



## MODELAGEM DE CONTRATOS DE MANUTENÇÃO VIA PROCESSO DE RENOVAÇÃO GENERALIZADO EM UM SISTEMA DE FILAS

Rafael Guilherme Ribeiro do Valle<sup>a</sup>

[rafaelguilherme@hotmail.com](mailto:rafaelguilherme@hotmail.com)

Isis Didier Lins<sup>a</sup>

[isis.lins@ceerma.org](mailto:isis.lins@ceerma.org)

Márcio das Chagas Moura<sup>a</sup>

[marcio@ceerma.org](mailto:marcio@ceerma.org)

Enrique López Droguett<sup>a,b</sup>

[elopezdroguett@ing.uchile.cl](mailto:elopezdroguett@ing.uchile.cl)

<sup>a</sup>Centro de Estudos e Ensaios em Risco e Modelagem Ambiental – Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal de Pernambuco  
Av. da Arquitetura, s/n - Cidade Universitária, Recife - PE, 50740-550

<sup>b</sup>Departamento de Engenharia Mecânica – Universidade do Chile  
Av. Beauchef 851, Santiago, Chile

### RESUMO

Existe uma variedade de pesquisas abordando a modelagem de contratos de manutenção, entretanto são poucas as que consideram os reparos imperfeitos. Neste trabalho, o Processo de Renovação Generalizado (PRG) é usado para caracterizar o processo de falha do equipamento ao longo do tempo. Considerando-se um jogo de Stackelberg, é realizada a modelagem da interação estratégica entre cliente e prestador do serviço de manutenção, o qual dispõe de uma única equipe e possui múltiplos clientes, ocasionando em uma fila, simulada por meio de simulação discreta de eventos envolvendo PRG. Utilizando dados de um angiógrafo, aparelho hospitalar de alto custo, foi realizado um comparativo entre o PRG e outros processos estocásticos mais comumente usados na literatura, o Processo de Renovação (PR) e o Processo Não-Homogêneo de Poisson (PNHP). Os resultados encontrados foram distintos para cada abordagem, indicando a necessidade de considerar o tipo adequado de reparo nas modelagens de contratos de manutenção.

**PALAVRAS-CHAVE.** Contratos de manutenção. Processo de Renovação Generalizado. Simulação discreta de eventos. Teoria das filas. Jogo de Stackelberg.

**Tópicos (Simulação, PO na Área de Saúde).**

### ABSTRACT

There is plenty of research about modelling maintenance contracts, however few consider imperfect repairs. In this work, the Generalized Renewal Process (GRP) is used for the equipment's failure distribution over time. Considering a Stackelberg game, the strategic interaction between customer and service provider is modelled, with the latter having a single maintenance team and multiple clients, causing a queue, simulated by discrete event simulation involving GRP. Based on an angiograph's data, a high-cost hospital equipment, a comparison was made between GRP and other stochastic processes most commonly used in literature, the Renewal Process (RP) and the Non-Homogenous Poisson Process (NHPP). It was obtained different results for each approach, pointing it out the need to consider the appropriate type of repair while modelling maintenance contracts.

**KEYWORDS.** Maintenance contracts. Generalized Renewal Process. Discrete event simulation. Queue theory. Stackelberg game.

**Paper topics (Simulation, OR in Health).**



## 1. Introdução

A tecnologia no setor produtivo está em constante evolução, o que resulta em equipamentos cada vez mais complexos e sofisticados. Apesar de se mostrarem mais eficientes que as ferramentas antigas, estes equipamentos exigem uma maior dedicação quanto à manutenção, principalmente devido à variedade de peças com particularidades diferentes. Desta forma, tornou-se cada vez menos econômico para as empresas criarem o seu próprio setor de manutenção, popularizando a terceirização desta atividade, mais especificamente com o próprio fabricante do equipamento.

Jackson e Pascual [2008] citam cinco vantagens em adotar a política de terceirização da manutenção, dentre elas: (i) contato com especialistas com alto nível de conhecimento na tecnologia referida; (ii) manutenção mais bem-feita devido a *expertise* do prestador do serviço; (iii) possibilidade de contratos com preços fixos, evitando assim grandes riscos de alto custo; (iv) menos capital investido pelo dono do equipamento; (v) mais tempo e esforço para os administradores se dedicarem a outra atividade, já que não precisam se preocupar mais com a manutenção.

A viabilidade de aderir a um contrato ou não é justamente o foco deste trabalho. A modelagem de contratos de manutenção é fortemente relacionada com o conceito de garantia estendida, a qual difere de uma garantia regular por ser uma aquisição opcional na compra do equipamento com custo adicional. Desta maneira, existem duas partes interessadas nas especificações deste contrato: o agente que oferece o serviço de manutenção (e que também é o fabricante, neste caso) e o cliente que é o dono do equipamento em questão.

Um dos modelos mais populares na literatura é o apresentado por Murthy & Azgharizadeh [1998], o qual apresenta um contrato com base na manutenção corretiva e uma multa paga pelo fabricante caso o tempo de reparo seja longo demais. Utilizando um jogo de Stackelberg e de uma função utilidade que considere a aversão ao risco do cliente, o modelo apresentado tem como objetivo encontrar os valores ótimos para o preço da garantia estendida e o preço por manutenção avulsa realizada, de modo a encontrar o equilíbrio entre os dois participantes do jogo. Como o comportamento de falhas e os tempos de reparo de qualquer aparelho possui comportamento aleatório ao longo de sua vida útil, os autores adotam o Processo Homogêneo de Poisson (PHP), ou seja, todas as variáveis são distribuídas exponencialmente.

Em outro trabalho, Murthy & Azgharizadeh [2000] estende sua pesquisa ao considerar que um fabricante pode ter múltiplos compradores, adaptando o modelo para uma fila Markoviana e adicionando mais um objetivo: obter o número ótimo de clientes para o fabricante. Para solucionar algebricamente, algumas simplificações precisaram ser feitas, como considerar que todos os clientes possuem a mesma aversão ao risco, fila única com lógica primeiro a entrar, primeiro a sair (PEPS), o efeito do tempo de espera na fila e o tempo de reparo são desprezados da receita do cliente e, por fim, a soma destes tempos tende a se tornar uma constante para casos em que o tempo da garantia é suficientemente grande.

No âmbito acadêmico, os trabalhos de Murthy & Azgharizadeh foram referência para outros autores, dos quais citam-se Jackson & Pascual [2008] e Guedes et al. [2015]. Apesar de ser um tema bastante explorado, Zaidan [2016] foi o primeiro a utilizar o Processo de Renovação Generalizado (PRG) na estrutura de falhas do equipamento, com as variáveis seguindo uma distribuição Weibull, utilizando conceitos como reparo imperfeito e idade virtual do aparelho. Vale salientar que, devido a impossibilidade de solucionar o modelo algebricamente, tornou-se necessário recorrer ao uso de simulação discreta de eventos para achar os valores esperados das variáveis aleatórias envolvidas. Apesar da inovação no estudo do comportamento de falhas, o trabalho de Zaidan se limita a analisar o modelo somente para um fabricante e um cliente.

Guedes [2016] é outro trabalho que recorre à simulação discreta de eventos para modelar contratos de manutenção, porém fez uso de teoria das filas. A implementação de programa computacional torna desnecessárias algumas das simplificações feitas em Murthy & Azgharizadeh [2000], sendo possível considerar a influência do tempo de espera na fila na receita do cliente e ainda obter dados mais precisos quanto ao tempo referente à multa. Entretanto, a metodologia



empregada na distribuição de falhas sugerida por Guedes foi o Processo de Renovação (PR), o qual considera as variáveis aleatórias seguindo uma distribuição Weibull com reparo perfeito.

Neste trabalho, objetiva-se dar continuidade à linha de pesquisa de Zaidan [2016], adotando o PRG para descrever o comportamento de falhas do equipamento, mas com o propósito também de achar o número ótimo de clientes para o fabricante, aproveitando o uso da simulação discreta de eventos na linguagem de programação C/C++ para considerar os efeitos da fila.

O artigo está organizado da seguinte maneira: a Seção 2 contém uma breve fundamentação teórica com conceitos básicos sobre o Jogo de Stackelberg, o PRG e simulação discreta de eventos; na Seção 3, é feita uma apresentação das variáveis do modelo e do método utilizado para resolução; a Seção 4 mostra a aplicação do modelo com os dados do angiógrafo, contendo uma análise de sensibilidade do parâmetro de aversão ao risco; e por fim, uma conclusão dos resultados obtidos e sugestões para trabalhos futuros.

## 2. Fundamentação Teórica

### 2.1. Teoria dos Jogos e o Jogo de Stackelberg

São 4 quatro componentes que caracterizam um jogo, sendo eles: os jogadores (os decisores), as alternativas possíveis para eles, os objetivos relacionados a cada uma das alternativas e o conhecimento acerca da estrutura do jogo no qual os jogadores estão inseridos [Greve 2015]. O objetivo do jogador é escolher a alternativa que forneça o maior retorno esperado, sendo normalmente dado em escala ordinal ou intervalar, e que depende da ação de todos os jogadores envolvidos no jogo. A informação que os participantes possuem sobre o jogo tem forte influência na tomada de decisão. Um jogo é de informação perfeita quando os jogadores conhecem todas as decisões passadas realizadas pelos outros participantes, sendo o contrário definido como informação imperfeita. Um jogo de informação completa define-se quando os jogadores conhecem todos os participantes, o conjunto de estratégias possíveis e os *payoffs* associados, sendo o oposto dito como informação incompleta [Fiani 2009].

O jogo de Stackelberg é caracterizado por ser um jogo sequencial com informação perfeita e completa, ou seja, os jogadores estão cientes de todos os aspectos do jogo à medida em que ele ocorre [Gibbons 1992]. O jogo original possui dois participantes, sendo o primeiro a tomar a decisão o líder/dominante, enquanto o segundo é o seguidor/dominado. A solução deste jogo é dada pelo artifício da indução retroativa, em que primeiro se resolve o problema de decisão do seguidor e se incorpora o resultado na função lucro do líder, obtendo-se assim a solução ótima [Gibbons 1992]. Em outras palavras, este artifício consiste em antecipar o comportamento ótimo do seguidor para cada uma das alternativas possíveis do líder, possibilitando assim o maior retorno possível. O jogo de Stackelberg se destaca principalmente por demonstrar algebricamente que o equilíbrio do jogo sempre se encontrará a favor do jogador líder, o que toma a decisão primeiro.

### 2.2. Reparo imperfeito e o Processo de Renovação Generalizado (PRG)

Segundo Yanez [2002], o estado de desempenho de um sistema após sofrer uma ação de reparo ou manutenção possui, em geral, as seguintes categorias: (i) Reparo Perfeito – “tão bom quanto novo”; (ii) Reparo Imperfeito – “pior do que novo, mas melhor do que velho”; (iii) Reparo Mínimo – “tão ruim quanto velho”.

Quando se trata de descrever o comportamento de falhas de equipamentos, o mais comum de se ver na literatura é a adoção de modelos probabilísticos como o Processo de Renovação (PR) e o Processo Não Homogêneo de Poisson (PNHP), referentes ao reparo perfeito e mínimo, respectivamente. Por mais que dependa do contexto, os dois métodos podem ser considerados como visões extremas da eficiência da manutenção, visto que, devido a limitações técnicas e econômicas, é raro observar situações onde o equipamento volte tão bom quanto proposto pelo PR, da mesma forma que é extremamente pessimista pensar que o aparelho volte da mesma maneira que estava antes da falha, como o PHNP propõe [Moura 2007].



Com o objetivo de abranger os tipos de reparo possíveis, Kijima & Sumita [1986] propuseram um modelo probabilístico chamado Processo de Renovação Generalizado (PRG), que abrange o conceito de idade virtual do sistema. Adota-se um parâmetro de rejuvenescimento  $q$  necessário para avaliar o grau de eficácia de uma ação de reparo, sendo: (i)  $q = 1$ : Reparo Perfeito; (ii)  $0 < q < 1$ : Reparo Imperfeito; (iii)  $q = 0$ : Reparo Mínimo.

O modelo Kijima tipo I, que será utilizado neste trabalho, define idade virtual pela seguinte equação:

$$x_i = x_{i-1} + q * (t_i - t_{i-1}) = q * t_i \quad (1)$$

sendo  $x_i$  a idade virtual após a  $i$ -ésima ação de reparo e  $t_i$  o instante de tempo em que ocorre a  $i$ -ésima falha.

Na Figura 1, é possível observar graficamente a relação entre as idades reais e virtuais. Nota-se que, inicialmente, não há diferença entre as duas até ocorrer a primeira ação de reparo. No caso  $q = 0$ , a idade virtual sempre retornará a zero no instante logo após o reparo, enquanto que para  $q = 1$ , ele retorna do mesmo jeito que estava no instante anterior.

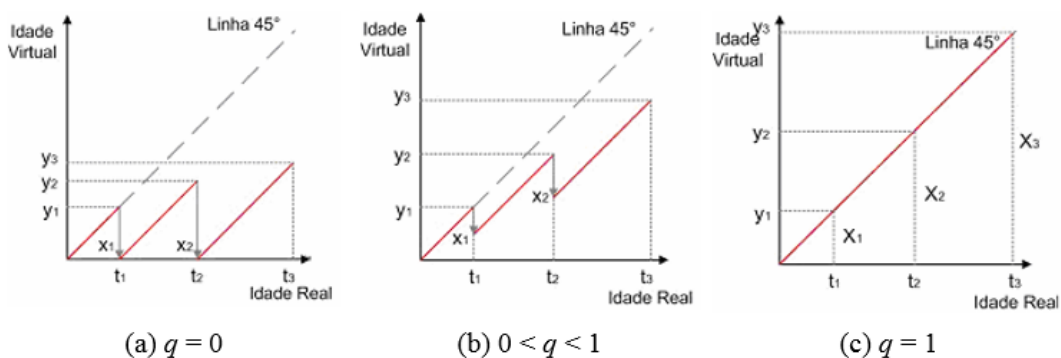


Figura 1 – Relação entre idade real e virtual  
Fonte: [Moura 2007]

Desta forma, para um equipamento que segue um PRG, o que influencia no tempo das falhas subsequentes é a idade virtual, ao invés da real. No caso de equipamentos complexos, que costumam ter função intensidade de falha crescente com o tempo, há uma queda cada vez que uma falha ocorre, causando uma descontinuidade.

### 2.3. Simulação Monte Carlo, Simulação Discreta de Eventos e Geração de Variáveis Aleatórias

Simulação é a experimentação de um sistema real através de modelos [Bateman et al. 2013]. Trata-se de uma ferramenta que permite o estudo mais aprofundado do comportamento de sistemas mais complexos, em especial os casos em que é impossível obter uma solução analítica. O método de Monte Carlo se baseia em amostragens massivas para alcançar resultados numéricos, ou seja, é necessário replicar o modelo simulado múltiplas vezes para obter valores mais robustos e próximos da realidade. Não existe uma quantidade padrão de replicações, visto a variedade de modelos existentes, cabendo ao operador definir o número ideal para o seu caso.

Segundo Albrecht [2010], a simulação discreta de eventos (SDE) é uma abordagem que utiliza modelos matemáticos para representar um sistema físico que sofre alterações em determinados instantes de tempo. Ross [2006] afirma que os dois elementos principais de uma SDE são as variáveis e os eventos. As variáveis possuem três tipos de classificação: (i) variáveis de tempo T: tempo de simulação passado; (ii) contadores: contam a quantidade de vezes que um evento acontece ao longo do tempo T; (iii) variáveis de estado: mostram o estado do sistema no tempo T. Os eventos podem ser definidos como uma alteração no estado do sistema em um instante de tempo T, no caso de um equipamento falho para manutenção, exemplo desta pesquisa, eles podem ser caracterizados como uma falha ou um reparo realizado.



A geração de variáveis aleatórias envolvendo métodos e procedimentos computacionais tem como objetivo produzir números aleatórios independentes que mantenham as características da distribuição de probabilidade em questão. O método da transformada inversa, adotado para este trabalho, consiste em gerar um valor  $U$  uniformemente distribuído entre 0 e 1 que corresponda ao valor  $F(x)$  da função de distribuição acumulada (FDA). Desta maneira, para encontrar o valor de  $x$ , só basta achar a inversa de  $F(x)$ , como mostra a Figura 2.

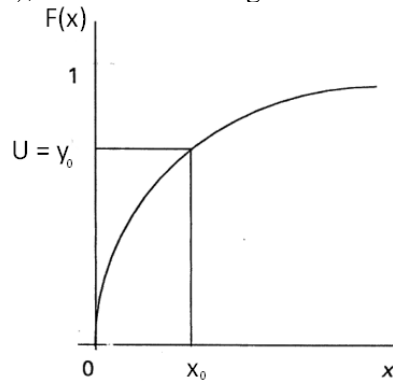


Figura 2 – Ilustração do método da transformada inversa

É importante ressaltar que não é para todas as distribuições de probabilidade que este método pode ser aplicado, já que algumas não podem ser integradas analiticamente. No entanto, para esta pesquisa, o método será empregado nas distribuições Exponencial e Weibull, sendo ambas possíveis de se isolar o  $x$ , pelas equações:

$$x = -\frac{\ln U}{\lambda} \quad (2)$$

$$x = \alpha * (-\ln U)^{\frac{1}{\beta}} \quad (3)$$

sendo  $\lambda$  o parâmetro da Exponencial e  $\alpha$  e  $\beta$  os parâmetros da Weibull.

### 3. Modelagem matemática

O modelo utilizado é o mesmo apresentado por Murthy & Azgharizadeh [2000]. Cada cliente possui três alternativas de decisão: (i) não comprar o equipamento ( $A_0$ ); (ii) comprar o equipamento com garantia estendida ( $A_1$ ); e (iii) comprar o equipamento sem a garantia estendida ( $A_2$ ). O aparelho possui um preço de venda  $Cb$ , o preço da garantia estendida é  $P$  e o preço por manutenção avulsa é  $Cs$ . É considerada somente a possibilidade de manutenção corretiva e que, quando em estado de falha, o aparelho se encontra totalmente inativo. Para a função lucro do cliente, interessa saber o valor  $R$  correspondente à receita que ele recebe por hora de funcionamento do aparelho. Caso ele opte por  $A_1$ , também interessa saber o quanto de multa ele receberá do fabricante caso seja necessário um tempo de reparo maior que um tempo limite pré-especificado  $\tau$ . O montante da multa corresponde a um valor  $\theta$  por tempo excedente. O tempo de duração do contrato é dado por  $L$ .

Assim sendo, a função lucro de cada cliente pode ser expressa na seguinte forma:

$$w(A_k) = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0 \\ RH + \theta T - Cb - P, & \text{se } k = 1 \\ RH - Cb - CsN, & \text{se } k = 2 \end{cases} \quad (4)$$

com as seguintes variáveis aleatórias:

- $H$  = tempo operacional da máquina =  $L - \sum_{i=1}^N y_i$ , sendo  $y_i$  o tempo entre a  $i$ -ésima falha até o fim do seu reparo.

- $T$  = tempo acumulado de multa =  $\sum_{i=1}^N \max\{0, y_i - \tau\}$

- $N$  = número de falhas ao longo de período entre  $[0, L)$ .

Já para a função lucro do fabricante, considera-se também o custo unitário para o fabricante realizar o reparo, chamado de  $Cr$ , e o número  $M$  de clientes que compraram o aparelho:



$$\pi(P, C_s, M; A_k) = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0 \\ \sum_{j=1}^M [P - CrN_j - \theta T_j], & \text{se } k = 1 \\ \sum_{j=1}^M [(Cs - Cr)N_j], & \text{se } k = 2 \end{cases} \quad (5)$$

sendo  $N_j$  e  $T_j$  o número de falhas e o tempo acumulado de multa referente ao  $j$ -ésimo cliente, respectivamente.

Com o objetivo de tornar o modelo mais realista, Murthy & Azgharizadeh [2000] utilizam uma função utilidade para contemplar o grau de aversão ao risco  $\gamma$  do cliente, demonstrada a seguir:

$$U(w) = \frac{1 - e^{-\gamma w}}{\gamma} \quad (6)$$

A vantagem de utilizar esta função pode ser observada ao analisar que quando o parâmetro  $\gamma$  tende a zero, ou seja, o cliente é neutro ao risco,  $U(w) = w$ . À medida que o parâmetro cresce, o nível de aversão ao risco também aumenta. Outra vantagem é vista quando  $w = 0$ ,  $U(w)$  também é nula. Para simplificar a resolução do modelo, foi considerado neste trabalho que todos os clientes do mesmo fabricante possuem o mesmo comportamento em relação ao risco, de forma que eles obtenham a mesma alternativa ótima de solução.

### 3.1. Resolução do modelo

Conforme mencionado anteriormente, a solução do jogo de Stackelberg é dada pela indução retroativa, sendo então necessário resolver primeiro a solução ótima do cliente, classificado como seguidor no jogo. A escolha do fabricante como líder do jogo é justificada no contexto de manutenção de equipamentos complexos, visto que ele possui maior poder de barganha, além da concorrência não costumar ser grande para aparelhos tão sofisticados.

Desta forma, a decisão ótima do cliente será o maior valor esperado entre as utilidades de cada uma das alternativas de decisão, dado um conjunto de  $P$ ,  $C_s$  e  $M$ .

$$E[U(A_0|P, C_s, M)] = E[U(w(A_0))] = E[U(0)] = 0 \quad (7)$$

$$E[U(A_1|P, C_s, M)] = E[U(w(A_1))] = E[U(RH + \theta T - Cb - P)] = \left(\frac{1}{\gamma}\right) [1 - (e^{\gamma(Cb+P)} * E[e^{-\gamma(RH + \theta T)}])] \quad (8)$$

$$E[U(A_2|P, C_s, M)] = E[U(w(A_2))] = E[U(RH - Cb - C_s N)] = \left(\frac{1}{\gamma}\right) [1 - (e^{\gamma Cb} * E[e^{-\gamma(RH - C_s N)}])] \quad (9)$$

O número  $M$  de clientes possui grande influência na decisão ótima do fabricante. Dado que a função lucro é um somatório do lucro individual com cada cliente, é intuitivo pensar que o ponto ótimo só aumenta em função de  $M$ , entretanto um número muito alto de clientes tende a aumentar o tempo de espera na fila, o que gera menor receita para o cliente e valores mais altos com multa a serem pagos pelo fabricante.

Desta forma, o objetivo do fabricante é definir  $P^*(M)$  e  $C_s^*(M)$ , ou seja, valores ótimos de  $P$  e  $C_s$  para um dado  $M$ , de modo a maximizar o seu lucro. Estes valores podem ser obtidos igualando a utilidade do cliente a zero para cada alternativa de decisão correspondente, e assim estabelecer o valor máximo que o cliente está disposto a pagar sem optar por não comprar o equipamento (o estudo mais detalhado desta relação pode ser visto em Murthy & Asgharizadeh [1998]). Resumidamente, o fabricante possui três alternativas ótimas de decisão:

- $P > P^*(M)$  e  $C_s > C_s^*(M)$ , fazendo o cliente escolher a alternativa  $A_0$
- $P = P^*(M)$  e  $C_s > C_s^*(M)$ , fazendo o cliente escolher a alternativa  $A_1$
- $P > P^*(M)$  e  $C_s = C_s^*(M)$ , fazendo o cliente escolher a alternativa  $A_2$

Assim sendo, a dedução de  $P^*(M)$  e  $C_s^*(M)$  podem ser obtidas a partir das seguintes expressões:

$$E[U(A_1|P^*(M), C_s, M)] = \left(\frac{1}{\gamma}\right) [1 - (e^{\gamma(Cb+P^*(M))} * E[e^{-\gamma(RH + \theta T)}])] = 0 \quad (10)$$

$$E[U(A_2|P, C_s^*(M), M)] = \left(\frac{1}{\gamma}\right) [1 - (e^{\gamma Cb} * E[e^{-\gamma(RH - C_s^*(M) N)}])] = 0 \quad (11)$$





É possível isolar  $P^*(M)$  de forma analítica, obtendo a expressão (12), porém o mesmo não acontece para  $Cs^*(M)$ , com forma mais simplificada na equação (13), sendo necessário o uso de métodos numéricos para obter o seu valor aproximado. O método escolhido neste trabalho foi o da bisseção, descrito em Hillier & Lieberman [2006].

$$P^*(M) = \frac{-\ln E[e^{-\gamma(RH + \theta T)}]}{\gamma} - Cb \quad (12)$$

$$\ln E[e^{-\gamma(RH - Cs^*(M)N)}] = -\gamma Cb \quad (13)$$

### 3.2. Simulação Computacional

Para representar o sistema, foi considerado o modelo de fila M/M/1/m/∞/PEPS, com população finita  $m = M$  e apenas um servidor, ou neste caso, uma única equipe de manutenção que só começa a reparar a falha do próximo equipamento quando termina o serviço no equipamento do cliente anterior. Vale salientar que este modelo de fila única e sem prioridade é o mesmo para qualquer que seja a alternativa ótima de decisão, assumidas que será a mesma para todos os clientes.

Os tempos de falha e os de reparo do equipamento são gerados pelo método da transformada inversa, considerando que eles possuem comportamento de um Processo de Renovação Generalizado (PRG) e um Processo Homogêneo de Poisson (PHP), respectivamente. Definindo  $U$  como uma variável aleatória uniformemente distribuída entre 0 e 1,  $Ta$  como o momento que um cliente entra na fila e  $Td$  como o momento que ele sai do sistema, a geração dessas variáveis pode ser vista a seguir:

$$Ta = Tempo - TempoVirtual + \alpha \left[ -\ln(U) + \left( \frac{TempoVirtual}{\alpha} \right)^\beta \right]^{1/\beta} \quad (14)$$

$$Td = Tempo + \frac{-\ln(U)}{\mu} \quad (15)$$

sendo  $\alpha$  e  $\beta$  os parâmetros da Weibull e  $\mu$  o parâmetro da exponencial.

Importante ressaltar que o tempo virtual do PRG pode ser expresso também como  $TempoVirtual = Tempo * q$ , sendo  $q$  o parâmetro de rejuvenescimento do PRG. Após rodar o modelo para um número muito grande de replicações, é possível obter os valores esperados necessários nas equações de  $P^*(M)$  e  $Cs^*(M)$ .

### 4. Aplicação Numérica

Para ilustrar a metodologia proposta, o modelo foi aplicado com os mesmos dados apresentados em Zaidan [2016]. Trata-se de um angiógrafo, aparelho de alta tecnologia hospitalar utilizado para visualizar vasos sanguíneos em várias partes do corpo, cujas informações provêm de um hospital brasileiro. Desta forma, os seguintes parâmetros foram considerados:

|  |                               |
|--|-------------------------------|
| Preço de venda do angiógrafo ( $Cb$ )  | R\$ 1.476 ( $10^3$ )          |
| Receita por unidade de tempo do angiógrafo ( $R$ )                           | R\$ 0,185 ( $10^3$ ) $h^{-1}$ |
| Custo da execução da manutenção incorrido pelo fabricante ( $Cr$ )           | R\$ 8 ( $10^3$ )              |
| Custo da penalidade ( $\theta$ )   | R\$ 3,5 ( $10^3$ ) $h^{-1}$   |
| Grau de aversão ao risco do hospital ( $\gamma$ )                            | 0,1                           |
| Período de jogo ( $L$ )  | 1 ano = 8760 horas            |
| Tempo máximo para a conclusão da manutenção sem multa ( $\tau$ )             | 2 horas                       |
| Parâmetro da distribuição exponencial dos tempos de reparo ( $\mu$ )         | 0,3779 $h^{-1}$               |
| Parâmetro de escala da distribuição Weibull dos tempos de falha ( $\alpha$ ) | 1.351,8 $h^{-1}$              |
| Parâmetro de forma da distribuição Weibull dos tempos de falha ( $\beta$ )   | 1,658                         |
| Parâmetro de rejuvenescimento do PRG ( $q$ )                                 | 0,097                         |

Tabela 1 – Dados do angiógrafo, segundo Zaidan [2016].



Após rodar o modelo para 150 mil replicações, foi possível obter o valor esperado da função lucro do fabricante para o sistema com 1 até 150 clientes, como pode ser visto na Figura 3. Apesar de conter oscilações devido à aleatoriedade do sistema, é possível concluir que a solução ótima é a alternativa  $A_1$ , com número de clientes próximo a 113, obtendo os valores de  $P = P^*(M) = R\$174.698,00$  e  $C_s > C_s^*(M) = R\$10.482,00$ . O lucro esperado para o fabricante é  $\pi(P^*(113), C_s > C_s^*(113), 113; A_1) = R\$3.809.460,00$ .

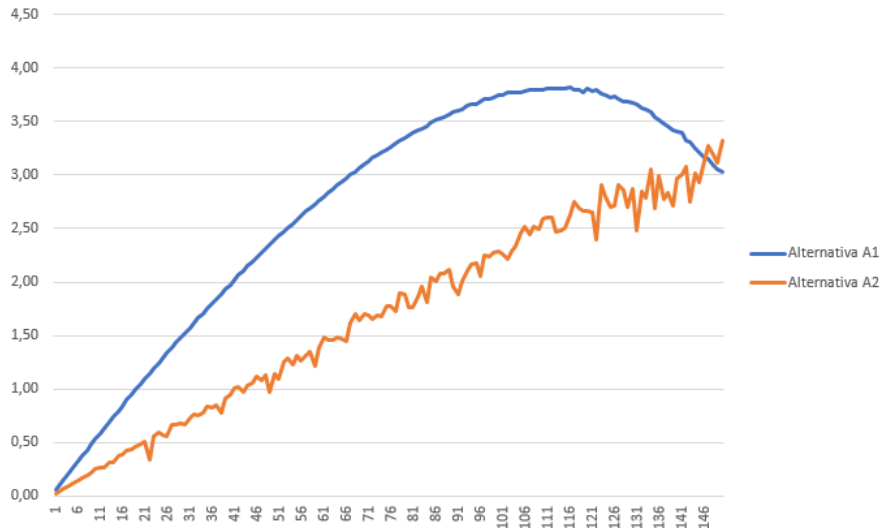


Figura 3 – Lucro esperado do fabricante, em milhões de reais, pelo número de clientes considerando o reparo imperfeito

Com o objetivo de fazer uma comparação direta com as outras formas mais usuais de considerar a distribuição de falhas, o modelo foi aplicado novamente adotando o parâmetro de rejuvenescimento  $q = 0$  e  $q = 1$ , ou seja, simulando um PR e um PNHP, respectivamente. O resultado pode ser visualizado nas Figuras 4 e 5.

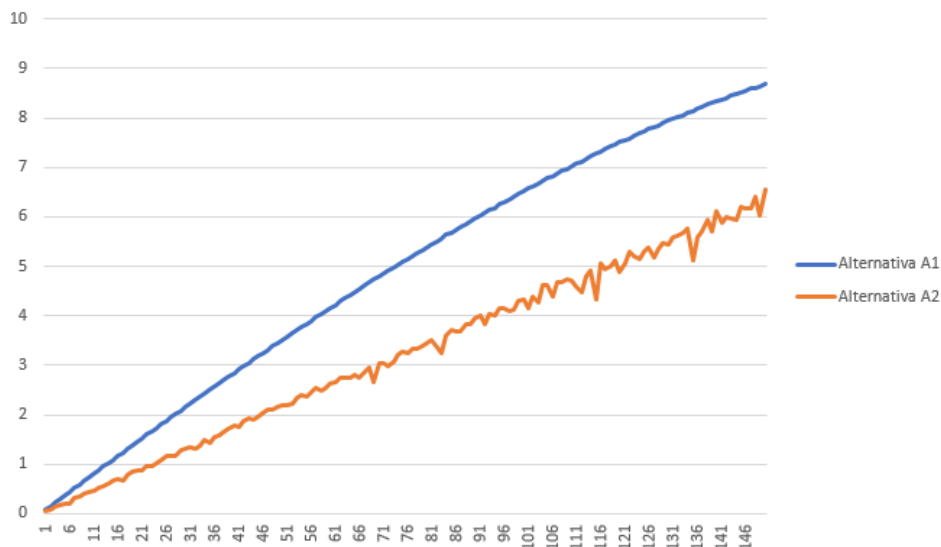


Figura 4 – Lucro esperado do fabricante, em milhões de reais, pelo número de clientes considerando o reparo perfeito



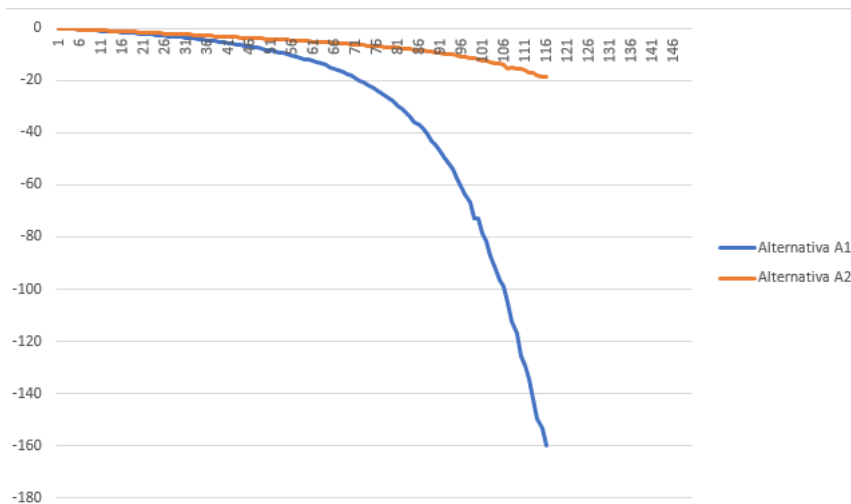


Figura 5 – Lucro esperado do fabricante, em milhões de reais, pelo número de clientes considerando o reparo mínimo

Como previsto, o PR fornece uma visão muito otimista do comportamento de falhas do equipamento, atingindo um número ótimo de clientes superior a 150 e obtendo lucro superior a R\$8.693.180,00, mais que o dobro dos resultados obtidos com o PRG. Já para o PNHP, a distribuição de falhas é tão pessimista que o fabricante não obtém lucro com as atividades de manutenção nem com um único cliente, resultando em um prejuízo maior que R\$70.000.000,00 para filas com mais de 100 clientes.

#### 4.1. Análise de sensibilidade

A solução do modelo é altamente influenciada pelo grau de aversão ao risco do cliente. Para o jogo de Stackelberg, o qual lida com informação perfeita e completa, é considerado que o fabricante conhece o comportamento dos seus clientes em relação ao risco, o que nem sempre se verifica na realidade. Desta maneira, o modelo foi testado novamente para outros valores de  $\gamma$ .

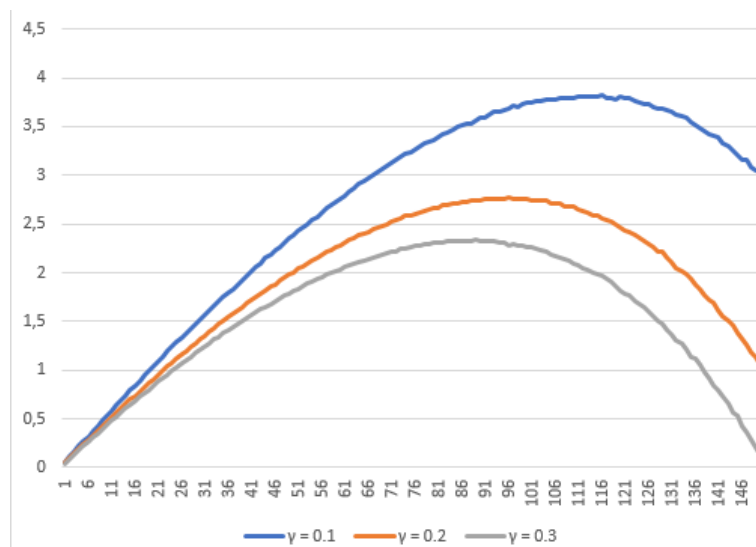


Figura 6 – Lucro esperado do fabricante, em milhões de reais, pelo número de clientes, dada a Alternativa  $A_1$ , considerando diferentes aversões ao risco.

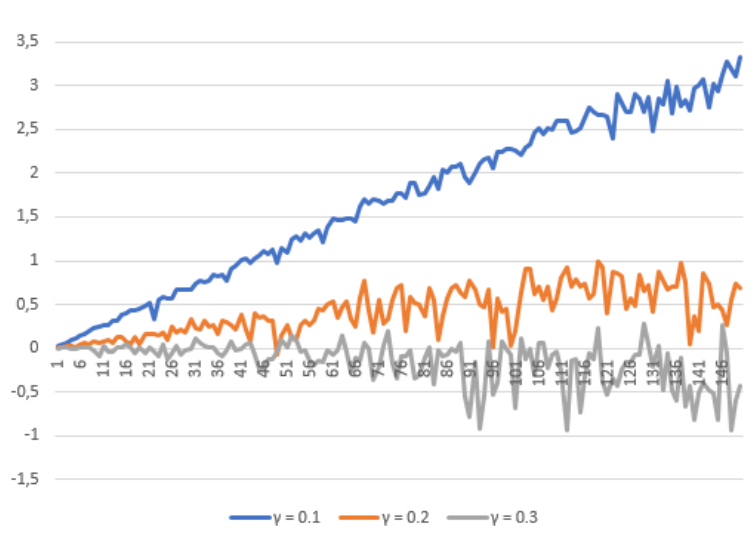


Figura 7 – Lucro esperado do fabricante, em milhões de reais, pelo número de clientes, dada a Alternativa  $A_2$ , considerando diferentes aversões ao risco.

Na Figura 6, é possível observar que o lucro máximo do fabricante diminui à medida que o grau de aversão ao risco aumenta; o mesmo ocorre para o número ótimo de clientes. Tal comportamento é coerente, pois um cliente mais receoso tende a preferir não comprar o equipamento do que comprar a garantia por um preço alto, devido ao medo de sair no prejuízo, e como o valor da multa aumenta com o número de clientes na fila, o fabrica necessita deixar a garantia mais cara.

A Figura 7 mostra o lucro esperado do fabricante na Alternativa  $A_2$ , sendo pertinente fazer uma comparação direta com os resultados de Murthy & Azgharizadeh [2000], o qual considerou que o tempo não operacional do equipamento durante sua vida útil não influenciava na receita do cliente. Devido a esta simplificação, o lucro esperado da alternativa  $A_2$  possuía um comportamento linear ao longo do número de clientes. Já que neste trabalho o tempo operacional foi considerado como uma variável aleatória, a qual diminui com o número de clientes, é possível notar uma tendência curva ao longo do gráfico, indicando que haverá um número ótimo de clientes para esta alternativa. No exemplo do angiógrafo, conforme a Figura 7, a concavidade não é tão visível assim, dado que a queda das variáveis  $H$  e  $N$  é muito pequena com o tempo, causando em um aumento nas oscilações do gráfico.

## 5. Conclusão

Este trabalho teve como principal objetivo demonstrar a relevância da distribuição de falhas na confecção de contratos de manutenção e as diferenças na escolha do modelo de probabilidade associado. O PR e o PNHP são dois processos estocásticos muito utilizados na literatura, entretanto nem sempre eles são os mais indicados para representar o comportamento de falhas de um determinado equipamento.

Zaidan [2016] foi o trabalho referência para esta pesquisa, devido à incorporação do PRG no modelo de contrato proposto por Murthy & Azgharizadeh [1998], utilizando o jogo de Stackelberg. Ao adicionar o modelo de filas, foi possível estender a abordagem, visto que a quantidade de clientes que o fabricante atende ao mesmo tempo interfere na solução ótima do modelo.

A aplicação dos dados do angiógrafo serve como exemplo da divergência dos resultados entre o PR, o PNHP e o PRG. Mesmo com o parâmetro de rejuvenescimento igual a 0,097, próximo a zero, o que leva a crer em resultados próximos entre o PR e o PRG, a diferença no lucro para o fabricante é mais que o dobro entre as duas abordagens, mais de R\$4.000,00 em atividades de manutenção.



No entanto, o trabalho ainda possui suas limitações, as quais podem ser consideradas para outras possíveis extensões. Na análise de sensibilidade, foi visto como o grau de aversão ao risco do cliente interfere na solução ótima do problema, o que pode levantar críticas se é realmente eficiente considerar que todos os clientes possuem o mesmo comportamento ao risco, ou então se é viável tratar essa informação como perfeita e completa, conforme o jogo de Stackelberg propõe. Ainda nesse quesito, também é questionável pensar que o cliente conhece os parâmetros do comportamento de falha do equipamento. Outra possibilidade seria considerar que o fabricante possui mais de uma equipe de manutenção, visto que o modelo só foi analisado para o caso em que só é possível atender um cliente por vez.

## Referências

- ALBRETCHT, P.E. *Introduction to discrete simulation*. 2010.
- ASGHARIZADEH, E. & MURTHY, D.N.P., “Service Contracts: A Stochastic Model”, *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 31, 2000.
- BATEMAN, R. E.; BOWDEN, R. O.; GOGG, T. J.; HARREL, C. R.; MOTT, J. R. A.; MONTEVECHI, J. A. B. *Simulação de sistemas: aprimorando processos de logística, serviços e manufatura*. 1 ed. Rio de Janeiro. Elsevier, 2013.
- FIANI, R. *Teoria dos Jogos: com aplicações em economia*. 3 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.
- GIBBONS, R. *A primer in Game Theory*. New Jersey, Prentice Hall, 1992.
- GUEDES, B. N. “Analysis of Extended Warranties for Medical Equipment: a Game Theory Based Approach Using Priority Queues”. 78 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife. 2016.
- GUEDES, B. N., MOURA, M. C., LINS, I., ZAIDAN, H., MORAIS, D., DROGUETT, E. L. & PASCUAL, R. Negotiation of extended warranties for medical equipment. *Safety and Reliability of Complex Engineered Systems*, n. 2000, p. 975–982, 2015a.
- GREVE, T.F. *Non-Cooperative Game Theory*. Tokyo, Springer Japan, 2015, 263p.
- HILLIER, F.S., LIEBERMAN, G.J. *Introdução à Pesquisa Operacional*, McGraw-Hill Interamericana do Brasil Ltda., SP, BRA. 2006.
- JACKSON, C., PASCUAL, R. “Optimal maintenance service contract negotiation with aging equipment”, *European Journal of Operational Research*, vol 189, pp. 387–398, 2008.
- KIJIMA, M. & SUMITA, N. “A useful generalization of renewal theory: counting process governed by non-negative Markovian increments”. *Journal of Applied Probability*, 23, 71-88. 1986.
- MOURA, M., ROCHA, S., DROGUETT, E. & JACINTO, C. “Avaliação Bayesiana da Eficácia da Manutenção via Processo de Renovação Generalizado”, *Pesquisa Operacional*, vol. 27, 2007.
- MURTHY, D.N.P. & ASGHARIZADEH, E., “A Stochastic Model for Service Contract”, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, vol. 5, 1998.
- ROSS, S.M. *Simulation*. 5 ed. Elsevier. Califórnia, US, 2006.



YANEZ, M. JOGLAR, F. MODARRES, M. “Generalized renewal process for analysis of repairable systems with limited failure experience”, *Reliability Engineering & System Safety*, 77, 167-180, 2002.

ZAIDAN, H. P. S. “Garantia estendida para equipamentos hospitalares: uma abordagem via teoria dos jogos e processo de renovação generalizado”. 73 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife. 2016.