



## **Restrição de liquidez para portfólio de investimento com base no volume financeiro negociado**

**Eduardo Bered Fernandes Vieira**  
**Tiago Pascoal Filomena**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Administração  
Rua Washington Luiz, 855 - CEP 90010-460 - Porto Alegre/RS - Brasil  
eduardo.vieira@ufrgs.br, tpfilomena@ea.ufrgs.br

### **RESUMO**

Esse trabalho propõe a inserção de restrição de liquidez em um modelo de seleção de carteiras, visando aplicação no mercado brasileiro. No Brasil, a Comissão de Valores Imobiliários (CVM) expõe a importância do controle da liquidez de fundos de investimentos através de instrução publicada em 2012. A restrição proposta considera parâmetros utilizados nas normas brasileiras de controle de liquidez, como percentual do total negociado máximo, nível de liquidação e prazo para liquidação. O modelo é aplicado considerando-se diversos cenários, sendo variados parâmetros como valor da carteira formada e nível de liquidação aceitável, em diferentes intervalos de formação de portfólios. Verificam-se os níveis de liquidação das carteiras formadas e seu impacto no nível de risco das mesmas. Os resultados se mostraram consistentes, com bons níveis de percentual liquidado das carteiras formadas, próximos aos níveis de liquidação aceitáveis. Foi constatado também um aumento do nível de risco das carteiras mais restritas pela liquidez.

**PALAVRAS CHAVE.** liquidez, seleção de carteiras, restrição de liquidez.

**PO em finanças, otimização de carteiras de investimentos**

### **ABSTRACT**

This work proposes the insertion of a liquidity constraint in a portfolio selection model, aiming to be applied in the Brazilian market. In Brazil, the "Comissão de Valores Imobiliários", CVM, exposes the importance of controlling the liquidity of investment funds through the instruction published in 2012. The constraint proposed in this paper considers parameters used in the Brazilian regulatory standards of liquidity control parameters such as maximum percentage of monetary value, liquidation level and liquidation term date. The model is applied considering several scenarios, varying parameters such as the portfolio value and acceptable liquidation level, in different portfolio formation intervals. The liquidation levels of the portfolios formed and their impact on the risk of the portfolios are verified. The results were consistent, with good levels of liquidation of the portfolios formed, close to acceptable liquidation levels. There was also an increase in the risk of liquidity-restricted portfolios.

**KEYWORDS.** liquidity, portfolio selection, liquidity constraint.

**OR in finance, portfolio optimization**



## 1. Introdução

A liquidez é um conceito muito conhecido e utilizado no mercado. Apesar disso, modelos de seleção de carteira clássicos como Markowitz [1952] costumam considerar apenas relações de risco e retorno ao analisar um investimento, assumindo que os ativos citem ser negociados continuamente, em qualquer quantidade. Geralmente, estes modelos não consideram a liquidez dos ativos envolvidos, o que citet trazer efeitos negativos ao investidor. Durante o processo de decisão, além da rentabilidade e do risco, o prazo que se estará disposto a permanecer na posição e a possibilidade de saída da posição se mostram importantes.

A posição de um investidor em um determinado ativo está relacionada com a quantidade de ativos e seu preço. Porém, dependendo da quantidade de ativos o fechamento da posição se torna impossibilitado no determinado preço. Um pequeno investidor provavelmente consiga vender todos os seus ativos pelo preço desejado, porém um grande investidor certamente não terá a mesma facilidade. Seria necessária uma redução no preço para a venda de todos os ativos. Portanto, uma grande oferta de ativos gera queda no preço do mesmo, reduzindo o retorno proveniente de sua venda.

A precificação de ativos tem na liquidez um importante fator. Quanto menor a liquidez, maior é o custo de negociação do ativo. Desta forma, se espera um retorno maior para um ativo com menor liquidez. Porém, investir em ativos com baixa liquidez muitas vezes não se torna vantajoso, se o período de investimento for curto, pois os custos de transação atuam de forma a reduzir os ganhos. Em muitos casos, são períodos longos que tendem apresentar vantagens em investimentos em ativos com pouca liquidez. Portanto, na seleção de investimentos, é importante analisar a liquidez, além da relação risco-retorno.

No Brasil, a Comissão de Valores Imobiliários (CVM), responsável por normalizar e fiscalizar a atuação de agentes de mercado no Brasil, indica a respeito da importância do controle da liquidez dos fundos de investimento. Em 2012, em uma instrução, a CVM reformou as regras dos fundos de investimento, dando importância para a liquidez.

Em Pereira et al. [2015] é proposta uma restrição de liquidez para modelos de seleção de carteiras. A restrição proposta considera normas brasileiras de controle de liquidez e tem aplicação individual em todos os ativos participantes da carteira. O artigo citado acima é utilizado como ponto de partida para o presente trabalho. O principal ponto que difere de Pereira et al. [2015] está na maneira que a liquidez é considerada. No presente estudo é considerada a liquidez do portfólio como um todo. Portanto é adotado que não necessariamente todos os ativos participantes estejam individualmente atendendo às normas, mas sim a carteira formada.

Em Lo et al. [2003] é realizado um teste, comparando três medições de liquidez: taxa de turnover, volume negociado e *bid-ask spread*. Foi constatada grande correlação entre as três medidas. Portanto, no presente estudo foi escolhido o volume financeiro negociado como medida de liquidez pela facilidade de obtenção e manipulação dos dados. Em Pereira et al. [2015], onde é utilizado o volume monetário, é feita uma comparação de três medições de liquidez utilizando o volume: média móvel de 5 dias, média móvel de 30 dias e decaimento exponencial simples. Foi constatada grande correlação entre as três medidas. Para o presente trabalho foi escolhida a média móvel de 30 dias, pois apesar da alta correlação com as demais medidas, foi a medida que apresentou menores valores para percentual liquidado da carteira em Pereira et al. [2015]. Portanto foi escolhido o caso que apresentou os piores resultados, apesar da alta correlação entre todas as opções.

Com o objetivo de aplicação no Brasil, parâmetros considerados em manuais de corretoras e bancos para o controle de liquidez estão presentes nas restrições aplicadas no presente trabalho. Segundo Pereira et al. [2015] a liquidez é controlada pelas corretoras e bancos, basicamente, com base em três indicadores: o percentual limite do volume total negociado, o prazo para liquidação, e o nível de liquidação aceitável.

O percentual limite do volume total negociado ( $pl_{max}$ ) é o percentual máximo do total



médio transacionado que se acredita que a sua venda não causará impacto no preço do ativo. O prazo para liquidação ( $ppzo_{max}$ ) é o período máximo para que o total de um determinado ativo seja liquidado. O nível de liquidação aceitável ( $pnvl_{min}$ ) representa uma flexibilização da exigência de liquidação total da posição, não sendo necessária a completa liquidação no prazo exigido. Em Pereira et al. [2015] é criada a constante  $\beta$ , que relaciona estes três parâmetros. Esta constante é adicionada na restrição de liquidez imposta pelos autores. O  $\beta$  é apresentado abaixo, na equação 1:

$$\beta = \frac{pl_{max} \cdot ppzo_{max}}{pnvl_{min}} \quad (1)$$

A inserção da restrição considerada no presente trabalho, com parâmetros de controle de liquidez, aplicado no mercado brasileiro, apresenta bons resultados para percentuais liquidados das carteiras formadas. Comparando com carteiras selecionadas na ausência da restrição, é observado um aumento considerável na liquidação das mesmas. Em diversos casos analisados o percentual liquidado se mostra sempre próximo ao nível aceitável. Como esperado, o risco das carteiras restritas pela liquidez se mostra com valores mais elevados, porém, as carteiras formadas se adequam às normas brasileiras, no que diz respeito ao controle da liquidação aceitável.

Este trabalho tem como objetivo a aplicação de restrição de liquidez em um modelo geral de seleção de carteira, visando aplicação no mercado brasileiro, sendo este o seu principal objetivo. Aplicação de restrição que leve em consideração as normas brasileiras a respeito do controle da liquidez de fundos de investimento. Alguns objetivos específicos podem ser citados: utilizar restrições de liquidez que sejam aplicáveis em vários modelos de investimento, analisar a liquidez do portfólio como um todo, e não individualmente dos ativos participantes, considerar o valor monetário do portfólio como variável da liquidez, utilizar o volume financeiro como métrica de liquidez.

A principal limitação do estudo realizado é o fato de ser considerado apenas um modelo de seleção de carteiras. Para simplificar, pelo elevado tempo de processamento, foi utilizado o modelo de mínima variância com variância amostral. Apesar disso, as restrições impostas não são dependentes do modelo de seleção utilizado, sendo possível utilizá-las em qualquer outro modelo de otimização. Outro ponto a ser comentado é que o modelo utilizado não leva em consideração a interação de liquidez entre os ativos, ou seja, a variação da liquidez de um ativo não afeta a liquidez dos demais.

## 2. Revisão Bibliográfica

Em virtude da necessidade de se levar em conta os efeitos da liquidez, o interesse pelo tema da comunidade científica tem crescido. Nesta seção será apresentada uma base teórica que será utilizada no modelo do trabalho. Primeiramente serão apresentados os principais índices de liquidez. Em seguida, serão discutidas as formas de restrição de liquidez no modelo de seleção de carteira.

### 2.1. Métricas de Liquidez de Ativos

O estudo da liquidez possui um grande problema que é o fato da liquidez ser multidimensional. Este fato torna dificultada uma observação de forma direta da liquidez. A utilização de aproximações ocasiona, inevitavelmente, em erros de medição. Entre pesquisadores, não há unanimidade a respeito da melhor aproximação. Segundo Demsetz [1968], são determinantes da liquidez de um ativo: o volume financeiro transacionado, o número de negócios, a volatilidade, o tamanho da empresa e o preço da ação. É possível criar índices artificiais que tentam capturar da forma mais precisa possível o comportamento da liquidez. São apresentados a seguir os principais índices baseados em volume assim como os principais índices baseados em preços.



### 2.1.1. Índices baseados em Volume

O volume financeiro é bastante utilizado como aproximação para a liquidez. Segundo Gabrielsen et al. [2011], índices baseados em informação fornecida pelo volume negociado estão relacionados com o impacto no preço das transações. Isso pode ser capturado simplesmente medindo-se o valor total de ações negociadas em um período definido. É intuitivo pensar que uma ação que negocia muito possui liquidez elevada. Apesar da simplicidade, o volume transacionado pode ser considerado uma medida confiável da liquidez, apesar de não ser unanimidade entre os pesquisadores.

Em Brennan et al. [1998] é investigado se os retornos esperados são explicados por diversas características, entre elas a liquidez. Eles empregam o volume monetário transacionado como *proxy* para esta variável, pois consideraram uma medida mais apropriada para seu estudo devido a grande disponibilidade de uma longa série de dados, permitindo assim a realização de testes de hipótese mais robustos.

Outro índice baseado em volume é a taxa de turnover. Ela relaciona o volume total transacionado e o total de ativos emitidos. Em Correia et al. [2008], onde é examinado se o retorno das ações pode ser explicado pela liquidez, é utilizado o índice turnover como *proxy*. Alguns outros trabalhos que utilizam este índice como aproximação de liquidez são Datar et al. [1998], Marshall e Young [2003], Chan e Faff [2003] e Jun et al. [2003]. No estudo de Chordia et al. [2001] foi analisada a relação entre retornos esperados e duas *proxies* para liquidez: o volume transacionado e o índice turnover.

### 2.1.2. Índices baseados em Preços

Uma medida de liquidez bastante utilizada por pesquisadores é a diferença entre o preço ofertado de um ativo e seu preço demandado, o *bid-ask spread*. Em Amihud e Mendelson [1986] a liquidez é aproximada pelo *bid-ask spread* para examinar a relação entre retorno e liquidez. Diversos outros autores como Brennan e Subrahmanyam [1996], Atkins e Dyl [1997], Jacoby et al. [2000] também utilizaram esta medida como aproximação para liquidez.

A análise direta da variação nos preços é utilizada para inferir a liquidez de um ativo ou um mercado. Os principais índices baseados em preços são a taxa de liquidez de March e Rock (1986) e a taxa de variância, segundo Gabrielsen et al. [2011].

Em Amihud [2002] é proposta uma medida de iliquidez como sendo a razão entre o retorno absoluto e o volume financeiro negociado. Esta medida utiliza dados diários e pode ser interpretada como a resposta do preço associada com o volume negociado, sendo então uma medida de impacto no preço. Resultados mostram que os retornos são função crescente da iliquidez.

## 2.2. Restrições de Liquidez

Nesta seção são abordadas formas de se inserir a liquidez como restrição no problema de seleção de carteira encontradas na literatura. Existem basicamente três maneiras de incluir esse parâmetro como restrição: a filtragem prévia, a média ponderada e a restrição individual no ativo.

### 2.2.1. Filtragem Prévia

A ideia é filtrar a amostra previamente, definindo uma liquidez de corte. Apenas ativos com liquidez mínima definida poderão fazer parte da carteira. Não se trata de uma restrição no modelo propriamente dito, mas uma exclusão de ativos que não possuam liquidez mínima exigida, funcionando como um pré-processamento, realizado antes do procedimento de otimização da carteira.

### 2.2.2. Média Ponderada

É possível, ao invés de filtragem prévia de ativos, ser utilizada uma restrição que considera a liquidez da carteira como um todo, definido por Lo et al. [2003]. Utilizando essa métrica de liquidez no portfólio, é proposta uma restrição que assegura que a média ponderada da liquidez dos ativos participantes da carteira seja maior que um determinado nível. Dessa forma, ativos que possivelmente seriam excluídos na filtragem prévia podem ser utilizados, aumentando o universo de soluções da seleção da carteira.



Algumas limitantes dessa métrica de liquidez são abordadas por Lo et al. [2003]. Ao ser utilizada a média ponderada como liquidez do portfólio, não está sendo considerada nenhuma interação entre os ativos. A liquidez de um ativo não é afetada pela liquidez de nenhum outro. Além disso, a imposição dessa restrição desconsidera o valor monetário dos portfólios formados, sendo analisado apenas o peso em cada um dos ativos. Portfólios com valores financeiros elevados possuem maior dificuldade de liquidação.

A utilização apenas dessa restrição de liquidez pode gerar escolhas por ativos pouco líquidos para a formação da carteira, devido ao seu alto retorno. Esses ativos com baixa liquidez são respaldados pela inclusão de ativos muito líquidos. Esse efeito na formação da carteira pode ser muitas vezes não desejável.

### 2.2.3. Restrição por ativos individuais

Nessa restrição é levado em consideração o valor financeiro alocado em cada ativo que faça parte da carteira. O valor máximo alocado em um determinado ativo é dependente de sua liquidez. Dessa forma, um ativo terá menos valor alocado caso sua liquidez for baixa.

Em Pereira et al. [2015] foi imposta uma restrição por ativos individuais na qual o valor monetário de um ativo é limitado por sua liquidez. Nesta restrição é inserida a constante  $\beta$  que multiplica a liquidez. Esta constante considera parâmetros de normas brasileiras para controle de liquidez. A restrição está demonstrada na equação 2.

$$x_i.VTC \leq \beta.l_i \quad (2)$$

## 3. Metodologia

Em Lo et al. [2003] é realizado um teste, comparando três medições de liquidez: taxa de turnover, volume negociado e *bid-ask spread*. Foi constatada grande correlação entre as três medidas. Portanto, no presente artigo foi escolhido o volume financeiro negociado como medida de liquidez pela facilidade de obtenção e manipulação dos dados. Em Pereira et al. [2015], onde é utilizado o volume monetário, é feita uma comparação de três medições de liquidez utilizando o volume: média móvel de 5 dias, média móvel de 30 dias e decaimento exponencial simples. Foi constatada grande correlação entre as três medidas. Para o presente trabalho foi escolhida a média móvel de 30 dias, pois apesar da alta correlação com as demais medidas, foi a medida que apresentou menores valores para percentual liquidado da carteira em Pereira et al. [2015].

### 3.1. O Modelo de Mínima Variância

O modelo tem como objetivo a minimização do risco da carteira. Este risco será medido pela variância dos ativos participantes do portfólio, dado um retorno mínimo exigido. A variância da carteira é calculada levando em consideração a interação entre os ativos, medida pela covariância. A função objetivo a ser minimizada pode ser escrita como:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \cdot \sigma_{ij} \quad (3)$$

Onde  $x_i$  é o peso alocado no ativo  $i$ ,  $\sigma_{ij}$  é a covariância dos retornos entre o ativo  $i$  e o ativo  $j$ , em uma carteira formada por  $N$  ativos.

As restrições são apresentadas abaixo. É adotado que todo o capital disponível será utilizado, ou seja, a soma dos pesos de todos os ativos que formam a carteira é igual a um. Como premissa, por simplificação, não serão consideradas vendas à descoberto. Portanto os pesos de todos os ativos deverão ser maiores ou iguais a zero. Também por simplificação, não será considerado retorno exigido para a carteira formada.



$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (4)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall x \quad (5)$$

Após testes iniciais foi constatado um elevado tempo de processamento. Para tornar possível a realização dos testes desejados foi necessário a utilização de uma adaptação do modelo original de Markowitz, que aprimora o desempenho computacional. Foram construídas no total mais de 17 mil carteiras, variando o tempo de processamento de 30 segundos, podendo chegar a mais de 10 minutos em alguns casos para a formação de cada carteira. Isso se deve à complexidade da restrição imposta. Foi imposto um limite máximo de tempo para a tentativa de formação de carteiras. Ao chegar aos 10 minutos o procedimento é interrompido e a carteira não é formada. Apesar da imposição do modelo adaptado e do limite de tempo foi observado um elevado tempo computacional para a realização de todos os testes desejados.

A adaptação do modelo original de Markowitz utilizada, visando aprimorar o desempenho computacional, é proposta em Filomena e Lejeune [2012]. A função objetivo, juntamente com a restrição imposta ao modelo, estão demonstrados nas equações 6 e 7, respectivamente

Função Objetivo:

$$\min \frac{1}{\text{card}(T)} \cdot \sum_{t=1}^T y_t^2 \quad (6)$$

sujeito à:

$$y_t = \sum_{i=1}^N d_{i,t} \cdot x_i \quad (7)$$

### 3.2. Restrição de Liquidez

A restrição proposta neste modelo tem como objetivo flexibilizar a restrição imposta em Pereira et al. [2015], onde todos os ativos tem seu peso máximo limitado por sua liquidez multiplicada pelo  $\beta$ . Foi considerada a análise de cada ativo, individualmente quanto ao que é possível ser liquidado. As duas possibilidades possíveis de liquidação para cada ativo são: liquidar todo o valor alocado no ativo ou liquidar o valor possível de ser liquidado. Na prática ocorre a possibilidade na qual apresenta o menor valor monetário. Portanto, para cada ativo, foi considerado o mínimo entre o valor alocado e o valor possível de ser liquidado do mesmo. Dessa forma a liquidação da carteira é o somatório do mínimo entre as duas possibilidades acima descritas de cada ativo. Ao se considerar o mínimo de cada ativo e posteriormente somando para todos os ativos se reduz o valor máximo da carteira permitido, garantindo, teoricamente, que será liquidado o valor desejado.

$$VTC.pnvl_{min} \leq \sum_i \min[x_i.VTC; pl_{max}.ppzo_{max}.l_i] \quad (8)$$

### 4. Testes Empíricos

Foram realizados testes, comparando resultados entre o modelo com restrição de liquidez e o modelo sem restrição. Foram considerados quatro intervalos diferentes de formação de carteiras, sendo eles 1 dia, 20 dias, 40 dias e 60 dias. Em cada um dos intervalos foram utilizados três valores monetários para as carteiras formadas. Foram formadas carteiras de 1 milhão, 10 milhões e 100 milhões





Tabela 1: Teste 1, sem restrição de liquidez

Intervalo	VTC (R\$)	% liquidada	Desv Pad	N ativos	Ret med	N portfólios
20 dias	1E+06	38,11%	1,18E-01	45,8	-0,049	106
20 dias	1E+07	19,85%	8,57E-02	45,8	-0,049	106
20 dias	1E+08	7,30%	4,69E-02	45,8	-0,049	106
40 dias	1E+06	37,95%	1,28E-01	45,9	-0,026	53
40 dias	1E+07	19,82%	8,84E-02	45,9	-0,026	53
40 dias	1E+08	7,28%	4,76E-02	45,9	-0,026	53
60 dias	1E+06	37,11%	1,19E-01	46,6	-0,019	36
60 dias	1E+07	19,23%	8,29E-02	46,6	-0,019	36
60 dias	1E+08	7,03%	4,57E-02	46,6	-0,019	36

de reais. Nos testes com restrição de liquidez adotaram-se os valores de 30%, 50%, 70% e 100% para o nível de liquidação aceitável da carteira formada. Em todos os testes não foi considerado retorno exigido para a carteira. O objetivo é encontrar a carteira de mínima variância, qualquer que seja o seu retorno.

Para a análise das carteiras formadas com um intervalo de apenas um dia não foi possível ser utilizada toda a amostra devido ao elevado tempo de processamento que seria necessário. Optou-se por extrair três amostras de 250 dias cada, em períodos diferentes, sendo uma delas no início do período, outra relativamente na parte média e a terceira no final do período com dados disponíveis. Portanto foram estudadas três amostras de 250 dias cada, com formação de carteira com o intervalo de 1 dia.

Devido ao tempo de processamento variar e em alguns casos chegar a valores muito elevados, foi necessário impor um tempo limite para seja encontrada uma solução. Foi imposto um tempo limite de 10 minutos para a formação de cada carteira. Caso o tempo seja atingido e a carteira ainda não estiver formada o processo será interrompido, seguindo para a próxima carteira a ser formada.

Em cada um dos testes são analisados: o percentual liquidado médio, entre todas as carteiras formadas, o número de dias em que foi possível formação de carteira, o retorno médio entre todas as carteiras formadas, o número médio de ativos participantes e o risco da carteira formada. Foram utilizadas três medições de previsão de volatilidade diferentes: um modelo de GARCH(1,1) e através de EWMA com parâmetro 0,94, além do desvio padrão amostral da carteira formada.

Para a composição da base de dados do trabalho serão utilizados preços de fechamentos e volume monetário negociado, ambos na frequência diária. Serão obtidos estes dados para ativos de empresas listadas na BM&FBOVESPA através do software Economática. A amostra inicial possui 610 ativos, no período entre 01/01/2007 e 02/08/2016. Foram retirados da amostra ativos com menos de 80% de dados disponíveis no período de análise. Foram removidas ações duplicadas de uma mesma empresa, deixando apenas um ativo por empresa (o ativo com maior volume negociado). Após a filtragem 252 ativos permaneceram na amostra. Sendo retirados os feriados e datas com dados indisponíveis a amostra possui 2370 dias.

#### 4.1. Resultados

##### 4.1.1. Teste 1: Intervalos de formação de carteiras de 20, 40 e 60 dias

Os resultados de porcentagem liquidada média, juntamente com seu desvio padrão, número de carteiras formadas, número médio de ativos participantes e retorno anualizado médio, para carteiras formadas sem restrições de liquidez são demonstrados na Tabela 1. As carteiras formadas neste caso não dependem do valor da carteira estipulado. Para os três valores de carteira analisados as carteiras formadas são idênticas no que diz respeito à porcentagem alocada em cada ativo.

Foi observado um comportamento parecido para os três intervalos analisados. No intervalo de formação de carteiras de 20 dias foram observadas, para valores de carteira de R\$ 1



Tabela 2: Previsões de volatilidade no teste 1, sem restrição de liquidez

Intervalo	Desvio Padrão	GARCH	EWMA
20 dias	0,0648	0,0704	0,0763
40 dias	0,0649	0,0784	0,0960
60 dias	0,0650	0,0921	0,1036

Tabela 3: Intervalo de 20 dias, com restrição de liquidez

Intervalo	VTC (R\$)	% liquidada	Desv Pad	N ativos	Ret med	N portfólios
0,3	1E+06	50,29%	1,0E-01	48,21	-0,0405	106
0,3	1E+07	29,37%	3,0E-02	52,48	-0,0319	106
0,3	1E+08	28,12%	1,5E-02	70,70	-0,0192	106
0,5	1E+06	54,29%	7,1E-02	50,44	-0,0444	106
0,5	1E+07	46,79%	2,7E-02	66,36	-0,0049	106
0,5	1E+08	46,52%	2,2E-02	83,97	0,0330	106
0,7	1E+06	65,80%	4,9E-02	57,62	-0,0055	106
0,7	1E+07	64,74%	3,5E-02	74,20	0,0375	106
0,7	1E+08	64,99%	3,0E-02	90,54	0,0677	106
1	1E+06	90,44%	5,8E-02	61,05	0,0458	105
1	1E+07	92,24%	4,2E-02	65,33	0,0896	104
1	1E+08	92,37%	4,3E-02	70,59	0,0116	106

milhão, R\$ 10 milhões e R\$ 100 milhões percentagens liquidadas médias de 38,11%, 19,85% e 7,3%, respectivamente. Como esperado, quanto maior o valor da carteira, menor foi sua liquidez. Comparando diferentes intervalos os resultados foram muito parecidos, tendo uma leve redução na liquidez conforme se aumenta o número de dias no intervalo.

Os resultados para previsão de volatilidade no dia da liquidação estão apresentados na Tabela 2. O desvio padrão se mostrou muito parecido nos três casos. As previsões realizadas através de GARCH e EWMA apresentaram volatilidades com valores mais elevados.

Para os casos com presença de restrições na liquidez no modelo os resultados foram divididos pelo intervalo de formação das carteiras. Na Tabela 3 estão apresentados resultados para os intervalos de 20 dias. Já os resultados para previsões de volatilidade são demonstrados a Tabela 4. Os resultados para os intervalos de 40 e 60 dias foram muito semelhantes.

Tabela 4: Previsões de volatilidade para o intervalo de 20 dias, com restrição de liquidez

pnl	VTC (R\$)	Desvio Padrão	GARCH	EWMA
0,3	1E+06	0,065	0,074	0,087
0,3	1E+07	0,067	0,077	0,087
0,3	1E+08	0,074	0,083	0,092
0,5	1E+06	0,067	0,075	0,088
0,5	1E+07	0,073	0,081	0,091
0,5	1E+08	0,093	0,103	0,107
0,7	1E+06	0,070	0,080	0,089
0,7	1E+07	0,087	0,096	0,100
0,7	1E+08	0,121	0,132	0,129
1	1E+06	0,088	0,101	0,102
1	1E+07	0,118	0,134	0,125
1	1E+08	0,178	0,197	0,177





Tabela 5: Teste 2, sem restrição de liquidez

Intervalo	VTC (R\$)	% liquidada	Desv Pad	N ativos	Ret med	N portfólios
Amostra 1	1E+06	30,89%	12,93%	30,0	-1,14E-03	250
	1E+07	12,35%	7,48%	30,0	-1,14E-03	250
	1E+08	2,01%	1,99%	30,0	-1,14E-03	250
Amostra 2	1E+06	28,69%	9,04%	26,3	3,75E-04	250
	1E+07	15,58%	6,97%	26,3	3,75E-04	250
	1E+08	4,99%	2,94%	26,3	3,75E-04	250
Amostra 3	1E+06	32,17%	6,89%	61,6	7,78E-04	250
	1E+07	17,28%	4,63%	61,6	7,78E-04	250
	1E+08	9,01%	2,43%	61,6	7,78E-04	250

Comparando os testes foi observado um aumento no percentual liquidado médio das carteiras com presença de restrição de liquidez. Foi observada uma liquidação média, nos casos com restrição, que se aproxima do nível de liquidação aceitável (pnvl), inserido no modelo. Em todos os casos a liquidação média ficou próxima ao nível de liquidação aceitável, porém sempre um pouco abaixo, devido ao período entre a formação da carteira e a sua venda. Analisando o percentual liquidado e os diferentes valores de carteira analisados não foram observadas diferenças significativas para os diferentes valores de carteira, nos casos em que a carteira está totalmente restrita. Com exceção dos casos em que a restrição de liquidez não está ativa, o percentual liquidado não mostrou depender do valor da carteira estipulado. Foi observado um aumento no número de ativos participantes no modelo com restrição de liquidez, como previsto. Foi constatado também um aumento no número de ativos participantes para carteiras com valores elevados. Analisando o risco das carteiras formadas com restrição de liquidez, observou-se um aumento no mesmo, como esperado, comparado com as carteiras formadas sem restrição de liquidez. Quanto mais restrito é o problema, maior é o risco encontrado. Desta forma, quanto maior é o nível de liquidação aceitável ou quanto maior o valor da carteira definido, mais restrito é o problema, aumentando o risco da carteira formada.

#### 4.1.2. Teste 2: Intervalo de formação de carteiras de 1 dia

No segundo teste realizado o intervalo de formação de carteiras é de apenas um dia. A carteira é formada e no dia seguinte liquidada. Devido ao custo computacional, não foi possível utilizar toda a amostra disponível, de 2370 dias, como realizado no Teste 1. Foram consideradas então três amostras de 250 dias cada para a realização do Teste 2. As três análises realizadas na presente seção são equivalentes, sendo alterado apenas o período de análise. A amostra 1 corresponde ao período entre Janeiro de 2009 e Janeiro de 2010, a amostra 2 possui o período entre Setembro de 2011 e Setembro de 2012 e a amostra 3 corresponde ao período entre Julho de 2015 e Julho de 2016. As três amostras foram analisadas de forma independente. Os resultados para carteiras formadas sem restrição estão apresentados na Tabela 5.

Os percentuais liquidados médios foram semelhantes nas três amostras analisadas. A amostra 3 apresentou maior liquidação e menor risco, tendo um número de ativos participantes consideravelmente maior. A amostra 1 apresentou os menores percentuais liquidados, para os dois maiores valores de carteira estudados, 10 milhões e 100 milhões de reais. Para o maior valor de carteira considerado (R\$: 100 milhões) o percentual liquidado médio foi sempre abaixo de 10%. Já para as carteiras com o valor de R\$: 1 milhão, a liquidação média ficou em torno de 30%. Foi observado que carteiras com valor elevado apresentaram menor liquidação, como era previsto. As carteiras formadas nas amostras 1 e 2 apresentaram número de ativos participantes semelhantes. Porém, apesar de apresentar liquidação próxima às demais amostras, na amostra 3 o número médio de ativos participantes foi de 61,6, muito superior ao resultado das demais amostras.

A Tabela 6 mostra os resultados para a média do risco encontrado na amostra analisada para as três medições realizadas. A amostra 1 apresentou risco consideravelmente mais alto que as



Tabela 6: Previsões de volatilidade no teste 2, sem restrição de liquidez

	Desvio Padrão	GARCH	EWMA
Amostra 1	0,1037	0,1120	0,0894
Amostra 2	0,0578	0,0604	0,0570
Amostra 3	0,0452	0,0484	0,0458

Tabela 7: Amostra 1 com restrição de liquidez

Intervalo	VTC (R\$)	% liquidada	Desv Pad	N ativos	Ret med	N portfólios
0,3	1E+06	43,61%	11,18%	38,7	8,68E-07	250
0,3	1E+07	30,07%	1,13%	53,3	-3,95E-07	250
0,3	1E+08	29,72%	0,26%	74,2	-1,23E-06	250
0,5	1E+06	52,71%	5,11%	42,6	-2,47E-06	250
0,5	1E+07	49,50%	0,40%	64,0	-4,44E-06	250
0,5	1E+08	49,56%	0,36%	95,3	-4,86E-06	250
0,7	1E+06	69,78%	2,26%	49,6	3,45E-06	250
0,7	1E+07	69,29%	0,48%	69,2	2,09E-06	250
0,7	1E+08	69,42%	0,44%	103,6	1,28E-06	250
1	1E+06	99,00%	0,89%	50,9	-4,25E-06	250
1	1E+07	98,95%	0,57%	63,1	1,21E-05	245
1	1E+08	99,25%	0,57%	81,6	-9,80E-07	244

outras amostras, possivelmente devido ao período de análise desta amostra, no qual o país passava por alta turbulência econômica. As previsões de volatilidade através dos três métodos ficaram próximas em todos os casos.

Os resultados para o modelo com restrições de liquidez estão demonstrados em tabelas, sendo cada tabela para cada amostra analisada. A Tabela 7 mostra os resultados para a amostra 1. Resultados para as amostras 2 e 3 se mostraram semelhantes.

Semelhante ao teste 1, as porcentagens liquidadas médias se mostraram próximas ao nível aceitável de liquidação. Porém, com o intervalo entre formação de carteira e liquidação da mesma de apenas um dia resultaram em maior proximidade entre porcentagem liquidada e nível aceitável de liquidação, quando comparado com intervalos de 20, 40 e 60 dias. Em alguns casos, quando a restrição de liquidez se mostra inativa, a porcentagem liquidada chega a ser maior do que o nível aceitável. Comparando o nível de liquidação aceitável com o número de ativos formadores da carteira observou-se uma tendência de aumento do número de ativos com o aumento do nível aceitável de liquidação.

Dos 250 dias em que carteiras foram formadas, em cada amostra, foi possível a formação de carteira em praticamente todos os casos. Porém, em alguns poucos casos a carteira ótima não foi encontrada, devido ao tempo limite de tentativa de solução se esgotar. Na amostra 1 o tempo limite foi atingido em 11 carteiras. Na amostra 2 ocorreu em 5 carteiras e na amostra 3 em 15 carteiras. Em todos os casos de tempo limite atingido o nível de liquidação aceitável é de 100%. Com o problema mais restrito a dificuldade computacional se mostra mais elevada.

A porcentagem liquidada não mostrou depender do valor da carteira formada, para os casos em que a restrição de liquidez se mostra ativa. Em todos os casos a porcentagem liquidada se mostrou próximo ao nível de liquidez, independente do valor da carteira atribuído. Porém, foi observado um aumento no número de ativos participantes para carteiras com maior valor.

A Tabela 8 apresenta os resultados para o risco médio encontrado nas carteiras formadas. Novamente, os resultados foram semelhantes aos resultados do teste 1. Analisando as 3 diferentes medições de risco foi observado um aumento no risco no aumento do nível de liquidação aceitável.



Tabela 8: Previsões de volatilidade na amostra 1, com restrição de liquidez

pnl	VTC (R\$)	Desvio Padrão	GARCH	EWMA
0,3	1E+06	0,104	0,112	0,090
0,3	1E+07	0,110	0,120	0,089
0,3	1E+08	0,129	0,140	0,099
0,5	1E+06	0,107	0,117	0,091
0,5	1E+07	0,127	0,138	0,097
0,5	1E+08	0,177	0,189	0,127
0,7	1E+06	0,118	0,129	0,095
0,7	1E+07	0,156	0,165	0,111
0,7	1E+08	0,245	0,256	0,167
1	1E+06	0,158	0,174	0,121
1	1E+07	0,216	0,230	0,145
1	1E+08	0,369	0,367	0,244

Para a amostra 1, fixando o valor da carteira em R\$: 10 milhões, temos um aumento do desvio padrão de 0,11, quando o nível está em 30%, chegando a 0,216 quando o nível está em 100%. Já no modelo sem restrição de liquidez o valor fica em 0,108. Portanto é observado um aumento do risco da carteira formada ao tornar ativa a restrição de liquidez inserida. Assim, sendo elevado o percentual liquidado médio de 12,35% para 98,95% foi constatado que o risco passa de 0,108 para 0,216, considerando o desvio padrão. A mesma conclusão vale para as duas demais medidas de risco.

## 5. Considerações Finais

A aplicação de restrição de liquidez em um modelo de seleção de carteiras foi aplicada ao mercado brasileiro. Foram inseridos, na restrição proposta, parâmetros utilizados em normas brasileiras para o controle de liquidez de fundos de investimento. Controles de liquidez passaram a ser realizados mais fortemente por corretoras e bancos a partir de 2012, quando foi publicada pela CVM a instrução que exige implementação de controles efetivos dos níveis de liquidez. Portanto, o modelo adotado no trabalho se mostra adequado para utilização no mercado brasileiro.

O modelo de seleção de carteiras de mínima variância foi utilizado no presente trabalho. Foi encontrada uma grande dificuldade computacional, devido ao grande número de testes realizados e carteiras formadas. Com o objetivo de atenuar essa dificuldade foram realizados alguns procedimentos como inserir tempo limite para tentativa de solução e utilização de um modelo de Markowitz adaptado, proposto em Filomena e Lejeune [2012].

Na análise de resultados foram encontrados níveis de liquidação elevados, na presença da restrição de liquidez imposta, quando comparados aos níveis em casos sem restrição imposta. Os níveis de liquidação obtidos se mostraram próximos aos níveis impostos na restrição de liquidez. Foi observado, através das três medições realizadas, que o risco da carteira formada aumenta na medida que a formação da carteira se torna mais restrita devido a limitações de liquidez dos ativos disponíveis. Essa limitação aumenta com o aumento do nível de liquidez aceitável da carteira e com o valor da carteira formada impostos.

Um estudo mais completo, adicionando custos de transação ao modelo de forma endógena ao modelo pode ser explorado para trabalhos futuros. Pode ser mencionado também, para estudos futuros, a inserção de diferentes retornos exigidos para a carteira, e a maneira como o nível de liquidação obtido é afetado. Resultados podem ser comparados para diferentes modelos de seleção de carteiras. No âmbito computacional, estudos com o objetivo de diminuição de tempo de obtenção de solução se mostram importantes.



## Referências

- Amihud, Y. (2002). Illiquidity and stock returns: cross-section and time-series effects. *Journal of financial markets*, 5(1):31–56.
- Amihud, Y. e Mendelson, H. (1986). Asset pricing and the bid-ask spread. *Journal of financial Economics*, 17(2):223–249.
- Atkins, A. B. e Dyl, E. A. (1997). Transactions costs and holding periods for common stocks. *The Journal of Finance*, 52(1):309–325.
- Brennan, M. J., Chordia, T., e Subrahmanyam, A. (1998). Alternative factor specifications, security characteristics, and the cross-section of expected stock returns. *Journal of Financial Economics*, 49(3):345–373.
- Brennan, M. J. e Subrahmanyam, A. (1996). Market microstructure and asset pricing: On the compensation for illiquidity in stock returns. *Journal of financial economics*, 41(3):441–464.
- Chan, H. W. e Faff, R. W. (2003). An investigation into the role of liquidity in asset pricing: Australian evidence. *Pacific-Basin Finance Journal*, 11(5):555–572.
- Chordia, T., Subrahmanyam, A., e Anshuman, V. R. (2001). Trading activity and expected stock returns. *Journal of Financial Economics*, 59(1):3–32.
- Correia, L. F., Amaral, H. F., e Bressan, A. A. (2008). O efeito da liquidez sobre a rentabilidade de mercado das ações negociadas no mercado acionário brasileiro.
- Datar, V. T., Naik, N. Y., e Radcliffe, R. (1998). Liquidity and stock returns: An alternative test. *Journal of Financial Markets*, 1(2):203–219.
- Demsetz, H. (1968). The cost of transacting. *The quarterly journal of economics*, p. 33–53.
- Filomena, T. P. e Lejeune, M. A. (2012). Stochastic portfolio optimization with proportional transaction costs: convex reformulations and computational experiments. *Operations Research Letters*, 40(3):212–217.
- Gabrielsen, A., Marzo, M., e Zagaglia, P. (2011). Measuring market liquidity: An introductory survey.
- Jacoby, G., Fowler, D. J., e Gottesman, A. A. (2000). The capital asset pricing model and the liquidity effect: A theoretical approach. *Journal of Financial Markets*, 3(1):69–81.
- Jun, S.-G., Marathe, A., e Shawky, H. A. (2003). Liquidity and stock returns in emerging equity markets. *Emerging Markets Review*, 4(1):1–24.
- Lo, A. W., Petrov, C., e Wierzbicki, M. (2003). It's 11pm-do you know where your liquidity is? the mean-variance-liquidity frontier. *The World of Risk Management*, 1(1):47.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1):77–91.
- Marshall, B. R. e Young, M. (2003). Liquidity and stock returns in pure order-driven markets: evidence from the Australian stock market. *International Review of Financial Analysis*, 12(2): 173–188.
- Pereira, G. M., Sant'Anna, L. R., Filomena, T. P., e Becker, J. L. (2015). Restrição de liquidez para modelos de seleção de carteiras (liquidity constraint for portfolio selection models). *Revista Brasileira de Finanças*, 13(2):288.