , tal que $d_{i,j} = d(v_i, v_j)$. A *transmissão* de um vértice $v_i \in V$, denotada por $Tr(v_i)$, é definida como a soma das distâncias



de v_i a todos os demais vértices de G , isto é, $Tr(v_i) = \sum_{v_j \in V} d_{v_i, v_j}$. No caso de todos os vértices do grafo possuírem a mesma transmissão igual a k , o grafo é dito k -transmissão regular ou apenas *transmissão regular*. Iremos nos referir ao maior autovalor de $A(G)$ e $\mathcal{D}(G)$, respectivamente, como *índice adjacência* e *índice distância*. Por simplicidade, quando estiver claro sobre qual matriz nos referimos diremos apenas *índice*.

Observação 2.1 *Se G é um grafo conexo, tanto sua matriz adjacência como sua matriz distância são simétricas, irredutíveis e não negativas. Pelo Teorema de Perron-Fronebius, o índice adjacência e o índice distância de G terão multiplicidade de valor igual a 1 estando, cada um destes índices, associado a único autovetor positivo unitário (ver, por exemplo, Horn e Johnson [2012]).*

A mais simples das medidas de centralidade é a de grau, proposta por Shaw [1964]:

Definição 2.1 *Seja G um grafo com n vértices e seja v_i um vértice de G . A centralidade de grau de v_i é o número de vértices adjacentes a v_i , isto é, $c_d(v_i) = \text{deg}(v_i)$, o grau do vértice v_i .*

Exemplo 1 *No grafo apresentado na Figura 1, temos a seguinte centralidade de grau:*

$c_d(v_1)$	$c_d(v_{10})$	$c_d(v_{11})$	$c_d(v_{12})$	$c_d(v_{13})$	$c_d(v_2)$	$c_d(v_3)$
9	3	3	3	2	1	1
$c_d(v_4)$	$c_d(v_5)$	$c_d(v_6)$	$c_d(v_7)$	$c_d(v_8)$	$c_d(v_9)$	
1	1	1	1	1	1	

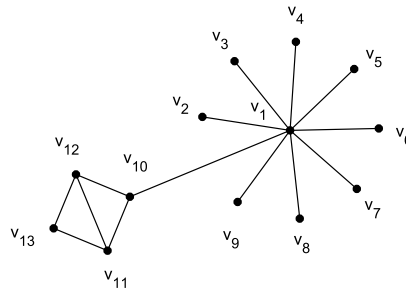


Figura 1: Grafo onde v_1 possui a maior centralidade de grau .

Bonacich [1987] introduziu a centralidade de autovetor que considera não apenas o número de vizinhos que um vértice possui como também o quão centrais estes vértices são.

Definição 2.2 *Seja G um grafo conexo com n vértices e seja v_i um vértice de G . A centralidade de autovetor de v_i é definida por $c_{av}(v_i) = x_i$, onde x_i é a i -ésima coordenada do autovetor positivo unitário associado ao índice adjacência do grafo.*

Segue da definição que se λ e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ são, respectivamente, o índice e o autovetor principal unitário associado à matriz $A(G)$ então

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff x_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n a_{i,k}x_k = \frac{1}{\lambda} \sum_{k \in N(v_i)} x_k.$$

Logo, a centralidade de autovetor de um vértice é determinada por uma combinação linear da centralidade de seus vértices adjacentes, o que justifica o apontado anteriormente sobre esta medida considerar dois fatores na determinação dos vértices mais centrais: número de vértices adjacentes e o quão centrais são estes vértices. Neste sentido, consideramos a centralidade de autovetor uma extensão da centralidade de grau.



Exemplo 2 Para o grafo apresentado na Figura (1) temos as seguintes centralidades de autovetor:

$c_{av}(v_1)$	$c_{av}(v_{10})$	$c_{av}(v_{11})$	$c_{av}(v_{12})$	$c_{av}(v_2)$	$c_{av}(v_3)$	$c_{av}(v_4)$
0,6345	0,3572	0,2407	0,2407	0,2031	0,2031	0,2031
$c_{av}(v_5)$	$c_{av}(v_6)$	$c_{av}(v_7)$	$c_{av}(v_8)$	$c_{av}(v_9)$	$c_{av}(v_{13})$	
0,2031	0,2031	0,2031	0,2031	0,2031	0,1541	

Muitos grafos modelam redes onde a distância entre os vértices torna-se uma informação fundamental. Neste sentido, Sabidussi [1966] introduziu a medida de proximidade:

Definição 2.3 Seja G um grafo conexo com n vértices e seja v_i um vértice de G . A centralidade de proximidade de v_i é determinada pelo inverso da soma das distâncias de v_i aos demais vértices do grafo, isto é, $c_p(v_i) = \frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{k=1}^n d_{v_i, v_k}}$.

Neste caso, o vértice mais central da rede é aquele cuja soma das distâncias a todos os demais vértices é mínima ou, equivalentemente, o vértice de transmissão mínima.

Exemplo 3 O grafo da Figura 2 apresenta as seguintes centralidades de proximidade:

$c_p(v_1)$	$c_p(v_6)$	$c_p(v_7)$	$c_p(v_2)$	$c_p(v_5)$	$c_p(v_8)$	$c_p(v_9)$	$c_p(v_3)$	$c_p(v_4)$
0,0666	0,0666	0,0666	0,0588	0,0588	0,0588	0,0555	0,0526	0,0526

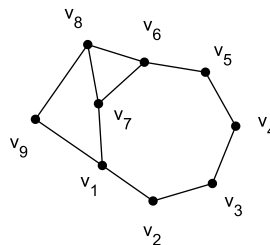


Figura 2: Grafo onde apenas v_9 não admite outro vértice com mesma transmissão.

Uma nova medida de centralidade

Assim como ocorria para a centralidade de grau, é comum ao utilizarmos a centralidade de proximidade que diferentes vértices apresentem o mesmo valor sem que ocupem, necessariamente, localizações “equivalentes” na rede. No Exemplo 2, os vértices v_2 e v_8 têm a mesma centralidade de proximidade, apesar de não terem o mesmo grau, por exemplo. Na verdade, neste grafo, apenas v_9 não admite outro vértice com mesma transmissão. Motivados por esta questão e pelo fato da centralidade de autovetor aperfeiçoar, em certo sentido, a centralidade de grau, propomos uma nova medida de centralidade, espectral, a qual chamamos de medida de proximidade espectral.

Definição 3.1 Seja G um grafo conexo com n vértices e seja v_i um vértice de G . A centralidade de proximidade espectral de v_i é definida por $c_{pe}(v_i) = \frac{1}{x_i}$, onde x_i é a i -ésima coordenada do autovetor positivo unitário associado ao índice distância do grafo.



Segue da Observação 2.1 que a centralidade de proximidade espectral fica bem definida. Mais ainda, note que se ∂ e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ são, respectivamente, o índice e o autovetor unitário positivo associado à matriz $\mathcal{D}(G)$ então

$$\mathcal{D}\mathbf{x} = \partial\mathbf{x} \iff x_i = \frac{1}{\partial} \sum_{k=1}^n d_{v_i, v_k} x_k \iff c_{pe}(v_i) = \frac{1}{x_i} = \frac{\partial}{\sum_{k=1}^n d_{v_i, v_k} x_k}. \quad (1)$$

Portanto, a centralidade de proximidade espectral de um vértice v_i é determinada, a menos da multiplicação pelo índice da matriz distância, pelo inverso de uma combinação linear das entradas do autovetor principal da matriz distância de G . Para cada vértice $k \in V$, o coeficiente de x_k nesta combinação linear é a distância entre v_i e v_k . Logo, um vértice v_i torna-se mais central com respeito à proximidade espectral à medida que dois fatores são combinados: valor reduzido para sua transmissão (única condição que estava presente na centralidade de proximidade) e a maior quantidade possível de vértices que estão distantes de v_i também devem ter alta centralidade (quando comparado aos valores assumidos pelos demais vértices do grafo). Enquanto a justificativa para o primeiro fator é imediata, sobre o segundo fator cabe observar que $x_k \in [0, 1]$ e, portanto, o vértice v_k contribui apenas com um percentual de d_{v_i, v_k} no denominador da Equação (1). Sendo assim, com o objetivo de minimizar o denominador, desejamos as menores entradas do autovetor principal da matriz distância sendo multiplicadas pelas maiores distâncias ou, equivalentemente, altas centralidades também ocorrendo nos vértices mais distantes de v_i . Esta situação reforça o caráter central de v_i já que, mesmo os vértices mais distantes dele ainda estarão, em algum sentido, “próximos” a ele e aos demais vértices do grafo, por possuírem alta centralidade.

Exemplo 4 O grafo da Figura 2 apresenta as seguintes medidas de proximidade espectral:

$c_{pe}(v_1)$	$c_{pe}(v_6)$	$c_{pe}(v_7)$	$c_{pe}(v_2)$	$c_{pe}(v_5)$
3,3404	3,3317	3,2912	3,0209	3,0143
$c_{pe}(v_8)$	$c_{pe}(v_9)$	$c_{pe}(v_3)$	$c_{pe}(v_4)$	
2,9471	2,8065	2,7439	2,7374	

Logo, no grafo da Figura 2, diferentemente do que ocorreu com a proximidade, não há vértices com a mesma proximidade espectral. O Exemplo 5 mostra que também pode ocorrer inversão na ordenação dos vértices segundo estas centralidades. Basta observar os vértices v_3 e v_6 .

Exemplo 5 Para o grafo da Figura 3 temos:

- *Centralidade de Proximidade:*

$c_p(v_4)$	$c_p(v_{10})$	$c_p(v_5)$	$c_p(v_3)$	$c_p(v_{11})$	$c_p(v_{13})$
0,02564	0,025	0,02326	0,01961	0,01961	0,01961
$c_p(v_6)$	$c_p(v_1)$	$c_p(v_{12})$	$c_p(v_2)$	$c_p(v_7)$	$c_p(v_{14})$
0,01961	0,01818	0,01818	0,01695	0,01587	0,01515
$c_p(v_{15})$	$c_p(v_{16})$	$c_p(v_{17})$	$c_p(v_8)$	$c_p(v_9)$	
0,01515	0,01515	0,01515	0,01316	0,01099	

- *Centralidade de Proximidade Espectral:*

$c_{pe}(v_4)$	$c_{pe}(v_{10})$	$c_{pe}(v_5)$	$c_{pe}(v_6)$	$c_{pe}(v_{11})$	$c_{pe}(v_{13})$
5,97051	5,84010	5,54293	4,74316	4,69285	4,69285
$c_{pe}(v_3)$	$c_{pe}(v_1)$	$c_{pe}(v_{12})$	$c_{pe}(v_2)$	$c_{pe}(v_7)$	$c_{pe}(v_{14})$
4,64490	4,38596	4,34065	4,07664	4,02885	3,69140
$c_{pe}(v_{15})$	$c_{pe}(v_{16})$	$c_{pe}(v_{17})$	$c_{pe}(v_8)$	$c_{pe}(v_9)$	
3,69140	3,69140	3,69140	3,40414	2,86541	

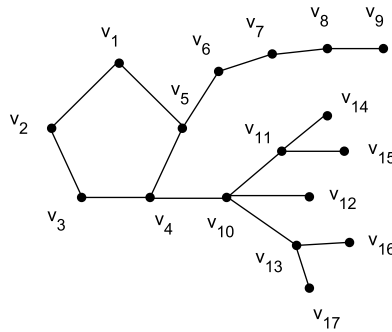


Figura 3: Grafo onde $c_p(v_3) > c_p(v_6)$, $c_{pe}(v_3) < c_{pe}(v_6)$.

O próximo exemplo exibe grafo onde os vértices mais centrais, segunda as centralidades de proximidade e proximidade espectral são distintos.

Exemplo 6 Para o grafo da Figura 4, temos

- *Centralidade de Proximidade:*

$c_p(v_1)$	$c_p(v_2)$	$c_p(v_4)$	$c_p(v_9)$	$c_p(v_{10})$	$c_p(v_{11})$
0,06667	0,06667	0,06667	0,06667	0,06667	0,06667
$c_p(v_6)$	$c_p(v_3)$	$c_p(v_5)$	$c_p(v_7)$	$c_p(v_8)$	
0,06250	0,05882	0,05882	0,05882	0,04	

- *Centralidade de Proximidade Espectral:*

$c_{pe}(v_6)$	$c_{pe}(v_1)$	$c_{pe}(v_2)$	$c_{pe}(v_4)$	$c_{pe}(v_9)$	$c_{pe}(v_{10})$
3,60881	3,57424	3,57424	3,57424	3,57424	3,57424
$c_{pe}(v_{11})$	$c_{pe}(v_3)$	$c_{pe}(v_5)$	$c_{pe}(v_7)$	$c_{pe}(v_8)$	
3,57424	3,29772	3,29772	3,29772	2,37225	

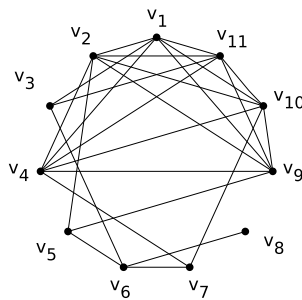


Figura 4: Grafo onde o conjunto de vértices que assumem a maior centralidade de proximidade e o conjunto de vértices que assumem o maior valor de proximidade espectral são disjuntos.



Algumas propriedades da medida de proximidade espectral

Nesta seção, exibimos algumas propriedades da medida de proximidade espectral, obtidas a partir de uma releitura de resultados já presentes na literatura. Também obtemos uma cota inferior para a menor entrada do autovetor principal da matriz distância de um grafo conexo, (o que significa uma cota superior para o maior valor da medida de proximidade espectral de um grafo). Por fim, consideramos o problema de comparar a ordenação de vértices de um grafo de acordo com centralidades proximidade e proximidade espectral.

O próximo resultado traz como consequência o fato da medida de proximidade espectral sempre atribuir a mesma centralidade a vértices transitivos.

Proposição 4.1 *Xing e Zhou [2013]* Seja G um grafo conexo com autovetor principal da matriz distância $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e f um automorfismo de G . Se $f(v_i) = v_j$ então $x_i = x_j$

Corolário 4.1 *Se G é um grafo conexo e $v_i, v_j \in V$ são vértices transitivos então $c_{pe}(v_i) = c_{pe}(v_j)$.*

Notemos que se G é um grafo transmissão regular então todos os seus vértices possuem a mesma centralidade de proximidade espectral. De fato, como a soma dos elementos de cada linha da matriz distância de G é constante, então esta matriz tem como autovetor principal o vetor $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$. Na verdade, os grafos transmissão regular desempenham papel análogo, para a centralidade de proximidade espectral, ao desempenhado pelos grafos regulares com respeito à centralidade de autovetor já que, no segundo caso, o autovetor principal associado a matriz de adjacência também é o vetor $\mathbf{1}$. Destacamos ainda que a recíproca do Corolário 4.1 não se verifica no caso geral. Como exemplo, podemos considerar o grafo apresentado na Figura 5 que, apesar de não ser regular (portanto, possui vértices não transitivos), é transmissão regular, o que implica em todos os seus vértices terem a mesma centralidade de proximidade espectral.

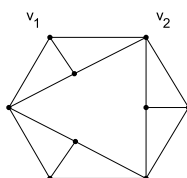


Figura 5: Grafo 14-transmissão regular apesar de não ser regular, já que v_1 e v_2 não possuem o mesmo grau.

Para o que segue, dado um grafo $G(V, E)$ e $v \in V$, denotamos por $N(v)$ o conjunto formado pelos vértices adjacentes a $v \in V$ em G . Caso $N(v) = V \setminus \{v\}$, v é chamado *vértice dominante*. Caso possua exatamente 1 vizinho, é chamado *vértice pendente* e se não possuir vizinhos, é chamado *vértice isolado*.

São resultados conhecidos:

Teorema 4.1 *Aouchiche e Hansen [2014]* Seja G um grafo conexo com $n \geq 3$ vértices e autovetor principal da matriz distância $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

- i) Se u é um vértice pendente adjacente a um vértice v , então $x_u > x_v$;
- ii) Se G é uma árvore e $x_v < x_u$, então as entradas de \mathbf{x} por qualquer caminho da forma $vu \dots w$ formam uma sequência crescente de números positivos;
- iii) Para uma árvore, a entrada mínima do vetor de Perron não ocorre em um vértice pendente. Mais ainda, o mínimo pode ocorrer em no máximo dois vértices que, neste caso, são adjacentes;



- iv) Para uma árvore, a entrada máxima do vetor de Perron ocorre em um vértice pendente e pode ocorrer em diversos vértices;
- v) Dados $u, v \in V$, se $N(u) \setminus \{v\} \subsetneq N(v) \setminus \{u\}$, então $x_u > x_v$. Mais ainda, se $N(u) \setminus \{v\} = N(v) \setminus \{u\}$, então $x_u = x_v$.

As seguintes propriedades a respeito da centralidade de proximidade espectral são obtidas a partir de uma releitura do teorema acima:

Corolário 4.2 *Seja G um grafo conexo com $n \geq 3$ vértices.*

- i) *Se u é um vértice pendente adjacente a um vértice v , então $c_{pe}(u) < c_{pe}(v)$;*
- ii) *Se G é uma árvore e $c_{pe}(u) < c_{pe}(v)$ as centralidades por qualquer caminho da forma $vu \dots w$ formam uma sequência decrescente de números positivos;*
- iii) *Para uma árvore, o vértice de maior centralidade de proximidade espectral ocorre em um vértice interior. Mais ainda, a centralidade máxima pode ocorrer em no máximo dois vértices que, neste caso, são adjacentes;*
- iv) *Para uma árvore, a centralidade mínima de proximidade espectral ocorre em um vértice pendente e pode ocorrer em diversos vértices;*
- v) *Dados $u, v \in V$, tais que $N(u) \setminus \{v\} \subsetneq N(v) \setminus \{u\}$, então $c_{pe}(u) < c_{pe}(v)$. Mais ainda, se $N(u) \setminus \{v\} = N(v) \setminus \{u\}$, então $c_{pe}(u) = c_{pe}(v)$.*

PROVA. Os resultados seguem do fato de que se $u, v \in V$ então

$$x_u > x_v \Leftrightarrow c_{pe}(u) = \frac{1}{x_u} < \frac{1}{x_v} = c_{pe}(v).$$

□

Observação 4.1 *O item (v) da Teorema 4.1 e do Corolário 4.2 podem ser enunciados de forma análoga para a transmissão de um vértice Li et al. [2014] e para a centralidade de proximidade, respectivamente. Este resultado é utilizado mais à frente.*

Obtemos, na sequência, uma cota inferior para a menor entrada do autovetor principal associado à matriz distância de um grafo conexo. Embora existam cotas desta natureza para diversas matrizes associadas a grafos, no caso da matriz distância apenas cotas superiores já foram determinadas. Utilizaremos o seguinte resultado:

Lema 4.1 *Papendieck e Recht [2000] Se p_1, p_2, \dots, p_n são números positivos, então:*

$$\frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \geq \min_i \frac{r_i}{p_i}$$

para quaisquer números reais r_1, r_2, \dots, r_n . A igualdade ocorre se, e somente se, todos os quocientes $\frac{r_i}{p_i}$ são iguais.

Teorema 4.2 *Seja G um grafo conexo com n vértices e $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, o autovetor 1-normalizado associado ao índice ∂ de $\mathcal{D}(G)$, onde $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Então*

$$x_n \geq \frac{1}{\partial + 1}. \quad (2)$$

Mais ainda, se a igualdade ocorre em (2) então G possui um vértice dominante.



PROVA. Da equação $\mathcal{D}\mathbf{X} = \partial\mathbf{X}$ e do Lema 4.1 segue que

$$\frac{\partial x_n}{1 - x_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} d_{ni}y_i}{\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \geq \min_i \frac{d_{ni}x_i}{x_i} = 1,$$

já que o grafo é conexo. Disto, segue o resultado.

Reciprocamente, suponhamos que a igualdade ocorra em (2). Novamente, usando Lema 4.1, temos $d_{ni} = 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Portanto, G possui um vértice dominante. \square

Como vimos no Exemplo 4, as centralidades de proximidade e proximidade espectral podem apresentar diferentes vértices como os de maior relevância. Na sequência, exibimos uma condição análoga à apresentada em Grassi et al. [2007], agora para que o mesmo vértice tenha as maiores centralidades de proximidade e proximidade espectral. Para isto, obtemos uma nova cota para o índice distância de um grafo conexo.

Ao longo dos próximos resultados, dado um grafo conexo G de ordem n , denotamos a transmissão de seus vértices por $Tr_1 \leq Tr_2 \leq \dots \leq Tr_n$. Além disto, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ denota um autovetor unitário associado ao índice ∂ de $\mathcal{D}(G)$. Consideramos os conjuntos $U = \{v \in V : x_v = \max x_i\}$, $W = \{v \in V : x_v = \min x_i\}$, $T_{\min}(U) = \min \{Tr(v) : v \in U\}$ e $T_{\max}(W) = \max \{Tr(v) : v \in W\}$. Lembramos que, se $x_v = \min \{x_i : i \in V\}$, então este vértice possui o maior valor de centralidade de proximidade espectral do grafo G . De forma similar, se $Tr(v) = Tr_1$ então o vértice v possui o maior valor de centralidade de proximidade do grafo.

O próximo teorema fornece uma nova cota para o índice distância de um grafo.

Teorema 4.3 *Sejam G um grafo conexo de ordem n e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ um autovetor unitário associado ao índice ∂ de $\mathcal{D}(G)$. Então, $T_{\max}(W) \leq \partial \leq T_{\min}(U)$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, G é transmissão regular.*

PROVA. Vamos provar apenas uma das desigualdades, visto que a outra segue de forma análoga. Seja $v \in U$ tal que $Tr(v) = T_{\min}(U)$. Então

$$\partial = \frac{1}{x_v} \sum_{k=1}^n d_{k,v}x_k \leq \sum_{k=1}^n d_{k,v} = Tr(v) = T_{\min}(U). \quad (3)$$

Se vale a igualdade em (3), então, $\sum_{k=1}^n d_{k,v}x_k = \sum_{k=1}^n d_{k,v}x_v$ e, como $0 \leq x_k \leq x_v$, segue que $x_k = x_v \forall k \in V$. Logo, G é transmissão regular. \square

É conhecida a seguinte cota para o índice da matriz distância:

Proposição 4.2 *Hong e You [2013] Se G é um grafo conexo com n vértices então $Tr_1 \leq \partial \leq Tr_n$. Mais ainda, cada uma das igualdades ocorre se, e somente se, G é transmissão regular.*

Exemplo 7 *Para o grafo da Figura 4, a cota apresentada na Proposição 4.2 implica $15 \leq \partial \leq 25$, enquanto pelo teorema anterior temos $16 \leq \partial \leq 25$.*

O próximo corolário é fundamental para enunciarmos um condição suficiente para que o vértice com a maior centralidade de proximidade espectral tenha também a maior proximidade.



Corolário 4.3 *Sejam G um grafo conexo de ordem n e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ um autovetor unitário associado ao índice ∂ de $\mathcal{D}(G)$. Se $v \in V$ é um vértice tal que $x_v = \min x_i$ então, para todo vértice $w \in V$ tal que $Tr(w) > \partial$, temos $x_w > x_v$.*

PROVA. Caso $x_w = x_v$, teríamos $w \in W$ e $Tr(w) \leq T_{\max}(W) \leq \partial$, absurdo. □

Teorema 4.4 *Sejam G um grafo conexo de ordem n , $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ um autovetor unitário associado ao índice ∂ de $\mathcal{D}(G)$ e $x_v = \min x_i$. Se $Tr_1 = Tr_2 = \dots = Tr_k \leq \partial < Tr_{k+1} \leq \dots Tr_n$, para algum $1 \leq k \leq n - 1$ então $Tr(v) = Tr_1$.*

PROVA. Se $v \in V$ é tal que $x_v = \min x_i$, pelo Corolário 4.3, $Tr(v) \leq \partial$ e, portanto, $Tr(v) = Tr_1$. □

Pelo teorema anterior, com a condição de que $Tr_1 = Tr_2 = \dots = Tr_k \leq \partial < Tr_{k+1} \leq \dots Tr_n$, para algum $1 \leq k \leq n - 1$, o vértice com menor entrada de autovetor é obrigatoriamente um vértice com a menor transmissão. Não é verdade, no caso geral, que o vértice com menor transmissão seja um vértice com a menor entrada do autovetor associado ao índice da matriz distância (ver, para o grafo da Figura 2, os valores de centralidade de proximidade e de proximidade espectral nos Exemplos 3 e 4).

O próximo teorema fornece uma condição suficiente para que um grafo admita exatamente um vértice com a maior centralidade de proximidade e para que, este mesmo vértice, possua, de forma estrita, a maior centralidade de proximidade espectral.

Teorema 4.5 *Sejam G um grafo conexo de ordem n e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ um autovetor unitário associado ao índice ∂ de $\mathcal{D}(G)$. Se $Tr_2 > \partial$ então existe único $v \in V$ tal que $x_v < \min_{i \neq v} x_i$ e $Tr(v) = Tr_1 < Tr_2$.*

PROVA. Seja $v \in V$ tal que $Tr(v) = Tr_1$. Logo, $Tr(v) \leq \partial < Tr_2$. Além disso, se $w \in V$ é tal que $x_w = \min x_i$, pelo corolário anterior, $Tr(w) \leq \partial$, ou seja, $w = v$. □

Exemplo 8 *Se $G \cong S_n$, onde $n \geq 3$, então suas transmissões são $Tr_1 = n - 1$ e $Tr_2 = Tr_3 = \dots = Tr_n = 2n - 3$. Além disto, como $\rho(S_n) = n - 2 + \sqrt{(n - 2)^2 + (n - 1)}$, temos que $Tr_1 < \rho(S_n) < Tr_2 = \dots = Tr_n$. Logo, o vértice dominante da estrela é o único a possuir a maior centralidade de proximidade e o único a possuir a maior centralidade de proximidade espectral.*

Não é difícil verificar que, no exemplo acima, toda a ordenação apresentada pelas centralidades de proximidade e proximidade espectral coincidem. De fato, como vemos na sequência, o grafo estrela faz parte de uma importante família de grafos onde as centralidades de proximidade e proximidade espectral coincidem: os grafos *threshold*.

Os grafos *threshold* foram introduzidos por Chvátal e Hammer [1977] nos anos 70 e suas aplicações abrangem a área da psicologia, sincronização de processos paralelos entre outros (Mahadev e Peled [1995]). Lembramos que um grafo *threshold* G de ordem n é obtido através de um processo iterativo que começa por um vértice isolado e onde, em cada etapa, ou um novo vértice isolado é adicionado, ou um vértice adjacente a todos os anteriores é adicionado. De acordo com esta construção, um grafo *threshold* pode ser representado por uma sequência binária (b_1, b_2, \dots, b_n) , onde $b_i = 0$ significa adição de um vértice isolado e $b_i = 1$ adição de um vértice dominante.

Abaixo, determinamos como ordenar os vértices de um grafo *threshold* segundo a centralidade de proximidade.



Teorema 4.6 *Seja G um grafo threshold com sequência binária $(0, b_2, \dots, b_{n-1}, 1)$. Então, a ordenação dos vértices de G , segundo a centralidade de proximidade, é $c_p(v_1) \geq c_p(v_2) \geq \dots \geq c_p(v_m) \geq c_p(w_1) \geq c_p(w_2) \geq \dots \geq c_p(w_k)$, $m + k = n$, onde:*

- i) *Todo vértice v_i , $1 \leq i \leq m$, está associado ao número 1 na sequência binária de G ; todo vértice w_j , $1 \leq j \leq k$, está associado ao número 0 na sequência binária de G ;*
- ii) *$c_p(v_m) = c_p(w_1)$ se, e somente se, $b_2=1$;*
- iii) *$c_p(v_i) \geq c_p(v_j)$ se, e somente se, v_i está associado a uma entrada na sequência binária de G posterior à associada a v_j ; $c_p(v_i) = c_p(v_j)$ se, e somente se, v_i e v_j são vértices associados a entradas consecutivas da sequência binária;*
- iv) *$c_p(w_i) \geq c_p(w_j)$ se, e somente se, w_i está associado a uma entrada na sequência binária de G anterior à associada a w_j ; $c_p(w_i) = c_p(w_j)$ se, e somente se, w_i e w_j são vértices associados a entradas consecutivas da sequência binária.*

PROVA. Seja G um grafo threshold com sequência binária $(0, b_2, \dots, b_{n-1}, 1)$. Observe que os vértices associados ao número 1, na sequência binária, determinam, da esquerda para direita, uma sequência crescente de "conjuntos de vizinhança encaixantes" no sentido de que, se $b_i = b_j = 1$ e $i < j$, então $N(v_i) \setminus \{v_j\} \subset N(v_j) \setminus \{v_i\}$. Mais ainda, $N(v_i) \setminus \{v_j\} = N(v_j) \setminus \{v_i\}$ se, e somente se, $j = i + 1$. Desta forma, segue da Observação 4.1 que, se $b_i = b_j = 1$ e $i < j$ então $c_p(v_i) \leq c_p(v_j)$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $j = i + 1$. Por outro lado, utilizando raciocínio análogo, temos que os vértices associados ao número 0 na sequência binária determinam, da esquerda para direita, uma sequência decrescente de conjuntos de vizinhança encaixantes. Logo, novamente pela Observação 4.1, se $b_i = b_j$ e $i < j$ então $c_p(v_i) \geq c_p(v_j)$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $j = i + 1$. Resta observarmos que se $i_0 \in \mathbb{N}$ é o menor índice tal que $b_{i_0} = 1$ e se $j_0 \in \mathbb{N}$ é o menor índice tal que $b_{j_0} = 0$, então $N(v_j) \setminus \{v_{j_0}\} \subset N(v_{i_0}) \setminus \{v_{j_0}\}$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $j_0 = 1$ e $i_0 = 2$. Em qualquer caso, a ordenação fica determinada. □

É possível obter resultado análogo ao Teorema 4.6 substituindo, em seu enunciado, as centralidades de proximidade por centralidades de proximidade espectral. Para isto, basta utilizar item (v) do Corolário 4.2 no lugar da Observação 4.1. Portanto, ambas medidas ordenam os vértices de um grafo *threshold* conexo da mesma forma.

Teorema 4.7 *Todo grafo threshold conexo apresenta a mesma ordenação de vértices segundo as centralidades de proximidade e proximidade espectral.*

Referências

- Aouchiche, M. e Hansen, P. (2014). Distance spectra of graphs: A survey. *Linear Algebra and its Applications*, 458:301–386.
- Bavelas, A. (1950). Communication patterns in task oriented groups. *Journal of the Acoustical Society of America*, 22:725–730.
- Bonacich, S. P. (1987). Power and centrality: A family of measures. *The American Journal of Sociology*, 92(5):1170–1182.
- Chvátal, V. e Hammer, P. L. (1977). Aggregation of inequalities in integer programming. In *Studies in Integer Programming, Annals of Discrete Math.*, p. 145–162, Amsterdam.



- Cioaba, S. e Gregory, D. (2009). Principal eigenvectors of irregular graphs. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 16:366–379.
- Das, K. C. (2009). A sharp upper bound on the maximal entry in the principal eigenvector of symmetric nonnegative matrix. *Linear Algebra Appl*, 431:1340–1350.
- Das, K. C. (2011). Maximal and minimal entry in the principal eigenvector for the distance matrix of a graph. *Discr. Math*, 311:2593–2600.
- Das, K. C., da Silva Junior, C. M., de Freitas, M. A. A., e Del-Vecchio, R. R. (2015). Bounds on the entries of the principal eigenvector of the distance signless laplacian matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 483:200–220.
- Grassi, R., Stefani, S., e Torriero, A. (2007). Some new results on the eigenvector centrality. *Journal of Mathematical Sociology*, 31:237–248.
- Grassi, R., Stefani, S., e Torriero, A. (2010). Extremal properties of graphs and eigencentality in trees with a given degree sequence. *Journal of Mathematical Sociology*, 34:115–135.
- Hein, O., Schwind, M., e Spiwoks, M. (2012). Network centrality and stock market volatility: The impact of communication topologies on prices. *Journal of Finance and Investment Analysis*, 1 (1):199–232.
- Hong, W. e You, L. (2013). Some sharp bounds on the distance signless laplacian spectral radius of graphs. <http://arxiv.org/pdf/1308.3427v1.pdf>.
- Horn, R. A. e Johnson, C. R. (2012). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York, 2 edition.
- Jeong, H., Mason, S. P., Barabási, A.-L., e Oltvai, Z. N. (2001). Lethality and centrality in protein networks. *Nature*, 411(6833):41–42.
- Li, X., Fan, Y., e Zha, S. (2014). A lower bound for the distance signless laplacian spectral radius of graphs in terms of chromatic number. *Journal of Mathematical Research with Applications*, 14(3):289–294.
- Mahadev, N. V. R. e Peled, U. N. (1995). *Threshold graphs and related topics*. Elsevier, New York, 1 edition.
- Okamoto, K., Chen, W., e Li, X.-Y. (2008). Ranking of closeness centrality for large-scale social networks. In *International Workshop on Frontiers in Algorithmics*, p. 186–195. Springer.
- Papendieck, B. e Recht, P. (2000). On maximal entries in the principal eigenvector of graphs. *Linear Algebra Appl*, 310:129–138.
- Reggiani, A., Signoretti, S., Nijkamp, P., e Cento, A. (2009). Network measures in civil air transport: A case study of lufthansa. In *Networks, Topology and Dynamics*, p. 257–282. Springer.
- Sabidussi, G. (1966). The centrality index of a graph. *Psychometrika*, 31:581–603.
- Shaw, M. E. (1964). *Communication networks*, chapter 4. Academic Press, INC, New York, 1 edition.
- Xing, R. e Zhou, B. (2013). On the distance and distance signless laplacian spectral radii of bicyclic graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 439:3955–3963.